

Autoreferat

1. Imię i nazwisko: Mateusz Hohol

2. Dyplom oraz stopień naukowy:

- Doktor nauk humanistycznych (*summa cum laude*) w zakresie filozofii (2013 r.); Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie; tytuł dysertacji: *Struktura teorii neurokognitywnych*.
- Magister filozofii (*summa cum laude*); Wydział Filozoficzny, Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie (2010 r.); tytuł pracy: *Analiza i krytyczna ocena Rogera Penrose'a Gödłowskiego argumentu za niealgorytmicznością umysłu*.

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:

- Uniwersytet Jagielloński, Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych (adiunkt, pełny etat naukowy, od 1 października 2018 r.). Dziedzina i dyscyplina (Ustawa 2.0): nauki społeczne, psychologia (100%).
- Instytut Filozofii i Socjologii Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, Zakład Logiki i Kognitywistyki (adiunkt: od 1 października 2015 r. – pełny etat, od 1 października 2018 r. – ½ etatu, od 1 stycznia 2020 – ¼ etatu; koniec zatrudnienia: 31 marca 2020).
- Uniwersytet Papieski Jana Pawła II w Krakowie, Wydział Filozoficzny (asystent, pełny etat naukowo-dydaktyczny, od 1 października 2013 r. do 30 września 2015 r.).

4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy.

Tytuł: *Foundations of geometric cognition*

Monografia prezentująca osiągnięcie habilitacyjne:

Hohol, M. (2020). *Foundations of geometric cognition*. London–New York: Routledge (204 strony; Poziom II w wykazie wydawnictw MNiSW – 200/300 punktów).

Abstrakt

Za swoje kluczowe osiągnięcie naukowe, uprawniające do rozpoczęcia procedury habilitacyjnej, uważam opracowanie koncepcji poznania geometrycznego, będącej pierwszą

w literaturze przedmiotu współczesną próbą usystematyzowania i integracji wyników badań nad umysłową reprezentacją przestrzeni i przetwarzaniem abstrakcyjnych pojęć matematycznych. Wskazuję, że nasze zdolności geometryczne wyrastają z elementarnych, wczesnych ontogenetycznie i uniwersalnych kulturowo zdolności przestrzenno-wzrokowych. Zdolności te mają również długi rodowód filogenetyczny (ewolucyjny), o czym świadczy ich obecność u zwierząt różnych od człowieka. Twierdzę jednak, że odwołanie się do elementarnych zdolności geometrycznych nie pozwala w pełni wyjaśnić matematycznej, ukształtowanej kulturowo, formy poznania geometrycznego, cechującej się wykorzystaniem abstrakcyjnych pojęć w ścisłych i ogólnych rozumowaniach matematycznych. Podkreślam ponadto, że geneza i mechanizmy przetwarzania pojęć abstrakcyjnych – nie tylko matematycznych – stanowią jeden z największych problemów dla współczesnej psychologii poznawczej i pokrewnych dziedzin odwołujących się do idei „umysłu ucieleśnionego”. Wskazuję, że unikalna dla człowieka, matematyczna forma poznania geometrycznego powstaje dzięki wykorzystaniu artefaktów poznawczych. Należą do nich w szczególności profesjonalny język geometryczny i diagramy. Artefakty te tworzą „rusztowanie” dla nowych form myślenia, wykraczających zarówno poza elementarne reprezentacje geometryczne, jak i bezpośrednie, „ucieleśnione”, doświadczenie. Osiągnięcie będące podstawą niniejszego wniosku przedstawiłem w monografii pod tytułem *Foundations of geometric cognition*, opublikowanej przez wydawnictwo Routledge (London–New York, 2020).

Wprowadzenie

Przedmiotem mojej monografii jest poznanie geometryczne, będące, obok poznania numerycznego, zasadniczą częścią poznania matematycznego (np. Dehaene i Brannon, 2011). Przez termin „poznanie geometryczne” rozumiem psychologiczne uwarunkowania przetwarzania, przyswajania i tworzenia struktur geometrycznych (przede wszystkim euklidesowych). Oznacza to, że geometrię traktuję jako *zjawisko wyjaśniane* – przez różne działy psychologii i dyscypliny pokrewne, takie jak neuronauka czy teoria ewolucji. Nie zajmuję się natomiast geometrią rozumianą jako uniwersalne *narzędzie modelowania* (a co za tym idzie *wyjaśniania*) zjawisk psychologicznych, także tych niezwiązanych bezpośrednio geometrią, jak czynią to choćby Peter Gärdenfors (2014) czy Włodzisław Duch (2002)¹.

¹ Poza dwoma wyjątkami, prace w języku polskim nie były przeze mnie cytowane w książce.

Istnieje kilka powodów, które skłoniły mnie do podjęcia tego tematu. Po pierwsze geometria – obok liczb – stanowi od najmłodszych lat szkolnych podstawowy przedmiot edukacji matematycznej, dostarczając kompetencji niezbędnych w dalszej nauce i codziennym życiu człowieka (zob. Swoboda, 2006). Po drugie, dziedzina ta odegrała kluczową rolę w budowie całej matematyki europejskiej – w starożytnej Grecji również teoria liczb wykorzystywała euklidesowe pojęcia i metody (Merzbach i Boyer, 2011). W związku z tym geometria była przez stulecia synonimem całej matematyki. Po trzecie, aksjomatyczno-dedukcyjne ujęcie geometrii, które zawdzięczamy Euklidesowi, przez wieki uznawane było za wzór „naukowości” i ścisłego myślenia. Po czwarte, geometria jest nie tylko istotnym działem współczesnej matematyki, ale także wielu słynnych matematyków postrzegało ją jako dyscyplinę fundamentalną (Hadamard, 1964). Chcąc więc zrozumieć ludzkie poznanie matematyczne, powinniśmy wziąć pod uwagę, jak nasze systemy poznawcze radzą sobie z geometrią. Co więcej, nawet najbardziej elementarne pojęcia geometryczne, takie jak „prosta” czy „punkt”, są pojęciami abstrakcyjnymi. Wielu autorów podnosi natomiast, że abstrakcyjność stanowi poważne wyzwanie dla koncepcji poznania ucieleśnionego (np. Barsalou, 1999; Dove, 2014), która została dobrze ugruntowana empirycznie przede wszystkim w odniesieniu do przetwarzania pojęć konkretnych („krzesło”, „kot”). Poznanie geometryczne, podobnie jak poznanie numeryczne, stanowi więc doskonałe pole do „testowania” koncepcji poznania ucieleśnionego.

Nie oznacza to jednak, że badania nad poznaniem geometrycznym prowadzone są z taką samą intensywnością jak te dotyczące przetwarzania liczb przez ludzki umysł. Wyniki dotychczasowych badań nad różnymi aspektami poznania geometrycznego często są mało znane nawet w środowisku psychologów i przedstawicieli pokrewnych dziedzin, określanych i określających się jako badacze poznania matematycznego. Odzwierciedla to fakt, że większość dotychczasowych monografii z zakresu psychologii i nauk pokrewnych, w tytułach których pojawia się „matematyka” lub „poznanie matematyczne”, pomija geometrię całkowicie (np. Brożek i Hohol, 2014; Butterworth, 1999; Gilmore, Göbel, Inglis, 2018; Lakoff i Núñez, 2000) lub poświęca jej znacznie mniej miejsca niż liczbom (np. Dębiec, 2002; Dehaene i Brannon, 2011; Geary, Berch, Ochsendorf, Koepke, 2017). Tytuły innych wartych odnotowania monografii (np. Dehaene, 2011; Henik, 2016; Knops, 2020; Sobańska i Łojek, 2011) z kolei wprost odzwierciedlają zawężenie pola badawczego do poznania numerycznego. Dotychczasowe prace obejmujące elementy poznania geometrycznego dotyczyły głównie zagadnień edukacyjnych (Roth, 2011; Swoboda, 2006). Znamienny jest również fakt, że

oficjalne czasopismo towarzystwa Mathematical Cognition and Learning Society, którego mam przyjemność być członkiem, nosi tytuł *Journal of Numerical Cognition*. Można zaryzykować wręcz tezę, że dla większości badaczy zaangażowanych w dziedzinę, termin „poznanie matematyczne” odnosi się *de facto* do poznania numerycznego.

Powyższe stwierdzenia nie oznaczają jednak, że w różnych działach psychologii i naukach pokrewnych nie są prowadzone zaawansowane badania nad poznaniem geometrycznym. Stąd też za cel postawiłem sobie próbę usystematyzowania wyników rozproszonych badań nad różnymi aspektami poznawczego przetwarzania geometrii oraz opracowania spójnej ramy teoretycznej, która – mam nadzieję – okaże się przydatna w dalszych wysiłkach badawczych. *Foundations of geometric cognition* jest nie tylko monografią podsumowującą stan badań nad elementarnymi kompetencjami geometrycznymi. Przedstawia ona bowiem ugruntowaną empirycznie propozycję przejścia, w różnych skalach czasowych, od kompetencji elementarnych do bardziej wyrafinowanych form poznania geometrycznego. Choć monografia ta nie dotyczy liczb, zaproponowane w niej rozwiązania mogą być również pomocne w badaniach nad poznaniem numerycznym oraz innymi formami aktywności poznawczej człowieka, które opierają się na operowaniu pojęciami abstrakcyjnymi. Zważywszy na to, że poczynając od przełomowej pracy Lawrence’a Barsalou (1999) wielu badaczy zauważa, że przetwarzanie pojęć abstrakcyjnych stanowi jedno z największych wyzwań dla koncepcji ucieleśnionego poznania, a koncepcja ta wykorzystywana jest w wielu działach psychologii (i nie tylko), propozycje przedstawione w mojej monografii mogą okazać się istotne dla całej dyscypliny. W tym kontekście za szczególnie istotne uważam wskazanie, że pewna wersja ucieleśnionego poznania, którą przedstawiam w rozdziale 3, jest niesprzeczna z językową i społeczną naturą pojęć abstrakcyjnych (Paivio, 1986; Wygotski, 1934/1989).

Jestem całkowicie świadomy, że „geometria” to termin bardzo pojemny. W matematyce wyróżnia się geometrię euklidesową oraz geometrie nieeuklidesowe. Samą geometrię euklidesową można uprawiać w ujęciu nieformalnym lub aksjomatyczno-dedukcyjnym (prócz zaproponowanego przez Euklidesa w *Elementach* układu postulatów i pojęć wspólnych, mamy również inne aksjomatyki, np. Hilberta czy Tarskiego). W książce *Foundations of geometric cognition* zdecydowałem się ograniczyć do geometrii euklidesowej. Geometria euklidesowa opracowana została w świecie starożytnym, ale w pewnym stopniu spotkał się z nią każdy nas, już w szkole podstawowej. Piszę, że „w pewnym stopniu”, ponieważ osoby, które nie decydują się na specjalistyczne studia, nie mają zwykle do czynienia z formalnym

(aksjomatyczno-dedukcyjnym) ujęciem geometrii euklidesowej. Pomimo tego, współczesna szkolna edukacja geometrii jest w pewnym stopniu oparta na *Elementach* Euklidesa (dzieło to przez wieki wykorzystywane było jako podręcznik matematyki), wykorzystując kombinację oznaczonych literami diagramów i leksykonu, tworzącego specjalistyczny język geometrii. Ponieważ idea dowodu stanowi być może najważniejszy wynalazek Euklidesa, zdecydowałem się uwzględnić poznawcze uwarunkowania rozumowań wykorzystujących pojęcia abstrakcyjne. Teoria poznawczych podstaw geometrii euklidesowej, którą przedstawiam w kolejnych rozdziałach książki, jest odpowiedzią na cztery poniższe dezyderaty:

- (D1) Teoria powinna rozstrzygać, czy elementarne zdolności geometryczne są częścią naszego „wyposażenia” poznawczego, czy raczej są one konstruowane przez jednostkę w trakcie rozwoju „od zera”.
- (D2) Teoria powinna rozstrzygać, jak rdzenne zdolności poznawcze łączone są w trakcie ontogenezy w system abstrakcyjnych pojęć geometrycznych.
- (D3) Teoria powinna wyjaśniać, w jaki sposób ludzki system poznawczy może przetwarzać w ogóle pojęcia abstrakcyjne, szczególnie jeśli system ten ograniczany jest przez konkretne ciało i środowisko.
- (D4) Teoria powinna wyjaśniać poznawcze uwarunkowania dowodu geometrycznego, który charakteryzuje się pewnością wyników oraz ogólnością dowiedzionych twierdzeń.

Książka składa się z czterech rozdziałów, dzielących się na mniejsze sekcje. Rozdział 1 ma za zadanie wprowadzić czytelnika w różne podejścia do badań nad poznaniem geometrycznym. Choć rozdział ten nie odpowiada wprost na żaden z dezyderatów, pozwala zrozumieć ich zasadność oraz wskazuje na związane z nimi problemy badawcze. Rozdział 2 poświęcony jest wczesnym ontogenetycznie, uniwersalnym kulturowo i mającym długi rodowód filogenetyczny przejawom elementarnego poznania geometrycznego. Odpowiadam w nim na dezyderaty D1 i D2. Rozdział 3 poświęcony jest poznawczemu przetwarzaniu pojęć abstrakcyjnych – zagadnieniu, które w opinii wielu badaczy stanowi poważne wyzwanie dla podejścia określanego jako „poznanie ucieleśnione”. Odpowiadam w nim na dezyderat D3. Czwarty rozdział dotyczy poznawczych uwarunkowań dowodu geometrycznego i stanowi odpowiedź na dezyderat D4. Ostatnia część książki obejmuje podsumowanie wywodu, omówienie ograniczeń obecnego stanu wiedzy i wskazanie dalszych kierunków badawczych. Poniżej przybliżyłem treść poszczególnych rozdziałów oraz odpowiedzi na dezyderaty.

Perspektywy badań nad poznaniem geometrycznym

W rozdziale 1, zatytułowanym „Geometric thinking, the paradise of abstraction” dyskutuję różne perspektywy badań nad myśleniem geometrycznym zgodnie z chronologią ich powstawania. Perspektywy te obejmują filozofię, psychologię rozwoju poznawczego, psychologię edukacyjną oraz badania interdyscyplinarne, zapoczątkowane na fali „rewolucji poznawczej”. Najpierw jednak rekonstruuje historyczne początki samej geometrii, czyli matematycznej „nauki o przestrzeni”.

Choć *Elementy* Euklidesa powstały w Grecji w IV w. p.n.e., początki geometrii sięgają praktycznej wiedzy na temat własności przestrzennych, której materialne przejawy znaleźć możemy w architekturze egipskiej i babilońskiej, a nawet w kulturze megalitycznej. Historycy matematyki wskazują również, że starożytni Egipcjanie znali techniki pomiaru gruntów. Stąd wywodzi się zresztą sam grecki termin *geometrein*, oznaczający dosłownie „mierzyć ziemię”. Ta praktyczna działalność nie szła jednak w parze z wykorzystaniem abstrakcyjnych pojęć w rygorystycznych dowodach matematycznych (Merzbach i Boyer, 2011). Na początku pierwszego rozdziału rekonstruuje, w przybliżony sposób, proces „uabstrakcyjniania”, a zarazem „uściślenia” przez Greków geometrii, którego kulminacją stanowią *Elementy* Euklidesa, będące przez ponad dwa tysiąclecia podstawowym podręcznikiem matematyki. Przybliżam strukturę tego traktatu, w którym pierwszy raz na szeroką skalę zastosowano aksjomatyczno-dedukcyjną metodę dowodzenia twierdzeń, oraz powiązane z nim spory interpretacyjne.

Filozofia jest historycznie pierwszą perspektywą badań nad poznaniem geometrycznym, tradycyjnie określanym jako „intuicja geometryczna” (Murawski, 2013). O ile Platon oraz część ze starożytnych kontynuatorów jego myśli, np. Speuzyp i Proklos, bronili wrodzoności intuicji geometrycznej, inni – np. Arystoteles i Menaichmos – zaprzeczali takiej tezie. W czasach nowożytnych na niezależność elementarnej wiedzy geometrycznej od doświadczenia wskazywali m.in. Kartezjusz i Kant. Ten ostatni twierdził, że matematyczna geometria euklidesowa konstruowana jest na bazie wewnętrznej, euklidesowej reprezentacji przestrzeni, w którą wyposażony jest podmiot transcendentálny. Poglądy Kanta stanowiły inspirację dla Poincarégo i Helmholtza, którzy jednak ostatecznie wypracowali oryginalne stanowiska. Pierwszy z nich wskazywał na istnienie wrodzonej intuicji geometrycznej, twierdząc jednocześnie, że konkretne systemy matematyczne przyjmowane są na mocy konwencji. Helmholtz bronił natomiast tezy, że nie istnieją żadne wrodzone struktury

poznawcze, stojące za ludzkimi zdolnościami geometrycznymi. Według Helmholtza (1870/1977), „nie istnieje żadna transcendentna forma intuicji dana przed wszelkim doświadczeniem” (s. 26), zaś intuicja geometryczna ma charakter empiryczny i „nabywana jest poprzez wzmacnianie i akumulację impresji, powtarzających się w naszej pamięci” (s. 25–26). Idee jednego z „ojców założycieli” psychologii eksperymentalnej na temat poznania geometrycznego oparte były na ówczesnej wiedzy dotyczącej procesów poznawczych (w tym na jego własnych badaniach), jednak ostatecznie miały one charakter filozoficzny.

Empiryczne badania nad pewnymi aspektami poznania geometrycznego prowadzone są w zasadzie od chwili powstania psychologii eksperymentalnej. Do najwcześniejszych z nich zaliczyć można te dotyczące iluzji geometryczno-optycznych (Wundt, 1898) i psychologii postaci. Istotnym wątkiem, do którego wróćę wracam dalej, są również badania Tolmana (1948) nad orientacją przestrzenną gryzoni, które doprowadziły go do sformułowania koncepcji geometrycznych map poznawczych. Pierwszą w historii psychologii eksperymentalnej systematyczną perspektywę badań nad poznaniem geometrycznym zawdzięczamy jednak Piagetowi, Inhelder i Szemińskiej (Piaget i Inhelder, 1967; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1960; obydwie prace ukazały się oryginalnie w 1948 r.).

Centralnym pojęciem perspektywy Piageta i wsp. jest konstruktywizm – twierdzenie, że umysłowa reprezentacja (pojęcie) przestrzeni euklidesowej nie jest wrodzona, ale, podobnie jak inne zdolności poznawcze, kształtowana jest w trakcie ontogenezy stopniowo, w procesie przebiegającym wedle dających się wyodrębnić faz. Indywidualną konstrukcję przestrzeni euklidesowej poprzedza konstrukcja przestrzeni topologicznej, a następnie rzutowej. Proces ten napędzany jest nie poprzez pasywną obserwację (jak twierdził choćby Arystoteles), ale przez podejmowanie przez dziecko działań, takich jak eksploracja otoczenia czy manipulacja przedmiotami. Co za tym idzie, zdaniem Piageta i Inhelder (1967), pojęcia geometrii euklidesowej są „zinternalizowanymi działaniami, a nie jedynie obrazami mentalnymi zewnętrznych rzeczy lub zdarzeń, ani nawet [umysłowymi] obrazami skutków działań” (s. 454). Teoria rozwoju poznania geometrycznego Piageta i wsp. była przedmiotem krytyki (zob. Clements i Battista, 1992). Krytykowano rozumienie przez nich topologii i dobór bodźców eksperymentalnych (wzrokowych i haptycznych), w podziale na figury topologiczne i euklidesowe. W konsekwencji przekładało się to na kwestionowanie wyników badań. Współczesne badania – które omawiam w dalszej części – zdają się przeczyć silnej wersji konstruktywizmu (Spelke, Lee, Izard, 2010). Z drugiej strony należy jednak podkreślić, że

teoria Piageta i wsp. była pierwszym systematycznym ugruntowanym eksperymentalnie podejściem do rozwoju poznania geometrycznego. Co więcej, twierdzenie, że kształtowanie pojęć geometrycznych wiąże się z internalizacją działań, czyni z Piageta prekursora ucieleśnionego poznania.

Konstruktywizm Piageta stał się również inspiracją dla badań edukacyjnych, stanowiących kolejną dziedzinę studiów nad poznaniem geometrycznym (zob. Gruszczyk-Kolczyńska i Zielińska, 1997). Wpływowy w tym zakresie model zaproponowali van Hiele-Geldof i van Hiele (1957/1984; van Hiele, 1986). Zakłada on, że proces przyswajania geometrii ma charakter sekwencyjny i hierarchiczny, co oznacza, że uczeń (student) nie może przejść na wyższy poziom, jeśli nie opanuje umiejętności i pojęć z poziomu niższego (zob. Semadeni, 2018; Swoboda, 2006). Pomimo inspiracji teorią Piageta, model van Hielów dotyczy nie tylko genezy elementarnych pojęć geometrycznych, ale również wiedzy szkolnej, a nawet eksperckiej. Co za tym idzie, obejmuje on znacznie dłuższy okres ontogenezy. Wreszcie, model ten obejmuje niepomijalny wpływ nauczyciela na konstrukcję wiedzy geometrycznej przez ucznia (studenta). Model van Hielów stał się podstawą nauczania geometrii w wielu krajach i wykorzystany został w licznych badaniach z zakresu edukacyjnej psychologii matematyki. Te ostatnie wykazały, że nie tylko uczniowie, ale również nauczyciele matematyki osiągają zwykle jedynie pierwsze poziomy (Geary et al., 2017). Z drugiej jednak strony model van Hielów stał się przedmiotem krytyki (zob. Clements i Battista, 1992). Kwestionowano między innymi dyskretność poziomów oraz sekwencyjność ich występowania. Przedmiotem sporów była również liczba poziomów oraz metodologia określania zakresu kompetencji matematycznych na danym poziomie.

Kolejną perspektywą badań nad poznaniem geometrycznym są interdyscyplinarne studia nad procesami poznawczymi, znane w Polsce jako kognitywistyka. Chociaż wśród dziedzin konstytuujących tę perspektywę wymienia się psychologię eksperymentalną, lingwistykę, modelowanie komputerowe, neuronaukę, filozofię i antropologię, aż do lat osiemdziesiątych główne role odgrywały pierwsze trzy z nich (Miller, 2003). Choć do dziś toczą się dyskusje na temat istnienia wspólnych założeń teoretycznych, dzielonych choćby przez te trzy dyscypliny, zwykle mówi się o amodalności poznania, czyli tezie, że procesy poznawcze polegają na przekształcaniu nieugruntowanych w percepcji (i motoryce), arbitralnych, *quasi*-językowych symboli (Fodor, 1975).

Pierwsze z przeprowadzonych badań nad geometrią, podjętych na fali „rewolucji poznawczej”, która rozpoczęła się w Stanach Zjednoczonych z końcem lat pięćdziesiątych, koncentrowały się wokół modelowania komputerowego, jednak szybko wsparte zostały przez psychologię. Autorem pierwszego programu dowodzącego twierdzeń geometrycznych był Gelernter (1963). Program ten osiągał cel nie tylko poprzez przekształcanie amodalnych symboli, ale również diagramów. Choć Gelernter był przekonany, że wykorzystanie diagramów odzwierciedla ludzkie praktyki geometryczne, nie poparł tego danymi psychologicznymi. Kilka lat później wykorzystując raporty werbalne zrobił to Greeno (1978). W przeciwieństwie do poprzedników, jego program Perdix modelował wykonanie zadań geometrycznych przez studentów o średnim poziomie zaawansowania. Taki sam cel przyświecał programowi Geometry Tutor Expert (Anderson, Boyle, Yost, 1985), który implementował rozwiązania architektury ACT*. Wyniki badań Koedingera i Andersona (1990) – przeprowadzonych również z wykorzystaniem metody analizy raportów werbalnych, a następnie zaimplementowanych w programie opartym na ACT* – wskazują, że rozwiązując problemy geometryczne, z diagramów korzystają zarówno nowicjusze, jak i eksperci. W szczególności diagramy, ze względu na łatwy dostęp i reprezentacyjną „zwartość” informacji, służą im do eksploracji możliwych rozwiązań problemu oraz aktywnego planowania kolejnych kroków dowodowych (Larkin i Simon, 1987).

Jak wskazuję pod koniec rozdziału, badania nad geometrią prowadzone na fali „rewolucji poznawczej” różniły się od wczesnych badań nad poznaniem numerycznym w ważnym aspekcie. Te pierwsze koncentrowały się na dowodzeniu twierdzeń, a więc zdolności wymagającej specjalistycznej wiedzy i obejmującej złożone procesy poznawcze. W psychologii poznawczej opracowano wprawdzie szereg paradygmatów eksperymentalnych wykorzystujących bodźce geometryczne (np. rotacje mentalne), jednak ich celem było nie tyle zrozumienie elementarnych przejawów poznania geometrycznego, co raczej dostarczenie argumentu na rzecz przetwarzania analogowego. Natomiast, począwszy od lat sześćdziesiątych, badania nad poznaniem numerycznym (głównie z użyciem metody chronometrycznej) koncentrowały się wokół elementarnych procesów przetwarzania liczb (np. Moyer i Landauer, 1967). Zagadnienia te przybliżam w dalszej części autoreferatu przy okazji omówienia wyników innych badań naszego zespołu (Cipora et al., 2016; Hohol et al., 2020). Elementarne procesy poznania geometrycznego stały się przedmiotem badań prowadzonych na szerszą skalę dopiero w drugiej połowie lat osiemdziesiątych.

Elementarne poznanie geometryczne

W rozdziale 2 „The hardwired foundations of geometric cognition” odpowiadam na dezyderaty D1 i D2, dotyczące genezy elementarnych zdolności geometrycznych. Jeśli chodzi o dezyderat D1, wskazuję, że elementarne zdolności geometryczne, jakimi są orientacja przestrzenna na podstawie geometrii środowiska oraz rozróżnianie kształtów, nie są budowane w trakcie rozwoju „od zera” na bazie indywidualnych doświadczeń. Zamiast tego są one wczesne ontogenetycznie, uniwersalne kulturowo oraz mają długi rodowód filogenetyczny². Stojące za tymi zdolnościami rdzenne systemy poznawcze, tj. system geometrii przestrzennej i system geometrii obiektowej, cechują się jednak ograniczeniami reprezentacyjnymi. Te ostatnie przekraczane są w trakcie ludzkiej ontogenezy dzięki artefaktom poznawczym, a konkretnie wraz z przyswajaniem języka obejmującego frazy przestrzenne i umiejętności w zakresie korzystania ze szkiców przestrzennych (dezyderat D2). Dzięki temu powstaje nowy system reprezentacyjny, obejmujący własności takie jak: długość (odległość), kierunek i kąt, oraz umożliwiające przyswajanie matematycznej geometrii euklidesowej. Rozdział ten zorganizowany jest zgodnie ze strategią pytań wyjaśniających Tinbergena (1963). Choć pytania o czynniki przyczynowe, wartość adaptacyjną, filogenezę i ontogenezę dotyczyły oryginalnie perspektywy etologicznej, stosowane są one również we współczesnej psychologii porównawczej (Pisula, 2003; Trojan, 2013). W związku z tym, że w psychologii pytanie o czynniki przyczynowe dotyczy mechanizmów poznawczych i ich mózgowego podłoża (Miłkowski, Hohol, Nowakowski, 2019), przed próbą odpowiedzi na poszczególne pytania ustalę architekturę poznawczą elementarnego poznania geometrycznego.

Pierwszą dziedziną, w której przejawiają się elementarne zdolności geometryczne, jest orientacja przestrzenna oparta na geometrii środowiska (zob. Haman i Gut, 2016). Zaobserwowano, że geometria środowiska stanowi wskazówkę, umożliwiającą zdezorientowanym szczurom odzyskiwanie utraconej orientacji przestrzennej (Cheng, 1986). W prostokątnych arenach gryzonie mają tendencję do szukania celu albo we właściwym rogu

² Wczesną ontogenezę, uniwersalność kulturową oraz długą historię ewolucyjną zdolności poznawczych ujmuję za pomocą użytego w tytule rozdziału przymiotnika „hardwired”. Nie znajduję jednak dobrego polskojęzycznego odpowiednika dla tego słowa. W anglojęzycznej literaturze psychologicznej (i zakresu dyscyplin pokrewnych) stosowany jest on często wymiennie z „innate”, czyli „wrodzony”. Zdając sobie sprawę z licznych kontrowersji, związanych z terminem „wrodzoność” (Ritchie, 2020) unikam go jednak świadomie, gdy odnoszę się do współczesnych badań. Mając na uwadze, że w psychologicznych studiach nad elementarnym poznaniem numerycznym często wykorzystuje się spopularyzowany przez Dehaene’a (2011) termin „number sense” („zmysł numeryczny”), można by mówić przez analogię o „zmyśle geometrycznym”. Oryginalny termin daleki jest jednak od precyzji (zob. przyp. 1 w: Hohol, Cipora, Willmes, Nuerk, 2017).

– tj. tym, w którym znajdowała się ona przed fazą dezorientacji – albo w identycznym geometrycznie rogu „po przekątnej”. Ten wzorec behawioralny określany jest jako „błąd rotacyjny”. Obserwuje się go nawet w warunku z dodaną wskazówką niegeometryczną (lokalną). Do badań z udziałem ludzi paradygmat Chenga zaadoptowały Hermer i Spelke (1994). Badaczki te porównały wykonanie zadania przez dzieci w wieku od półtora roku do dwóch lat oraz osób dorosłych (studentów). W warunku bez wskazówki lokalnej zarówno dzieci, jak i dorośli spontanicznie wykorzystują do reorientacji geometrię prostokątnego pokoju, o czym świadczy obecność błędów rotacyjnych. Gdy wprowadzona została natomiast wskazówka lokalna, tylko osoby dorosłe potrafiły spontanicznie zawęzić obszar poszukiwań do poprawnej lokalizacji, co świadczy o ich zdolności do elastycznego łączenia geometrii układu przestrzennego oraz wskazówek lokalnych. Zdolność wykorzystania przez ludzi geometrii do reorientacji uważana jest za uniwersalną kulturowo (Spelke et al., 2010).

Drugim przejawem elementarnych zdolności geometrycznych jest rozróżnianie kształtów dwu- i trójwymiarowych przedmiotów. Chociaż jeszcze do niedawna panowało przekonanie, że gryzonie rozróżniają figury jedynie na podstawie cech niskopoziomowych, takich jak luminancja, dziś wskazuje się na ich zdolność do wysokopoziomowego przetwarzania kształtów geometrycznych (Tommasi, Chiandetti, Pecchia, Sovrano, Vallortigara, 2012). Jeśli chodzi o rozróżnianie kształtów przez ludzi, dowodów na wczesną ontogenezę i uniwersalność dostarczają między innymi badania w paradygmacie wykrywania niepasującej figury (ang. *deviant detection paradigm*). Wskazują one, że dzieci w wieku od 4 do 10 lat potrafią efektywnie przetwarzać kąty i długość (Izard i Spelke, 2009). Trudność sprawiają im jednak bodźce, w których należy wziąć pod uwagę kierunek. Podobne wyniki uzyskano w badaniach z udziałem pozbawionych treningu matematycznego członków ludu Mundurucu (Izard, Pica, Spelke, Dehaene, 2011).

Cheng (1986) wprowadził pojęcie „modułu geometrycznego”. Pojęcie to odnosi się do wysokopoziomowego systemu poznawczego, umożliwiającego znajdowanie miejsca wyłącznie na podstawie postrzeganego wzrokowo układu przestrzennego. Oznacza to, że moduł geometryczny nie przetwarza informacji pozawzrokowych (np. zapachu), a także niegeometrycznych informacji wzrokowych, takich jak kolor czy tekstura. Moduł geometryczny wyposażony jest w podsystem, określany jako „rama metryczna”, który może przechowywać lokalizacje obiektów. Według Chenga jest to pojęcie bliskoznaczne względem „mapy poznawczej”. Jak wcześniej wspomniałem, autorem pojęcia „mapy poznawczej” był

Tolman (1948). Odkrycie komórek miejsca w hipokampie szczura (O'Keefe i Dostrovsky, 1971) uznaje się za poważny argument na rzecz istnienia takich map. Kolejne mózgowo komponenty mechanizmu mapowania przestrzennego zostały odkryte w korze śródwęchowej. Należą do nich komórki: siatki, kierunku, granicy i prędkości (zob. przegląd badań: Moser, Moser, McNaughton, 2017).

Według Chenga (1986) moduł geometryczny jest modułem umysłowym w sensie Fodora (1983), głównie ze względu na specjalizację i izolację. Można mówić również o jego lokalizacji w hipokampie. Jak wskazuję, cechy te pomijają inne ważne charakterystyki podawane przez Fodora, co zbliża moduł geometryczny raczej do bardziej „liberalnego” ujęcia modularności, które przyjmuje się we współczesnej psychologii ewolucyjnej (Łukasik, 2007; Neckar, 2018). Obydwa ujęcia modularności są jednak przedmiotem krytyki (Hohol i Wołoszyn, 2016). Od problemów nie jest wolna również sama idea modułu geometrycznego. Jak wskazuję, o ile orientacja przestrzenna wymaga przetwarzania odległości i kierunku, teoria Chenga nie wyjaśnia przetwarzania innej kluczowej własności geometrycznej, jaką jest kąt. Co więcej, w przypadku orientacji przestrzennej hipokamp jest zaangażowany nie tylko w przetwarzanie geometrii, ale również wskazówek lokalnych (Sutton i Newcombe, 2014). O ile wyjaśnianie elementarnych kompetencji geometrycznych człowieka i innych kręgowców w kategoriach wysokopoziomowych procesów poznawczych jest uzasadnione empirycznie (Lee, Spelke, Vallortigara, 2012), to twierzę że modularność nie jest, przynajmniej w tym zakresie, odpowiednim ujęciem architektury poznania.

Wskazuję alternatywne względem modularności ujęcie, w postaci teorii rdzennych (ang. *core*) systemów poznawczych (Spelke et al., 2010). Teoria rdzennych systemów powstała na przecięciu psychologii rozwoju poznawczego i psychologii porównawczej, podkreślając podobieństwa między wyspecjalizowanymi strukturami poznawczymi dzieci (na wczesnych etapach ontogenezy) oraz zwierząt (także dojrzałych). Systemy rdzenne implementowane są w oddzielnych obszarach mózgu i przejawiają działanie zbyt wcześnie w sensie ontogenetycznym, aby mogły być uznawane za rezultat indywidualnego uczenia się, a także występują u wszystkich rozwijających się typowo jednostek ludzkich niezależnie od różnic kulturowych. Jak już wspominałem, współdzielone są one również z niektórymi gatunkami zwierząt. Systemy rdzenne dostarczają organizmom elementarnej wiedzy pojęciowej w dziedzinach takich jak: „naiwna fizyka”, poznanie społeczne oraz matematyczne (zob. Haman i Gut, 2016).

Biorąc pod uwagę powyższe cechy, narzuca się podobieństwo teorii modułów i systemów rdzennych. Wskazują jednak na poważne różnice między nimi. Po pierwsze, w przeciwieństwie do modułów w ujęciu Fodora, systemy rdzenne zaangażowane są nie tylko w przetwarzanie wejściowych informacji percepcyjnych, ale umożliwiają konceptualizację. Pod tym względem systemy rdzenne przypominają więc raczej procesy centralne z Fodorowskiej architektury umysłu lub moduły w sensie psychologii ewolucyjnej. O ile jednak przedstawiciele psychologii ewolucyjnej mają tendencję do niedoszacowywania roli procesów centralnych (zob. Hohol i Wołoszyn, 2016) teoria systemów rdzennych uwzględnia możliwość modyfikacji tych systemów w trakcie ontogenezy. Psychologowie ewolucyjni podkreślają wreszcie, że moduły poznawcze człowieka są stosunkowo nowymi adaptacjami, powstałymi w plejstocenijskich środowiskach ancestralnych. Teoria systemów rdzennych wskazuje natomiast na długi rodowód filogenetyczny tych systemów, co wydaje się znacznie bardziej adekwatne w obliczu licznych wyników psychologii porównawczej (zob. Pisula, 2003; Trojan, 2013).

Pierwsze z pytań wyjaśniających Tinbergena (1963) dotyczy czynników przyczynowych („jak to działa?”). Zgodnie z ustaloną wyżej architekturą poznania, dotyczy ono systemów rdzennych odpowiedzialnych za elementarne zdolności geometryczne. Teoria systemów rdzennych jest w tym względzie dwuczynnikowa (Spelke et al., 2010). Pierwszy z nich to rdzenny system geometrii przestrzennej, zaś drugi to rdzenny system geometrii obiektowej. Pierwszy z nich przetwarza dwie z trzech podstawowych własności geometrycznych: odległość oraz kierunek, co określa jego przydatność w zadaniach wymagających orientacji przestrzennej. Poza zasięgiem systemu geometrii przestrzennej jest natomiast przetwarzanie kątów. W zasięgu reprezentacyjnym drugiego z systemów znajdują się własności takie jak długość i kąt, ale nie kierunek. Stąd też system geometrii obiektowej uczestniczy w zadaniach rozróżniania przedmiotów, ale nie orientacji przestrzennej. Na niezależność obydwu rdzennych systemów geometrycznych u człowieka wskazują badania behawioralne i neuronaukowe. Zgodnie z tymi ostatnimi, system geometrii przestrzennej implementowany jest w formacji hipokampu (Epstein, 2008), zaś geometrii obiektowej w strukturach bocznych potylicznych (Grill-Spector, Kourtzi, Kanwisher, 2001). W szerszej perspektywie, dysocjacja ta spójna jest z teorią dwóch szlaków wzrokowych (Goodale, Króliczak, Westwood, 2005).

Drugie z pytań eksplanacyjnych dotyczy ewolucyjnej adaptatywności elementarnych zdolności geometrycznych. Ponieważ adaptatywność rozróżniania kształtów nie wzbudza wśród

badawczy większych kontrowersji, skupiam się na orientacji przestrzennej opartej na geometrii środowiska. Wskazuję, że za adaptacyjnym charakterem tej strategii przemawia to, że w porównaniu ze wskazówkami lokalnymi, całościowy układ środowiska jest co do zasady mniej podatny na zmiany. Co za tym idzie, wykorzystanie geometrii środowiska jako wskazówki orientacyjnej zwiększa szansę na odnalezienie przez organizm pożądanego miejsca. Badania z zakresu robotyki wskazują ponadto, że orientacja oparta na całościowej geometrii jest mniej kosztowna obliczeniowo niż ciągłe śledzenie własnej pozycji względem wskazówek niegeometrycznych, szczególnie gdy są one liczne i ruchome (Gee, Chekhlov, Calway, Mayol-Cuevas, 2008). Nie oznacza to, że orientacja geometryczna nie pociąga kosztów adaptacyjnych. Błędy rotacyjne, będące w warunkach laboratoryjnych wskaźnikiem wykorzystania geometrii, wydają się jednak mało prawdopodobne w naturze. Co więcej, na co dzień zwierzęta wykorzystują do orientacji także wskazówki pozawzrokowe, chroniące przed ewentualnymi niejednoznacznościami (Hohol, Baran, Krzyżowski, Francikowski, 2017).

Kolejną kwestią jest filogeneza elementarnego poznania geometrycznego. Podobnie jak w przypadku adaptacyjności, ograniczam się tutaj do orientacji przestrzennej opartej na geometrii środowiska. Spelke i wsp. (2010) mówią po prostu o długim rodowodzie tej zdolności. Moim celem jest jednak udzielenie precyzyjniejszej odpowiedzi. Ponieważ ostatni wspólny przodek *Homo sapiens* i gryzoni żył w paleocenie, można wnioskować, że wykorzystanie geometrii środowiska do reorientacji liczy przynajmniej 60–65 mln lat. Błędy rotacyjne wykryto dotychczas zarówno u gatunków spokrewnionych z *H. sapiens* bliżej i dalej niż szczury (Tommasi et al., 2012). Do pierwszej grupy należą np. rezusy, *Macaca mulatta*. Do drugiej ptaki, których ostatni wspólny przodek z naczelnymi żył ok. 320 mln lat temu, oraz ryby (linie ryb i naczelnych oddzieliły się 420–430 mln lat temu). Błędy rotacyjne zaobserwowano np. u ksenotoka, *Xenotoca eiseni* czy kury domowej, *Gallus gallus domesticus*. Warto tu również wspomnieć, że orientacja oparta na geometrii jest niezależna od zadania. Zdezorientowane kury potrafią odnajdywać środek regularnej areny pod nieobecność wskazówek lokalnych oraz przenosić wyuczoną zdolność na inne areny o regularnych kształtach. Analogiczny efekt zaobserwowano również w przypadku innych zwierząt. Do zagadnienia tego wracam w dalszej części autoreferatu, omawiając badanie naszego zespołu (Baran, Krzyżowski, Rádai, Francikowski, Hohol, 2020).

Istnieją również dane wskazujące, choć niejednoznacznie, na zdolność owadów do orientacji opartej na geometrii środowiska. Błędy rotacyjne odkryto dotychczas u mrówki tropikalnej

Gigantiops destructor (Wystrach i Beugnon, 2009), choć efekt ten autorzy wyjaśnili niskopoziomowym mechanizmem dopasowywania obrazów. Biorąc pod uwagę radykalnie różną neuroanatomie owadów i kręgowców, teza, że za błędy rotacyjne u owadów odpowiadają mechanizmy inne niż u kręgowców, jest głęboko uzasadniona. Z drugiej strony, wskazuje się na zdolność całościowego kodowania struktury środowiska przez trzmiele, *Bombus terrestris* (Lee i Vallortigara, 2015), oraz na poważne ograniczenia wyjaśnień niskopoziomowych, takich jak dopasowywanie obrazów, w odniesieniu do zachowań owadów (Baran et al., 2020; Hohol, Baran, et al., 2017).

Ostatnie z Tinbergenowskich (1963) pytań eksplanacyjnych koncentruje się na rozwoju osobniczym. W interesującym mnie kontekście dotyczy ono tego, jak i kiedy w trakcie ontogenezy człowieka na bazie rdzennych systemów geometrii przestrzennej i obiektowej konstruowany jest bardziej kompletny system reprezentacyjny, uwzględniający wszystkie trzy kluczowe własności geometryczne: długość, kierunek i kąt. Jak wskazuję, powstanie takiego systemu wydaje się niezbędne do przyswajania szkolnej geometrii euklidesowej. O ile systemy rdzenne są stare filogenetycznie, wczesne ontogenetycznie i uniwersalne kulturowo, system reprezentacyjny, o którym mowa, powstaje tylko u ludzi, co jest procesem rozciągniętym w czasie i podatnym na wpływy kulturowe. Pierwszym z diskutowanych czynników jest język przestrzenny. Zaobserwowano, że u dzieci w wieku 5–7 lat, wykonanie przez zadań, które wymagają elastycznego łączenia geometrii przestrzennej i obiektowej, przypomina ich wykonanie przez osoby dorosłe. Wiek ten koresponduje z przyswajaniem przez dzieci fraz przestrzennych (Hermer-Vazquez, Moffet, Munkholm, 2001).

Silna wersja tezy o zaangażowaniu języka w rozwój elementarnego poznania geometrycznego zakłada że przyswojenie zasobu ekspresji przestrzennych jest konieczne i wystarczające do konstrukcji nowego systemu reprezentacyjnego (Hermer i Spelke, 1994). Przeciw niej świadczy jednak obserwacja, że niektóre gatunki zwierząt, pomimo braku języka przestrzennego, łączą w zadaniach orientacyjnych geometrię przestrzenną i obiektową (Tommasi et al., 2012). Nie wyklucza to natomiast zaangażowania języka w słabszym rozumieniu, co określane jest jako hipoteza chwilowych interakcji (Landau, Dessalegn, Goldberg, 2010). Mówi ona, że język dostarcza formatu reprezentacji umysłowych, sprzyjającego „przetrwaniu” w pamięci roboczej informacji na temat odległości, kierunku i kąta, a następnie produktywnemu łączeniu tych informacji.

Hipoteza chwilowych interakcji nie wyklucza ważnej roli innych artefaktów w rozwoju zdolności geometrycznych. Artefaktem takim są szkice przypominające mapy. Odnajdowanie miejsca w środowisku wspierane jest przez rdzenny system geometrii przestrzennej. Odczytywanie dwuwymiarowego szkicu możliwe jest natomiast dzięki systemowi geometrii obiektowej. Wykorzystanie szkicu do odnajdowania miejsca wymaga natomiast koordynacji obydwu systemów (Spelke et al., 2010). O ile korzystanie z profesjonalnych map wymaga długotrwałego treningu, dzieci zaczynają z użyciem szkiców sprawnie lokalizować przedmioty ukryte w pewnym miejscu pokoju już około 3. roku życia. Wykonanie takich zadań jest jednak utrudnione, jeśli szkic jest odwrócony, co sugeruje trudności w przetwarzaniu kierunku. Trudności te przewyżczone są wraz z rosnącym doświadczeniem w rotowaniu (zarówno fizycznym, jak i mentalnym) codziennych przedmiotów w trakcie kilku kolejnych lat życia (Landau i Lakusta, 2009). O ile rdzenne systemy poznawcze odpowiadają nie tylko za zdolności percepcyjne, ale też koncepcyjne, dotychczas przedstawione dane nie wyjaśniają przetwarzania profesjonalnych pojęć geometrycznych, charakteryzujących się abstrakcyjnością.

Ucieleśnienie pojęć abstrakcyjnych

W rozdziale 3 „Embodiment and abstraction” odpowiadam na dezyderat D3. Dotyczy on tego, że pojęcia abstrakcyjne, do których należą pojęcia geometryczne, stanowią poważne wyzwanie dla poznania ucieleśnionego, czyli koncepcji, zgodnie z którą ciało i środowisko fizyczne kształtują, lub przynajmniej ograniczają, poznanie. W ramach tej ogólnej koncepcji proponuje się jednak szereg bardziej szczegółowych teorii. Wskazuję, że silna wersja ucieleśnionego poznania (np. Lakoff i Núñez, 2000), zgodnie z którą system sensoryczno-motoryczny odpowiada zarazem za przetwarzanie pojęć jako nośnik, jak i za ich treść, jest trudna do utrzymania. Nie oznacza to jednak konieczności powrotu do ujęcia amodalnego. Wskazuję, że umiarkowana wersja ucieleśnienia dostarcza przekonującego wyjaśnienia dla myślenia abstrakcyjnego. Choć korzenie tej koncepcji mają długą tradycję – sięgając do prac Wygotskiego (1934/1989) i Paivio (1986) – we współczesnej wersji zakłada ona, że chociaż struktury sensoryczno-motoryczne są zaangażowane w przetwarzanie wszystkich pojęć, treść pojęć, szczególnie tych abstrakcyjnych, ma źródło przede wszystkim w zinternalizowanych doświadczeniach językowych. Odpowiadając na dezyderat D3, wskazuję, że poznanie abstrakcyjne możliwe jest dzięki językowi naturalnemu, a konkretnie dzięki społecznym (komunikacyjnym) oraz obliczeniowym (kombinatorycznym) własnościom języka.

Ze względu na odniesienie tradycyjnie rozróżnia się pojęcia na konkretne, których desygnaty są łatwo dostępne percepcyjnie i motorycznie, np. „owad” czy „drzewo”, i pojęcia abstrakcyjne, w przypadku których trudno jest wskazać fizyczne przedmioty, np. „punkt”, „nadzieja”. Jak wskazałem wcześniej, jedną z konsekwencji „rewolucji poznawczej” było założenie o amodalności poznania. Zgodnie z nim, pojęcia są *quasi*-językowymi symbolami umysłowymi, które przetwarzane są na podstawie ich własności syntaktycznych przez systemy mózgowo inne niż sensomotoryczne. Co istotne, w ujęciu klasycznym dotyczy to zarówno pojęć konkretnych, jak i abstrakcyjnych. Jak wskazuję, pojęcia były rozumiane w sposób amodalny nawet we wczesnej wersji słynnej teorii wyobraźni Kosslyna (1980), ponieważ zasoby konieczne do wygenerowania analogowych obrazów umysłowych przechowywane są w pamięci długotrwałej jako symbole *quasi*-językowe, zwane „reprezentacjami głębokimi” (por. Francuz, 2007). Założenie o amodalności poznania zostało skrytykowane m.in. przez Harnada (1990), który wskazał na tzw. problem ugruntowania symboli (ang. *symbol grounding problem*). Co więcej, o ile podejście amodalne było spójne z komputerową metaforą umysłu, przyjmowaną we wczesnej psychologii poznawczej, czy w ogóle kognitywistyce, z czasem uznane zostało za nierealistyczne neurobiologicznie. Rozwiązania obydwu powyższych problemów dostarczają teorie ucieleśnionego poznania, wskazujące, że reprezentacje przedmiotów i zdarzeń ugruntowane są bezpośrednio w doświadczeniu poprzez reaktywacje (symulacje), obejmujące obszary mózgu związane z różnymi modalnościami percepcyjnymi, motoryką oraz afektem, które uczestniczyły w przyswojeniu danego pojęcia.

Idea ucieleśnionego poznania ma długą tradycję (zob. Hohol, 2013; także moje wcześniejsze uwagi na temat Piageta) i dziś znalazła zastosowanie w wielu dziedzinach psychologii, od poznania społecznego (Winkielman i Niedenthal, 2009), po poznanie numeryczne (Hohol, Wołoszyn, Nuerk, Cipora, 2018). Uszczegóławiana jest ona jednak na różne, nie zawsze dające się ze sobą pogodzić sposoby. Do najbardziej wpływowych psychologicznych teorii ucieleśnienia należy teoria symboli percepcyjnych Barsalou (1999). Najogólniej mówiąc zakłada ona, że przetwarzanie pojęć opiera się na reaktywacjach (symulacjach) sensoryczno-motorycznych obszarów mózgu, aktywnych podczas cielesnych doświadczeń egzemplarzy danej kategorii. Istotne jest to, że treść pojęć ugruntowana jest w doświadczeniu (zob. Francuz, 2011). Teoria symboli percepcyjnych zyskała dobre potwierdzenie w danych behawioralnych i neuroobrazowych (zob. Pulvermüller, Hauk, Nikulin, Ilmoniemi, 2005). Wielu badaczy, w tym również Barsalou, zaznacza jednak, że przetwarzanie pojęć abstrakcyjnych stanowi największe wyzwanie dla idei ucieleśnienia, ponieważ wykraczają one poza bezpośrednie

doświadczenie percepcyjno-motoryczne. O ile już Piaget i Inhelder (1948/1967) twierdzili, że „relacja równości bazuje na działaniu wyrównywania, koncepcja prostej wywodzi się z działania polegającego na podążaniu ręką lub wzrokiem bez zmiany kierunku, a kąta z dwóch przecinających się ruchów” (s. 43), trudno wyobrazić sobie, by doświadczenia te wyczerpywały całą treść pojęć geometrycznych. Przykładowo, w przypadku prostej chodzi bowiem o krzywą, która nie jest ograniczona z obydwu stron, a jej promień krzywizny jest nieskończony w każdym punkcie (czy też, zgodnie ze słowami Euklidesa, o coś, co charakteryzuje się długością, ale nie szerokością).

O ile problem ugruntowania symboli dotyczy teorii amodalnych, ucieleśnienie napotyka na problem nieugruntowania symboli (Dove, 2014). W związku z tym dyskutuję trzy teorie silnego ucieleśnienia, aspirujące do rozwiązania problemu przetwarzania pojęć abstrakcyjnych. Przez silne ucieleśnienie rozumiem tezę, zgodnie z którą pojęcia są w pełni zależne od systemu sensoryczno-motorycznego, rozumianego zarówno jako nośnik, jak i źródło treści (Meteyard, Cuadrado, Bahrami, Vigliocco, 2012). Pierwsza z teorii silnego ucieleśnienia wywodzi się od Barsalou (1999) i wskazuje, że o ile w przypadku pojęć konkretnych reaktywacje sensoryczno-motoryczne dotyczą cech fizycznych obiektów, w przypadku pojęć abstrakcyjnych reaktywowany jest społeczny kontekst przyswajania pojęcia. Barsalou pomija jednak szczegóły działania takiego mechanizmu „społecznych reaktywacji”. Co więcej, o ile doświadczenie społeczne może być kluczowe dla ugruntowania abstrakcyjnych pojęć z dziedziny społecznej, takich jak np. „demokracja” (Borghini i Binkofski, 2014), wydaje się ono zbyt wieloznaczne dla ugruntowania treści pojęć matematycznych.

Druga teoria silnego ucieleśnienia koncentruje się wokół metafor pojęciowych. Zakłada ona, że wszystkie pojęcia abstrakcyjne powstają na bazie ugruntowanych sensoryczno-motorycznie pojęć konkretnych za pośrednictwem metafor pojęciowych. Teoria ta została zaaplikowana bezpośrednio do dziedziny poznania matematycznego przez Lakoffa i Núñeza (2000), przy czym o ile badacze ci wyjaśniają genezę i przetwarzanie pojęć z wielu działów matematyki (zob. Brożek i Hohol, 2014), o tyle geometrię pomijają niemal całkowicie. Co więcej, jak pokazuję, teoria metafor uwikłana jest w szeregu problemów. Większość opisów odwzorowań między dziedzinami pojęciowymi, także w przypadku aplikacji do matematyki, bazuje jedynie na obserwacji użycia języka, a nie na danych eksperymentalnych. Co więcej teoria metafor traktuje język epifenomenalnie, ignorując jego rolę w kształtowaniu abstrakcyjnego myślenia.

Wreszcie, jak zauważa Jerzy Pogonowski (2017), Lakoff i Núñez (2000) niekiedy używają pojęć matematycznych w niewłaściwy sposób, a także zaniedbują ich historyczną genezę.

Kolejna perspektywa silnego ucieleśnienia pojęć to tzw. hipoteza indeksowania (Glenberg i Kaschak, 2002). Zakłada ona, że przetwarzanie zdań, także zawierających pojęcia abstrakcyjne, obejmuje przyporządkowanie słów do symboli percepcyjnych w sensie Barsalou (1999), aktywację wiedzy na temat związanych z nimi schematów działania (czy też afordancji, w sensie bliskim Gibsonowskiej psychologii ekologicznej), a wreszcie produktywne łączenie tej wiedzy zgodnie ze strukturą gramatyczną zdania. O ile uwzględnienie roli gramatyki w przetwarzaniu abstrakcji jest krokiem w dobrą stronę, o tyle również ta teoria nie jest wolna od problemów. Schematy działania wydają się zbyt mało zróżnicowane, by gruntować bardzo różne znaczeniowo pojęcia. Co więcej, podobnie jak w przypadku idei Piageta i Inhelder (1948/1967), schematy te wydają się zbyt wieloznaczne, by wspierać precyzyjne pojęcia matematyczne. Wreszcie, mający wspierać hipotezę indeksowania efekt spójności działania ze zdaniem (ang. *action-sentence compatibility effect*) okazuje się być trudny do replikacji (Papesh, 2015).

Wskazuję wreszcie, że wszystkie omówione wyżej teorie – reaktywacji społecznych, metafor i indeksowania – napotykają na jeszcze jeden problem. Wszystkie one zakładają kluczową rolę systemu percepcyjno-motorycznego dla przetwarzania pojęć abstrakcyjnych. Założenie to jest niespójne z wynikami licznych badań behawioralnych, neuropsychologicznych, psychofizjologicznych i neuroobrazowych, przeprowadzonych z wykorzystaniem rozmaitych zadań (zob. Meteyard et al., 2012; Shallice i Cooper, 2013). W psychologii zaproponowano szereg, do pewnego stopnia korelujących ze sobą, miar konkretności/abstrakcyjności. W podejściu kanonicznym, konkretność utożsamia się z łatwiejszą, zaś abstrakcyjność z trudniejszą wyobrażalnością obiektu, co przejawia się w krótszych czasach reakcji podczas przetwarzania pojęć konkretnych (tzw. efekt konkretności; Paivio, 1986). Współcześnie wskazuje się również na zróżnicowane podłoże mózgowie przetwarzania obydwu typów pojęć. Metaanaliza danych neuroobrazowych pokazuje większe zaangażowanie systemu percepcyjno-motorycznego przy przetwarzaniu pojęć konkretnych oraz werbalnego przy przetwarzaniu pojęć abstrakcyjnych (Wang, Conder, Blitzer, Shinkareva, 2010). Nowsze badania podkreślają również większe zaangażowanie asocjacyjnych struktur mózgu w przetwarzanie pojęć abstrakcyjnych, w porównaniu z pojęciami konkretnymi (Shallice i Cooper, 2013). Dotyczy to również weryfikacji zdań opisujących prawidłowości matematyczne, w szczególności

z zakresu geometrii euklidesowej, np. „dowolny trójkąt równoboczny można podzielić na dwa trójkąty prostokątne” (Amalric i Dehaene, 2019).

Problemy teorii ucieleśnionego poznania w wersji silnej oraz różnice w przetwarzaniu pojęć konkretnych i abstrakcyjnych (matematycznych i innych) nie oznaczają jednak, że ucieleśnienie powinno zostać całkowicie porzucone na rzecz tradycyjnego podejścia amodalnego. Broniona przeze mnie umiarkowana teoria ucieleśnionego poznania zakłada, że pojęcia przetwarzane są częściowo poprzez reaktywacje sensoryczno-motoryczne w sensie Barsalou (1999), jednak treść pojęć abstrakcyjnych w większym stopniu niż pojęć konkretnych zależy od kodu językowego (Borghini i Binkofski, 2014; Dove, 2014; Meteyard et al., 2012). Język – przy czym nie chodzi tu o hipotetyczny „język myśli” Fodora (1975), ale język naturalny – wzbogaca ucieleśnione poznanie o nowe funkcje. Wskazuję, że takie podejście unika zarówno problemu ugruntowania symboli (ponieważ pojęcia częściowo ugruntowane są w percepcji i działaniu), jak i problemu nieugruntowania symboli (ponieważ dzięki reprezentacjom językowym treść pojęć wykraczać może poza bezpośrednie doświadczenie).

Teoria ta nawiązuje do dobrze znanej koncepcji Wygotskiego (1934/1989) na temat języka jako „rusztowania” dla myśli. Badacz ten podkreślał rolę przyswajania oraz internalizacji języka – zarówno jego semantyki, jak i syntaktyki – we wspieraniu dalszego rozwoju poznawczego. Wskazuję, że koresponduje to ze współczesną tezą, że ze względu na publiczną dostępność, podatność na transmisję kulturową, oraz sprawczość, język stanowi środek konstrukcji tzw. nisz poznawczych, wspierających procesy poznawcze jednostek, a nawet umożliwiających nowe formy myślenia. Nisze poznawcze są strukturami złożonymi ze wchodzących ze sobą w interakcje osób i artefaktów poznawczych (Clark, 2006), co sprawia, że są one formami rozszerzonego, a nawet rozproszonego poznania (Miłkowski et al., 2018; Rączaszek-Leonardi, 2009). Artefaktami poznawczymi są natomiast wytwory kulturowe człowieka, pełniące funkcję reprezentacyjną, a przez to wpływające na efektywność poznawczą (Norman, 1991). Dzieje się tak w przypadku przekraczania ograniczeń rdzennych systemów poznania geometrycznego dzięki „wprawie” w używaniu języka przestrzennego oraz szkiców przestrzennych. W ogólniejszej perspektywie wpływ artefaktów poznawczych może polegać na ułatwianiu uczenia się, wspieraniu pamięci roboczej i rozdzielania uwagi, a przez to kontroli nad złożonymi myślami (Clark, 2006).

Wskazuję, że język naturalny, zarówno pisany, jak i mówiony, uznać można za artefakt poznawczy nie tylko ze względu na własności komunikacyjne, na co szczególny nacisk kładą Borghi i Binkofski (2014), ale również ze względu na jego własności obliczeniowe. Należą do nich: arbitralność (czyli niezależność słów od przedmiotu odniesienia; pomijam onomatopeje), niezależność od bodźców (która zapewnia swobodę ekspresji) oraz kompozycyjność i rekombinowalność (gramatyka jest generatywna, przez co umożliwia elastyczne manipulowanie symbolami). Ze względu na powyższe własności język naturalny – gdy zostanie już przyswojony i zinternalizowany przez jednostkę – staje się kodem reprezentacyjnym dla pojęć abstrakcyjnych, które wykorzystywane mogą być systematycznie w ścisłych rozumowaniach (Dove, 2014). Własności te sprawiają, że język naturalny przypomina hipotetyczny, ale jak już wspomniałem nierealistyczny neurobiologicznie, „język myśli” Fodora (1983).

Zarysowana koncepcja inspirowana jest również teorią podwójnego kodowania Paivio (1986), zgodnie z którą w przetwarzaniu pojęć uczestniczą dwa systemy reprezentacyjne: wyobrażeniowy, kodujący doświadczenia w formacie percepcyjnym („imageny”), oraz werbalny, przetwarzający reprezentacje amodalne („logogeny”). Pomędzy koncepcjami Paivio a zarysowaną wyżej istnieją jednak poważne różnice. Pierwsza z nich stanowić miała rozwiązanie toczącego się w psychologii poznawczej w latach siedemdziesiątych i osiemdziesiątych sporu o format reprezentacji umysłowych. W związku z tym w kwestii kodu niewerbalnego kładzie ona nacisk na obrazy umysłowe. Wyżej zarysowana koncepcja umiarkowanego ucieleśnienia opiera się natomiast na dobrze ugruntowanej empirycznie teorii symboli percepcyjnych (Barsalou, 1999), która kładzie nacisk na wielomodalne ugruntowanie pojęć. Treść pojęć abstrakcyjnych bardziej niż w przypadku pojęć konkretnych zależna jest od zinternalizowanego języka. Kod językowy odgrywa również ważną rolę w hierarchicznej organizacji pojęć, przez co wydaje się zaangażowany również w reprezentowanie obiektów konkretnych (zob. Maruszewski, 1984). O zaangażowaniu mechanizmu reaktywacji w przetwarzanie językowe świadczy to, że zarówno planowanie, ekspresja i rozumienie fraz angażują połączenia okolicy szczeliny bocznej (lewej) i struktur motorycznych oraz percepcyjnych (Pulvermüller et al., 2005). Wskazałem dotąd, że dzięki językowi naturalnemu możliwe jest przetwarzanie pojęć abstrakcyjnych i wykorzystywanie ich w rozumowaniach. Nie wyjaśnia to jednak genezy specyficznych własności rozumowań geometrycznych.

Poznawcze podstawy dowodu geometrycznego

W rozdziale 4 zatytułowanym „Cognitive artifacts and Euclid: Diagrams and formulae” zajmuję się poznawczymi uwarunkowaniami dowodu geometrycznego, a co za tym idzie odpowiadam na dezyderat D4. Dowody geometryczne cechują się obecnością wyników, które następują po sobie w sposób konieczny, oraz ogólnością uzyskanych rezultatów. Wyjaśnienie genezy tych własności wymaga wyjścia poza czynniki indywidualne i uwzględnienia niszy poznawczej, powstałej dzięki systematycznemu wykorzystaniu geometrycznych artefaktów poznawczych w specyficznych warunkach kulturowych (Hohol i Miłkowski, 2019). Jak wskazałem wcześniej, język przestrzenny oraz szkice przypominające mapy pozawalają przekroczyć w trakcie ontogenezy ograniczenia elementarnego poznania geometrycznego, tj. takiego, które opiera się na działaniu rdzennych systemów poznawczych. W trakcie historycznego rozwoju geometrii opracowane zostały jednak wyrafinowane pod względem własności obliczeniowych formy artefaktów poznawczych geometrii: profesjonalny język geometrii oraz oznaczone literami diagramy. Te ostatnie nie są zwykłymi szkicami czy rysunkami pomocniczymi, ale dzięki oznaczeniom literowym stanowią integralną część wywodu geometrycznego, wyrażonego w języku profesjonalnym. Stosowanie tych artefaktów sprzyjało współpracy między jednostkami i ograniczało dowolność procedur dowodowych, przyczyniając się do postrzegania ich wyników jako koniecznych i ogólnych. W przeciwieństwie do wcześniejszych fragmentów książki, które korzystały przede wszystkim z wyników badań eksperymentalnych nad współczesną formą poznania geometrycznego, tutaj skupiam się na historii poznawczej, czyli dziedzinie znajdującej się na przecięciu nauk o poznaniu i historii nauki (Netz, 1999). Wskazuję jednak, że ustalenia te są istotne dla lepszego rozumienia współczesnej formy geometrii euklidesowej, z którą stykamy się w szkołach.

Choć przyswajanie i internalizacja języka naturalnego umożliwiają operowanie pojęciami abstrakcyjnymi i wykorzystywanie ich w rozumowaniach, to jednak język naturalny podatny jest na niejednoznaczność. Rozumowania geometryczne mają być natomiast ścisłe. Oznacza to, że kolejne inferencje powinny następować z konieczności, a osiągnięte na tej drodze wyniki powinny być ogólne, czyli prawdziwe w nieskończonej liczbie analogicznych przypadków. Tradycyjnie przyjmuje się, że własności te mają genezę w wykorzystaniu sztucznej notacji – profesjonalnego symbolizmu matematycznego (Cajori, 1928). Geometria euklidesowa rozwinęła się i była uprawiana jednak przez wiele stuleci bez wykorzystania symboli matematycznych, znanych z matematyki nowożytnej i współczesnej. W analogicznej formie wprowadzana jest również na wczesnych etapach współczesnej edukacji. Co więcej, niekiedy

podkreśla się, że najważniejszym greckim wynalazkiem matematycznym, osiągniętym pomimo braku sztucznej notacji, była idea dowodu (zob. Merzbach i Boyer, 2011).

Wskazuje się, że poznawcze źródła dowodu geometrycznego tkwią w specyficznym na tle innych kultur, które rozwinęły matematykę, wykorzystaniu zdolności wzrokowoprzestrzennych oraz językowych przez starożytnych matematyków greckich. Szczególną rolę odegrało powstanie oraz upowszechnienie dwóch artefaktów poznawczych, które w pewnej formie wykorzystywane są również we współczesnej edukacji matematycznej. Artefaktami tymi są diagram, którego punkty oznaczone są literami (Netz, 1998), oraz profesjonalny język geometryczny, który od języka codziennego odróżniają ograniczony leksykon oraz liczba kombinacji elementów (Netz, 1999). Diagramy i profesjonalny język okazały się użyteczne nie tylko w indywidualnej praktyce geometrycznej, ale stanowiły publiczne dostępne zasoby, umożliwiające jednostkom wchodzenie w interakcje, wspólne rozpoznawanie problemów, wzajemną kontrolę prób ich rozwiązania, a jeśli zachodziła taka potrzeba, korektę pomyłek. Jak zauważają Tylén, Fusaroli, Bjørndahl, Rączaszek-Leonardi, Østergaard i Stjernfelt (2014), dzięki dostępnym publicznie formatom reprezentacyjnym grupy mogą osiągać jako całość lepsze wyniki niż składające się na nie pojedyncze jednostki. Co więcej, diagramy i profesjonalny język sprzyjały przekazowi wiedzy matematycznej zarówno w sensie synchronicznym, jak i diachronicznym. Można więc powiedzieć, że diagramy i profesjonalny język były fundamentami niszy poznawczej, w sensie zaproponowanym przez Clarka (2006), wspierającej praktyki matematyczne.

Choć we współczesnej matematyce uniwersyteckiej zazwyczaj przyjmuje się, że diagramy mogą odgrywać najwyżej rolę rysunków pomocniczych względem rozumowania wyrażonego w (sztucznej) notacji symbolicznej, w tradycyjnej geometrii euklidesowej diagramy stanowiły pełnoprawne komponenty dowodu (zob. Wójtowicz, 2012). Przykładowo, wyobrazić sobie można, że o ile usunięcie diagramów ze słynnego dzieła *Grundlagen der Geometrie* Hilberta z 1899 r. nie wpłynęłoby na prawdziwość przedstawionych w nim dowodów, o tyle analogiczny zabieg zastosowany w przypadku *Elementów* Euklidesa sprawiłby, że dowody straciłyby kompletność. Rekonstrukcja wielu diagramów wprowadzonych do „Elementów” na podstawie samego tekstu jest niemożliwa (Netz, 1998). Diagramy są ponadto niezastąpionym narzędziem synoptycznego wglądu w strukturę problemu geometrycznego, o czym decyduje „zwartość” reprezentowanych informacji (Larkin i Simon, 1987). Są one również podatne na manipulację,

w wyniku której ujawnione mogą zostać nowe aspekty problemu (Tylén, Fusaroli, Bjørndahl, Rączaszek-Leonardi, Østergaard i Stjernfelt, 2014).

Wskazuję, że o roli greckich diagramów w rozwoju praktyk dowodowych w matematyce decydowała nie precyzja rysowania (zachowywały one własności topologiczne, ale już niekoniecznie metryczne), ale ściśle powiązanie szkicu z tekstową warstwą wyводу. Umożliwiającym to środkiem było oznaczanie punktów diagramu literami. O ile samo wykorzystanie diagramów nie jest wynalazkiem specyficznym greckim, oznaczanie ich literami już tak (Cajori, 1928; Merzbach i Boyer, 2011). Oznaczenie diagramów literami służyło pierwotnie sprawniejszej komunikacji między geometrami (bez konieczności każdorazowego wskazywania palcem lub narzędziem określonego obszaru), jednak z czasem wynalazek ten zyskał nowe funkcje. Struktura każdego diagramu geometrycznego obecnego w *Elementach* Euklidesa, podobnie jak tych zawartych we współczesnych szkolnych podręcznikach matematyki, jest kombinacją dwóch elementów: ciągłego szkicu oraz dyskretnych oznaczeń literowych. Od strony zasobów poznawczych, diagramy wykorzystują więc zarówno zdolności wzrokowoprzestrzenne, jak i językowe. Litery odnoszą konkretne punkty diagramu do tekstowej części wyводу. Dzięki temu zabiegowi jednoznaczność szkicu nie jest wymagana, a czasem nawet pożądana, gdyż za każdym razem interpretacja szkicu ograniczana jest przez tekst.

Drugim artefaktem poznawczym greckiej geometrii był profesjonalny język, składający się z leksykonu obejmującego ok. 200 słów zorganizowanych wedle zasady „jedno pojęcie, jedno słowo”, co eliminuje nieścisłości języka codziennego. Co równie ważne, elementy tego leksykonu nie tworzyły dowolnych kombinacji, zestawiane były ze sobą w zestawie obejmującym ok. 200 formuł (Netz, 1999). Sam termin „formuła” odnosi się w interesującym mnie kontekście do dobrze ustalonego ciągu słów, używanego w powtarzalny sposób. Występowanie wspomnianych 200 formuł zaobserwowano nie tylko w *Elementach* Euklidesa, ale także w innych greckich traktatach matematycznych. Oprócz geometrii, w świecie greckim język formularny stosowano również w poezji epickiej ze względu na własności mnemotechniczne. Choć własności mnemotechniczne wydają się istotne dla kumulatywnego rozwoju geometrii, o statusie formuł jako artefaktu poznawczego, wspierającego przeprowadzanie rozumowań dedukcyjnych, decyduje przede wszystkim ich hierarchiczność i podatność na manipulację. Przykładowo, tzw. formuły konstrukcyjne i predykatywne są zbudowane z formuł obiektowych; formuły argumentacyjne zaś z formuł

konstrukcyjnych. Istnieją również formuły wyższego rzędu, stanowiące dyspozycję dla intersubiektywnej kontroli poprawności rozumowań oraz postrzegania operacji jako koniecznych, a ich rezultatów jako ogólnych. Wiele formuł, np. predykatywnych, okazuje się być podatna na podstawianie dowolnych formuł obiektowych, przez co mówić można o obecności zmiennych. Wszystko to sprawia, że profesjonalny język greckiej geometrii ma własności przypominające gramatykę generatywną w sensie Chomsky’ego (1982).

W matematyce greckiej brakowało praktycznych środków „odgórnej narzucania” standardów, w tym dowodowych czy notacyjnych. Geometry byli zazwyczaj samoukami, tworzącymi nietrwale „grupy badawcze”, zawiązywane na potrzeby rozwiązywania aktualnych problemów. Początkowo elementarne zdolności poznania geometrycznego wspierane były jedynie przez język naturalny, jednak z czasem swoboda jego użycia ulegała ograniczeniu. Formuły rozprzestrzeniały się ze względu na ich własności obliczeniowe i mnemotechniczne wśród matematyków. Z czasem na bazie języka formularnego powstały inne elementy niszy poznawczej, wspierającej praktyki geometryczne – mam tu na myśli w szczególności powtarzalną, tj. zawierającą zawsze te same elementy, strukturę argumentacji geometrycznej. Podobnie jak w przypadku oznaczania punktów diagramów za pomocą liter, tak również język formularny wyrósł z przede wszystkim ze względów praktycznych, z czasem umożliwiając jednak praktyki dedukcyjne. Taki scenariusz powstania profesjonalnego języka geometrii bez odgórnej regulacji koresponduje z koncepcją „symboli jako ograniczeń” (Rączaszek-Leonardi, 2009).

Mimo że rozdział 4 wykorzystuje perspektywę historii poznawczej, ograniczonej zresztą tylko do początków geometrii euklidesowej, podkreślam jego potencjalną użyteczność w badaniach nad współczesną formą poznania geometrycznego. Choć współczesne podręczniki szkolne różnią się znacznie od *Elementów*, materiał geometryczny prezentowany jest nadal w formie kombinacji diagramów i tekstu. O ile, jak już wcześniej wspomniałem, badania nad rozumowaniami z wykorzystaniem diagramów mają w psychologii poznawczej długą tradycję (Anderson et al., 1985; Greeno, 1978; Koedinger i Anderson, 1990; Larkin i Simon, 1987), i prowadzone są również współcześnie (zob. Tylén et al., 2014), o tyle dalsze badania empiryczne powinny skoncentrować się w większym niż dotychczas stopniu na komponencie tekstowym. Z pewnością w przypadku dzisiejszej szkolnej matematyki nie można mówić o formułach językowych w sensie takim jak podałem powyżej, jednak wpływ ograniczenia dowolności ekspresji językowych na przyswajanie geometrii i efektywność w rozwiązywaniu

zadań wydaje się być tematem wartym eksploracji w badaniach z pogranicza psychologii edukacyjnej, lingwistyki i psychologii poznawczej.

Uwagi końcowe

W ostatniej części książki („Conclusions and future directions for research”) podsumowuję cały wywód i wskazuję ograniczenia obecnego stanu wiedzy, proponując jednocześnie kierunki dalszych badań. Jeśli chodzi o ograniczenia, zwracam uwagę, że przede wszystkim mózgowe podłoże poznania geometrycznego na poziomie wyższym niż elementarny przebadane jest znacznie słabiej niż w przypadku liczb. Pierwsze kroki na tej drodze zostały już postawione (Amalric i Dehaene, 2019), jednak wiedza na temat zaangażowania poszczególnych struktur mózgu w przetwarzanie numeryczne jest znacznie bardziej zaawansowana (zob. np. Dehaene i Brannon, 2011). Kolejne badania powinny skoncentrować się na podobieństwach i różnicach w przetwarzaniu – zarówno w terminach behawioralnych, jak i neuronaukowych – geometrii przez dzieci i osoby dorosłe, użytkowników geometrii nieformalnej i sformalizowanej (aksjomatycznej), a także geometrii euklidesowej i systemów nieeuklidesowych. Choć zgodnie z klasycznym podziałem pojęć na konkretne i abstrakcyjne, pojęcia geometryczne zaliczane są do drugiej z kategorii, to jednak badania wskazują, że abstrakcje nie są zbiorem jednorodnym (Vigliocco, Vinson, Druks, Barber, Cappa, 2011). Kolejne badania powinny wskazać podobieństwa i różnice między pojęciami geometrycznymi a innymi abstrakcjami (np. „sprawiedliwość”, „elektron”) w różnych wymiarach teoretyczno-empirycznych.

W porównaniu z zaawansowanymi przejawami poznania geometrycznego przetwarzanie elementarnej geometrii jest zagadnieniem znacznie lepiej przebadanym. Zgodnie z obecnym stanem wiedzy teza, że bardziej wyrafinowane zdolności w zakresie geometrii bazują w pewnym stopniu na rdzennych systemach poznawczych (które omówiłem z rozdziale 2), wydaje się godna przyjęcia. Kolejne studia, począwszy od behawioralnych po neuronaukowe, powinny jednak – wzorem badań nad poznawczym przetwarzaniem liczb (Cipora et al., 2016; Hohol et al., 2020) – rozstrzygnąć, na ile trening ekspercki w zakresie geometrii i zdolności przestrzennych modyfikuje funkcjonowanie rdzennych systemów poznania geometrycznego. Jeśli chodzi o rdzenne systemy geometrii, pomimo dużej bazy wiedzy, wciąż pozostają pytania domagające się odpowiedzi. Przykładowo, nie ma zgody, jak głęboko sięgają ich filogenetyczne korzenie. Rozstrzygnięcie tego zagadnienia wymaga dalszych badań z zakresu psychologii porównawczej (w tym względzie zob. nasze badanie Baran et al., 2020, które przedstawiam w dalszej części autoreferatu). Dalsze badania powinny wyjść poza

„wizjocentryzm”, uwzględniając w większym stopniu niewzrokowe podstawy elementarnych zdolności geometrycznych (Hohol, Baran, et al., 2017).

Literatura cytowana

- Amalric, M., Dehaene, S. (2019). A distinct cortical network for mathematical knowledge in the human brain. *NeuroImage*, 189, 19–31.
<https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2019.01.001>
- Anderson, J. R., Boyle, C. F., Yost, G. (1985). The geometry tutor. *Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence*. Los Angeles: IJCAI.
- Baran, B., Krzyżowski, M., Rádai, Z., Francikowski, J., Hohol, M. (2020). Layout symmetry facilitates spatial learning in the house cricket, *Acheta domesticus*, in the absence of visual cues. *BioRxiv (Preprint)*. <https://doi.org/10.1101/2019.12.28.886655>
- Barsalou, L. W. (1999). Perceptual symbol systems. *Behavioral and Brain Sciences*, 22(4), 577–660. <https://doi.org/10.1017/S0140525X99002149>
- Borghini, A. M., Binkofski, F. (2014). *Words as social tools: An embodied view on abstract concepts*. New York: Springer.
- Brożek, B., Hohol, M. (2014). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press.
- Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. Oxford: Macmillan.
- Cajori, F. (1928). *A history of mathematical notations*. London: Open Court.
- Cheng, K. (1986). A purely geometric module in the rat’s spatial representation. *Cognition*, 23(2), 149–178. [https://doi.org/10.1016/0010-0277\(86\)90041-7](https://doi.org/10.1016/0010-0277(86)90041-7)
- Chomsky, N. (1982). *Zagadnienia teorii składni*. Warszawa: Ossolineum.
- Cipora, K., Hohol, M., Nuerk, H.-C., Willmes, K., Brożek, B., Kucharzyk, B., Nęcka, E. (2016). Professional mathematicians differ from controls in their spatial-numerical associations. *Psychological Research*, 80(4), 710–726. <https://doi.org/10.1007/s00426-015-0677-6>
- Clark, A. (2006). Language, embodiment, and the cognitive niche. *Trends in Cognitive Sciences*, 10(8), 370–374. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2006.06.012>
- Clements, D. H., Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. W: D. A. Grouws (red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (ss. 420–464). New York: Information Age Publishing.
- Dębiec, J. (2002). *Mózg i matematyka*. Tarnów: Biblos.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense* (wyd. poprawione). Oxford: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Brannon, E. M. (red.). (2011). *Space, time and number in the brain*. Amsterdam: Academic Press.

- Dove, G. (2014). Thinking in words: Language as an embodied medium of thought. *Topics in Cognitive Science*, 6(3), 371–389. <https://doi.org/10.1111/tops.12102>
- Duch, W. (2002). Geometryczny model umysłu. *Kognitywistyka i Media w Edukacji*, 6, 199–230.
- Epstein, R. A. (2008). Parahippocampal and retrosplenial contributions to human spatial navigation. *Trends in Cognitive Sciences*, 12(10), 388–396. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.07.004>
- Fodor, J. A. (1975). *The language of thought*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Fodor, J. A. (1983). *The modularity of mind*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Francuz, P. (2007). Teoria wyobraźni Stephena Kosslyna. Próba reinterpretacji. W: P. Francuz (red.), *Obrazy w umyśle. Studia nad percepcją i wyobraźnią* (ss. 149–189). Warszawa: Scholar.
- Francuz, P. (2011). Wyobrażeniowa natura pojęć. W: J. Bremer, A. Chuderski (red.), *Pojęcia. Jak reprezentujemy i kategoryzujemy świat* (ss. 231–246). Kraków: Universitas.
- Gärdenfors, P. (2014). *The geometry of meaning: Semantics based on conceptual spaces*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Geary, D. C., Berch, D. B., Ochsendorf, R., Koepke, K. M. (red.). (2017). *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts*. Amsterdam: Academic Press.
- Gee, A. P., Chekhlov, D., Calway, A., Mayol-Cuevas, W. (2008). Discovering higher level structure in visual SLAM. *IEEE Transactions on Robotics*, 24(5), 980–990. <https://doi.org/10.1109/Tro.2008.2004641>
- Gelernter, H. (1963). Realization of a geometry-theorem proving machine. W: E. Feigenbaum, J. Feldman (red.), *Computers and thought* (ss. 134–153). New York: McGraw Hill.
- Gilmore, C. K., Göbel, S. M., Inglis, M. (2018). *An introduction to mathematical cognition*. New York: Routledge.
- Glenberg, A. M., Kaschak, M. P. (2002). Grounding language in action. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9(3), 558–565. <https://doi.org/10.3758/BF03196313>
- Goodale, M. A., Króliczak, G., Westwood, D. A. (2005). Dual routes to action: Contributions of the dorsal and ventral streams to adaptive behavior. *Progress in Brain Research*, 149, 269–283. [https://doi.org/10.1016/S0079-6123\(05\)49019-6](https://doi.org/10.1016/S0079-6123(05)49019-6)
- Greeno, J. G. (1978). A study of problem-solving. *Advances in Instructional Psychology*, 1, 13–75.
- Grill-Spector, K., Kourtzi, Z., Kanwisher, N. (2001). The lateral occipital complex and its role

- in object recognition. *Vision Research*, 41(10–11), 1409–1422. [https://doi.org/10.1016/S0042-6989\(01\)00073-6](https://doi.org/10.1016/S0042-6989(01)00073-6)
- Gruszczyk-Kolczyńska, E., Zielińska, E. (1997). *Dziecięca matematyka*. Warszawa: WSiP.
- Hadamard, J. (1964). *Psychologia odkryć matematycznych*. Warszawa: PWN.
- Haman, M., Gut, A. (2016). Wiedza wrodzona. W: J. Bremer (red.), *Przewodnik po kognitywistyce* (ss. 681–712). Kraków: WAM.
- Harnad, S. (1990). The symbol grounding problem. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 42(1–3), 335–346. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90087-6](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90087-6)
- Henik, A. (red.). (2016). *Continuous issues in numerical cognition*. London: Academic Press.
- Hermer-Vazquez, L., Moffet, A., Munkholm, P. (2001). Language, space, and the development of cognitive flexibility in humans: the case of two spatial memory tasks. *Cognition*, 79(3), 263–299. [https://doi.org/10.1016/S0010-0277\(00\)00120-7](https://doi.org/10.1016/S0010-0277(00)00120-7)
- Hermer, L., Spelke, E. S. (1994). A geometric process for spatial reorientation in young children. *Nature*, 370(6484), 57–59. <https://doi.org/10.1038/370057a0>
- Hohol, M. (2013). *Wyjaśnić umysł: Struktura teorii neurokognitywnych*. Kraków: Copernicus Center Press.
- Hohol, M., Baran, B., Krzyżowski, M., Francikowski, J. (2017). Does spatial navigation have a blind-spot? Visiocentrism is not enough to explain the navigational behavior comprehensively. *Frontiers in Behavioral Neuroscience*, 11(154). <https://doi.org/10.3389/fnbeh.2017.00154>
- Hohol, M., Cipora, K., Willmes, K., Nuerk, H.-C. (2017). Bringing back the balance: Domain-general processes are also important in numerical cognition. *Frontiers in Psychology*, 8(499). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00499>
- Hohol, M., Miłkowski, M. (2019). Cognitive artifacts for geometric reasoning. *Foundations of Science*, 24(4), 657–680. <https://doi.org/10.1007/s10699-019-09603-w>
- Hohol, M., Willmes, K., Nęcka, E., Brożek, B., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2020). Professional mathematicians do not differ from others in analog magnitude representation: evidence from prevalence of numerical distance and size effects. *PsyArXiv (Preprint)*. <https://doi.org/10.31234/osf.io/evzpa>
- Hohol, M., Wołoszyn, K. (2016). Ewolucja umysłu. W: M. Heller, J. Życiński (red.), *Dylematy ewolucji* (wyd 2., ss. 293–310). Kraków: Copernicus Center Press.
- Hohol, M., Wołoszyn, K., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2018). A large-scale survey on finger counting routines, their temporal stability and flexibility in educated adults. *PeerJ*, 6(e5878). <https://doi.org/10.7717/peerj.5878>

- Izard, V., Pica, P., Spelke, E. S., Dehaene, S. (2011). Flexible intuitions of Euclidean geometry in an Amazonian indigene group. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *108*(24), 9782–9787. <https://doi.org/10.1073/pnas.1016686108>
- Izard, V., Spelke, E. S. (2009). Development of sensitivity to geometry in visual forms. *Human Evolution*, *23*(3), 213–248.
- Knops, A. (2020). *Numerical cognition (The basics)*. London-New York: Routledge.
- Koedinger, K. R., Anderson, J. R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of expertise in geometry. *Cognitive Science*, *14*(4), 511–550. https://doi.org/10.1207/s15516709cog1404_2
- Kosslyn, S. (1980). *Image and mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Lakoff, G., Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.
- Landau, B., Dessalegn, B., Goldberg, A. M. (2010). Language and space: Momentary interactions. In V. Evans, P. Chilton (red.), *Language, cognition and space: The state of the art and new directions* (ss. 51–77). London: Equinox.
- Landau, B., Lakusta, L. (2009). Spatial representation across species: geometry, language, and maps. *Current Opinion in Neurobiology*, *19*, 12–19. <https://doi.org/10.1016/j.conb.2009.02.001>
- Larkin, J. H., Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science*, *11*, 64–99.
- Lee, S. A., Spelke, E. S., Vallortigara, G. (2012). Chicks, like children, spontaneously reorient by three-dimensional environmental geometry, not by image matching. *Biology Letters*, *8*(4), 492–494. <https://doi.org/10.1098/rsbl.2012.0067>
- Lee, S. A., Vallortigara, G. (2015). Bumblebees spontaneously map location of conspecific using geometry and features. *Learning and Motivation*, *50*, 32–38. <https://doi.org/10.1016/j.lmot.2014.10.004>
- Łukasik, A. (2007). *Ewolucyjna psychologia umysłu*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Maruszewski, T. (1984). Matrix concepts, hierarchical concepts, ideal types. *Polish Psychological Bulletin*, *15*(1), 3–12.
- Merzbach, U. C., Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (wyd. 3). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Meteyard, L., Cuadrado, S. R., Bahrami, B., Vigliocco, G. (2012). Coming of age: A review of embodiment and the neuroscience of semantics. *Cortex*, *48*(7), 788–804. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2010.11.002>

- Miłkowski, M., Clowes, R.W., Rucińska, Z., Przegalińska, A., Zawidzki, T., Gies, A., Krueger, J., McGann, M., Afeltowicz, Ł., Wachowski, W.M., Stjernberg, F., Loughlin, V., Hohol, M. (2018). From wide cognition to mechanisms: A silent revolution. *Frontiers in Psychology*, 9(2393) <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02393>
- Miłkowski, M., Hohol, M., Nowakowski, P. (2019). Mechanisms in psychology: The road towards unity? *Theory and Psychology*, 29(5), 567–578. <https://doi.org/10.1177/0959354319875218>
- Miller, G. A. (2003). The cognitive revolution: A historical perspective. *Trends in Cognitive Sciences*, 7(3), 141–144. [https://doi.org/10.1016/S1364-6613\(03\)00029-9](https://doi.org/10.1016/S1364-6613(03)00029-9)
- Moser, E. I., Moser, M.-B., McNaughton, B. L. (2017). Spatial representation in the hippocampal formation: a history. *Nature*, 20(11), 1448–1464. <https://doi.org/10.1038/nn.4653>
- Moyer, R. S., Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215(5109), 1519–1520. <https://doi.org/10.1038/2151519a0>
- Murawski, R. (2013). *Filozofia matematyki: zarys dziejów*. Poznań: Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Adama Mickiewicza.
- Neckar, J. (2018). *Ewolucyjna psychologia osobowości: O psychologicznej naturze człowieka w ujęciu darwinowskim*. Warszawa: Sedno.
- Netz, R. (1998). Greek mathematical diagrams: Their use and their meaning. *For the Learning of Mathematics*, 18(3), 33–39. <https://doi.org/10.2307/40248278>
- Netz, R. (1999). Linguistic formulae as cognitive tools. *Pragmatics & Cognition*, 7(1), 147–176. <https://doi.org/10.1075/pc.7.1.07net>
- Norman, D. A. (1991). Cognitive artifacts. W: J. Carroll (red.), *Designing interaction: Psychology at the human-computer interface* (ss. 17–38). Cambridge: Cambridge University Press.
- O’Keefe, J., Dostrovsky, J. (1971). The hippocampus as a spatial map: Preliminary evidence from unit activity in the freely-moving rat. *Brain Research*, 34(1), 171–175.
- Paivio, A. (1986). *Mental representations: A dual coding approach*. Oxford University Press.
- Papesh, M. H. (2015). Just out of reach: On the reliability of the action-sentence compatibility effect. *Journal of Experimental Psychology: General*, 144(6), 116–141. <https://doi.org/10.1037/xge0000125>
- Piaget, J., Inhelder, B. (1967). *The child’s conception of space*. W.W. Norton & Co.: New York.
- Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1960). *The child’s conception of geometry*. New York: W. W. Norton Company.

- Pisula, W. (2003). *Psychologia zachowań eksploracyjnych zwierząt*. Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.
- Pogonowski, J. (2017). On conceptual metaphors in mathematics. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 9, 85–98. <https://doi.org/10.24917/20809751.9.4>
- Pulvermüller, F., Hauk, O., Nikulin, V. V., Ilmoniemi, R. J. (2005). Functional links between motor and language systems. *European Journal of Neuroscience*, 21(3), 793–797. <https://doi.org/10.1111/j.1460-9568.2005.03900.x>
- Rączaszek-Leonardi, J. (2009). Symbols as constraints: The structuring role of dynamics and self-organization in natural language. *Pragmatics & Cognition*, 17(3), 653–676. <https://doi.org/10.1075/pc.17.3.09ras>
- Ritchie, J. B. (2020). What's wrong with the minimal conception of innateness in cognitive science? *Synthese*, (Numer tematyczny: Explanations in Cognitive Science: Unification vs Pluralism, red. M. Miłkowski, M. Hohol). <https://doi.org/10.1007/s11229-020-02543-0>
- Roth, W.-M. (2011). *Geometry as objective science in elementary school classrooms*. New York: Routledge.
- Semadeni, Z. (2018). Porównanie poziomów rozwoju pojęć geometrycznych u uczniów Hejnego z poziomami van Hielów. *Journal of Modern Science*, 37(2), 45–68. <https://doi.org/10.13166/jms/89778>
- Shallice, T., Cooper, R. P. (2013). Is there a semantic system for abstract words? *Frontiers in Human Neuroscience*, 7(175), 1–10. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2013.00175/abstract>
- Sobańska, M., Łojek, E. (2011). *Struktura umysłu a wykonywanie prostych działań arytmetycznych: Badania neuropsychologiczne*. Warszawa: Warszawa: Difin.
- Spelke, E. S., Lee, S. A., Izard, V. (2010). Beyond core knowledge: Natural geometry. *Cognitive Science*, 34(5), 863–884. <https://doi.org/10.1111/j.1551-6709.2010.01110.x>
- Sutton, J. E., Newcombe, N. S. (2014). The hippocampus is not a geometric module: processing environment geometry during reorientation. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 244. <https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00596>
- Swoboda, E. (2006). *Przestrzeń, regularności geometryczne i kształty w uczeniu się i nauczaniu dzieci*. Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Tinbergen, N. (1963). On aims and methods of ethology. *Zeitschrift Für Tierpsychologie*, 20(3), 410–433. <https://doi.org/10.1111/eth.1963.20.issue-3>
- Tolman, E. C. (1948). Cognitive maps in rats and men. *Psychological Review*, 55(4), 189–208. <https://doi.org/10.1037/h0061626>

- Tommasi, L., Chiandetti, C., Pecchia, T., Sovrano, V. A., Vallortigara, G. (2012). From natural geometry to spatial cognition. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 36(2), 799–824. <https://doi.org/10.1016/j.neubiorev.2011.12.007>
- Trojan, M. (2013). *Na tropie zwierzęcego umysłu*. Warszawa: Scholar.
- Tylén, K., Fusaroli, R., Bjørndahl, J. S., Rączaszek-Leonardi, J., Østergaard, S., Stjernfelt, F. (2014). Diagrammatic reasoning: Abstraction, interaction, and insight. *Pragmatics & Cognition*, 22(2), 264–283. <https://doi.org/10.1075/pc.22.2.06tyl>
- van Hiele-Geldof, D., van Hiele, P. M. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Brooklyn: Brooklyn College.
- van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Orlando: Academic Press.
- Vigliocco, G., Vinson, D. P., Druks, J., Barber, H., Cappa, S. F. (2011). Nouns and verbs in the brain: A review of behavioural, electrophysiological, neuropsychological and imaging studies. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 35(3), 407–426. <https://doi.org/10.1016/j.neubiorev.2010.04.007>
- von Helmholtz, H. (1977). On the origin and significance of the axioms of geometry. In P. Hertz & M. Schlick (red.), *Epistemological writings* (ss. 1–38). Dordrecht: Riedel Publishing.
- Wang, J., Conder, J. A., Blitzer, D. N., Shinkareva, S. V. (2010). Neural representation of abstract and concrete concepts: A meta-analysis of neuroimaging studies. *Human Brain Mapping*, 31(10), 1459–1468. <https://doi.org/10.1002/hbm.20950>
- Winkielman, P., Niedenthal, P. M. (2009). Ucieleśniony emocjonalny umysł społeczny. W: M. Kofta i M. Kossowska (red.), *Psychologia poznania społecznego: Nowe idee* (ss. 83–101). Warszawa: PWN.
- Wójtowicz, K. (2012). *O pojęciu dowodu w matematyce*. Toruń: Wyd. Naukowe UMK.
- Wundt, W. M. (1898). *Die geometrisch-optischen Täuschungen*. Leipzig: Teubner.
- Wygotski, L. (1989). *Myślenie i mowa*. Warszawa: PIW.
- Wystrach, A., Beugnon, G. (2009). Ants learn geometry and features. *Current Biology*, 19(1), 61–66. <https://doi.org/10.1016/j.cub.2008.11.054>

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej:

Po doktoracie pracowałem (w ramach umowy o pracę) w trzech następujących instytucjach akademickich: Uniwersytecie Papieskim Jana Pawła II w Krakowie (Wydział Filozoficzny, asystent, 2013–2015 r.), Instytucie Filozofii i Socjologii Polskiej Akademii Nauk w Warszawie (Zakład Logiki i Kognitywistyki, adiunkt, 2015–2020 r.), Uniwersytecie Jagiellońskim (Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, adiunkt, od 2018). Na podstawie umów cywilno-prawnych prowadziłem również zajęcia dydaktyczne w Wyższej Szkole Europejskiej im. J. Tischnera (2016–2017 r.), na Uniwersytecie SWPS (2017–2020 r.) i w Polsko-Japońskiej Akademii Technik Komputerowych (2017–2020 r.).

W ramach zrealizowanego przeze mnie grantu Narodowego Centrum Nauki OPUS „Mechanizmy poznania geometrycznego” odbyłem wizytę studyjną na Wydziale Psychologii Uniwersytetu Kalifornijskiego w San Diego (październik 2018), która była bezpośrednio związana z przygotowaniem książki *Foundations of geometric cognition*, którą przedkładam jako osiągnięcie habilitacyjne. Od 2014 r. stale współpracuję z laboratorium prof. Hansa-Christopha Nuerka na Wydziale Psychologii Uniwersytetu Eberharda Karola w Tybindze, gdzie przebywałem na wizytach studyjnych (ostatnio w listopadzie 2019, również w ramach grantu OPUS). Nasza kilkuletnia współpraca badawcza zaowocowała dotychczas następującymi artykułami oraz preprintem:

- Hohol, M., Wołoszyn, K., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2018). A large-scale survey on finger counting routines, their temporal stability and flexibility in educated adults. *PeerJ*, 6(e5878). <https://doi.org/10.7717/peerj.5878> [IF=2.353]
- Hohol, M., Cipora, K., Willmes, K., Nuerk, H.-C. (2017). Bringing back the balance: Domain-general processes are also important in numerical cognition. *Frontiers in Psychology*, 8(499). <http://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00499> [IF=2.323]
- Cipora, K., Hohol, M., Nuerk, H.-C., Willmes, K., Brożek, B., Kucharzyk, B., Nęcka, E. (2016) Professional mathematicians differ from controls in their spatial-numerical associations. *Psychological Research*, 80, 710–726. <http://doi.org/10.1007/s00426-015-0677-6> [IF=3.119]
- Hohol, M., Willmes, K., Nęcka, E., Brożek, B., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2020). Professional mathematicians do not differ from others in analogue magnitude representation:

Evidence from prevalence of numerical distance and size effects. *PsyArXiv (preprint)*.
<https://doi.org/10.31234/osf.io/evzpa> [w chwili składania wniosku artykuł jest w rewizji
w czasopiśmie *Scientific Reports*, IF=4.011]

Treść powyższych prac przybliżona została w sekcji 7 autoreferatu. Artykuły opublikowane zostały w otwartym dostępie. Nieopublikowany jeszcze preprint jest również dostępny publicznie. Czasopismo, w którym manuskrypt znajduje się w rewizji w chwili składania posiada również otwarty dostęp.

Byłem uczestnikiem kilku wspólnych projektów badawczych Polskiej Akademii Nauk i partnerskich instytucji zagranicznych, w ramach których odbyłem szereg wizyt studyjnych, prowadząc badania na: Uniwersytecie Witten/Herdecke w Witten (pobyty badawczy w 2017 r.), w Instytucie Badań nad Społeczeństwem i Wiedzą Bułgarskiej Akademii Nauk (pobyty w 2018 r.), w Instytucie Filozofii Czeskiej Akademii Nauk w Pradze (pobyty badawcze w latach 2017–2018 r.) oraz w Instytucie Antropologii i Centrum Badań Antropologicznych im. Francisca I. Rainera Rumuńskiej Akademii Nauk w Bukareszcie (kilka pobytów badawczych w latach 2016–2019),

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę:

Osiągnięcia dydaktyczne

W trakcie mojej dotychczasowej kariery akademickiej prowadziłem wiele kursów akademickich (wykłady i/lub ćwiczenia) na poziomie studiów pierwszego stopnia, drugiego stopnia oraz jednolitych studiów magisterskich z przedmiotów takich jak: Psychologia poznawcza, Cognitive science, Centralne problemy kognitywistyki, Umysł a nauki ewolucyjne, Struktura teorii neurokognitywnych, Umysł społeczny, Wprowadzenie do filozofii umysłu i kognitywistyki, Poznanie ucieleśnione. W pierwszym semestrze r. akad. 2019/2020 prowadziłem na Uniwersytecie Jagiellońskim kurs monograficzny Poznanie matematyczne, zaś w semestrze letnim prowadzę Seminarium kognitywistyczne. Byłem dotychczas promotorem 7 prac magisterskich. Obecnie na UJ pod moją opieką powstają dwie prace magisterskie. Praca przygotowywana przez Weronikę Browarczyk dotyczy związku stylów poznawczych mierzonych narzędziem OSIVQ (*Object-Spatial Imagery and Verbal Questionnaire*) oraz różnic indywidualnych w zakresie rozpoznawania twarzy mierzonych testem GFMT (*Glasgow Face Matching Test*). W ramach pracy przygotowywana jest polska adaptacja narzędzia

OSIVQ. Praca Aleksandry Kolny dotyczy natomiast związku między temporalną stabilnością preferencji liczenia na palcach a efektem zależności przestrzennej między liczbą a rodzajem odpowiedzi (SNARC). Badanie to opisane jest dokładniej w sekcji 7 autoreferatu, ponieważ stanowi kontynuację moich wcześniejszych prac.

Osiągnięcia organizacyjne

Byłem współorganizatorem kilkunastu międzynarodowych konferencji i warsztatów. Najważniejszymi z nich były w mojej ocenie: doroczna konferencja towarzystwa IACAP (specjalne wykłady wygłosili profesorowie Ned Block oraz Edward Zalta; Warszawa 2018), konferencja Understanding Social Cognition (udział specjalny: prof. Daniel Dennett; Lublin 2017), warsztaty Mechanistic Integration and Unification in Cognitive Science (wykłady specjalne wygłosili profesorowie: William Bechtel, Carl Craver i David M. Kaplan; Warszawa 2016), konferencja Explaining the Mind (ze specjalnym udziałem prof. Patricii Churchland; Kraków 2014), Krakowska Konferencja Kognitywistyczna „Zmysły/Senses” (wystąpienie specjalne: prof. Kevin O’Regan; Kraków 2014); konferencja The Normative Mind: Dimensions of Decision Making (ze specjalnym udziałem m.in. prof. Giuseppego Di Pellegrino; Kraków 2013), konferencja The Concept of Explanation (specjalny udział: prof. Robert Audi; Kraków 2013), konferencja The Emergence of Normative Orders (Kraków 2013), konferencja The Emotional Brain: From the Humanities to Neuroscience and Back Again (z udziałem prof. Josepha LeDoux, Yadina Dudaia, Elizabeth Phelps oraz śp. Nico Frijdy; Kraków 2011).

Byłem współtwórcą i członkiem zespołu Copernicus College – pierwszego w Polsce portalu MOOC (Massive Open Online Courses), nazywanego również „e-universytetem”. Copernicus College został założony przez Fundację Centrum Kopernika w 2014 r., a obecnie działa w strukturze Uniwersytetu Jagiellońskiego (zob. <https://www.copernicuscollege.pl>). W ramach grantu „Science for Ministry in Poland”, przyznanego Fundacji Centrum Kopernika przez John Templeton Foundation, kierowałem w latach 2014–2015 klastrem przygotowania pierwszych kilkunastu kursów na Copernicus College i ich integracji ze strukturą informatyczną platformy. Następnie w latach 2016–2018 – jako stały koordynator ds. naukowych Copernicus College – byłem odpowiedzialny za kolejne kursy, wykłady gościnne i e-podręczniki. Kierowałem wówczas zadaniami projektowymi „Ewolucja życia – wszechświata – kultury” oraz „Umysł: czym jest i jak działa?” finansowanymi z grantów DUN (Działalność Upowszechniająca Naukę) Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego. Od połowy 2019 r. jestem członkiem Rady Copernicus College.

Należę do zespołu organizującego coroczny Copernicus Festival, którego pierwsza edycja odbyła się w 2014 r. Festiwal działa pod auspicjami Fundacji Centrum Kopernika, Uniwersytetu Jagiellońskiego i „Tygodnika Powszechnego”, a jego celem jest ukazywanie szerokiego gronu odbiorców miejsca nauki w całej kulturze. Głównymi gośćmi dotychczasowych edycji festiwalu byli m.in. prof. Antonio Damasio, Hanna Damasio, Paul Bloom, Karen Wynn, Daniel Everett, Tetsuro Matsuzawa, Michael Arbib, Gregory Chaitin, Anna Wierzbicka i Paul Gilbert.

W latach 2012–2015 współorganizowałem wraz z red. Łukaszem Kwiatkiem kilka pierwszych serii wykładów popularnonaukowych Granice Nauki w Krakowie (odbywających się do dziś), które gościły dotychczas ponad stu polskich uczonych. Od 2017 r. stale współorganizuję z prof. Dominiką Dudek i red. Łukaszem Kwiatkiem cykl dyskusji Rozmowy o Człowieku. „Rozmowy” funkcjonują pod auspicjami Katedry Psychiatrii Collegium Medicum UJ, Polskiego Towarzystwa Psychiatrycznego i Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych UJ, a odbywają się w Polskiej Akademii Umiejętności w Krakowie. Ich dotychczasowymi gośćmi byli m.in. prof. Bogdan de Barbaro, prof. Barbara Engelking, Jerzy Owsiak, prof. Halina Grzymała-Moszczyńska, prof. Jerzy Bralczyk, śp. prof. Jerzy Aleksandrowicz, Ewa Lipska, prof. Adam Daniel Rotfeld, prof. Jan Widacki, prof. Paweł Śpiewak, Adam Zagajewski, prof. Jacek Dubiel, dr Jacek Prusak, prof. Jerzy Stuhr, prof. Piotr Sztompka.

Popularyzacja nauki

Jestem autorem lub współautorem około 60 artykułów popularnonaukowych, z których większość koncentrowała się wokół zagadnień psychologii poznawczej, neurokognitywistyki i psychologii porównawczej oraz teorii ewolucji. Ukazały się one na łamach miesięcznika Charaktery, Tygodnika Powszechnego, Polityki, Niezbędnika Inteligentnej Polityki, miesięcznika Znak oraz w portalach internetowych Interia, Granice nauki, Nastroje. Stale współpracuję z działami naukowymi Polityki i Tygodnika Powszechnego. W latach 2014–2015 byłem redaktorem działu naukowego Tygodnika. Poniżej wymieniam tylko 25 najważniejszych – w mojej opinii – artykułów popularnonaukowych mojego współ/autorstwa (pełny spis znaleźć można na mojej stronie internetowej: www.hohol.pl):

Hohol, M. (2019). Harari pod lupą: kognitywista czyta Homo deus, *Znak*, 774, 28–33.

Hohol, M. (2019). Szeroki umysł, *Tygodnik Powszechny*, 44(3669), 114–116 (Dodatek Wielkie Pytania).

- Hohol, M., Miłkowski, M. (2019). Umysły i kąty, *Tygodnik Powszechny*, 2(3627), 68–70.
- Hohol, M. (2018). Mózg rządzi!, *Polityka*, 12(3153), 67.
- Wołoszyn–Hohol, K., Hohol, M. (2018). Rydwan z dwoma końmi: Historia badań nad emocjami, *Tygodnik Powszechny*, 18–19(3590–3591), 7–9 (Dodatek Wielkie Pytania).
- Wołoszyn, K., Hohol, M. (2017). Koniec z małpowaniem, *Tygodnik Powszechny*, 29(3469), 58–60.
- Hohol, M. (2017). Umysł po drugiej stronie lustra, *Polityka*, 22(3112), 70–71.
- Wołoszyn, K., Hohol, M. (2017). Emocjonalny rozum i sprawy beznadziejne, *Tygodnik Powszechny*, 17(3535), 68–71.
- Hohol, M., Wołoszyn, K. (2017). Umysł ucieleśniony: Czyli jaki?, *Tygodnik Powszechny*, 7(3527), 3–7 (Dodatek Wielkie Pytania); przedruk w: *Tygodnik Powszechny: Wszystko co wiemy*, Wydanie Specjalne 1(6), 70–74 (2018).
- Hohol, M., Baran, B. (2016). Myślę, więc wiem gdzie jestem, *Tygodnik Powszechny*, 41(3509), 21–22 (Dodatek Wielkie Pytania).
- Hohol, M. (2016). Mechanizmy cnoty, *Znak*, 730, 24–29
- Kwiatkiewicz, Ł., Hohol M. (2016). Jak myślą zwierzęta?, *Polityka*, 42(3081), 70–73.
- Hohol, M. (2016). Siedem mitów o mózgu, *Tygodnik Powszechny*, 37(3505), 10–14.
- Brożek, B., Hohol, M. (2016). Homo fundamentalis, *Znak*, 729, 62–69
- Hohol, M., Rotkiewicz, M. (2016). Plamy na mózgu, *Polityka*, 33(3072), 64–66; przedruk w 2018 jako: Zapalone struktury, w: *Polityka – Ja, my, oni*, 31, 112–114.
- Hohol, M. (2016). Księga mózgu, *Polityka – Niezbędnik Inteligenta*, 1, 92–95.
- Hohol, M., Kwiatek Ł. (2015). Kulturowa natura moralności, *Znak*, 725, 72–77
- Hohol, M. (2015). Metafory umysłu, *Polityka – Niezbędnik Inteligenta*, 2, 83–87.
- Hohol, M. (2015). Test słodkiej pianki, *Tygodnik Powszechny*, 20(3436), 52–53.
- Cipora, K., Hohol, M. (2015). Palce się liczą, *Tygodnik Powszechny*, 16(3432), 50–51.
- Hohol, M. (2014). Czy można podglądać umysł?, *Tygodnik Powszechny*, 40(3404), 10–12 (Dodatek Wielkie Pytania).
- Hohol, M. (2014). Genealogia emocji. *Charaktery*, 57(213), 74–77.
- Hohol, M., Kwiatek, Ł. (2014). Wewnętrzny kompas. *Charaktery*, 53(209), 70–75.
- Hohol, M., Kwiatek, Ł. (2014). Samolubny opiekun. *Charaktery*, 48(204), 80–85.
- Brożek, B., Hohol, M. (2013). Geniusze, savanci i ludzkie kalkulatory. *Charaktery*, 46(202), 82–87.

Wielokrotnie gościłem w roli eksperta na antenach Tok FM, Radia Kraków, Programu Trzeciego Polskiego Radia, Radiofonii 100,5 FM, Polskiego Radia 24. Byłem gościem cyklicznych imprez popularnonaukowych, w tym warszawskiego Festiwalu Nauki (2014) oraz Dni Mózgu w Katowicach (2015, 2016, 2017) i Białymstoku (2018). Łącznie wygłosiłem kilkadziesiąt wykładów popularnonaukowych na tematy z zakresu psychologii poznawczej i neurokognitywistyki i brałem udział w licznych dyskusjach w Krakowie i wielu innych miastach polski (wiele z nich dostępnych jest w serwisie YouTube, odnośniki znaleźć można na stronie www.hohol.pl).

W trakcie całej mojej działalności związanej z Copernicus College (zob. wyżej) przeprowadziłem kilka dostępnych za darmo dla wszystkich zainteresowanych osób kursów on-line na poziomie uniwersyteckim: Wprowadzenie do psychologii poznawczej (około 1800 uczestników; w kolejnych nawiasach podaję przybliżone liczby uczestników), Nauki kognitywne a natura ludzka (1400), Poznanie matematyczne (1350), Umysł społeczny (850), Ewolucja w kulturze (400), Emocje: ujęcie interdyscyplinarne (700). W przeprowadzonych przeze mnie kursach online uczestniczyło łącznie około 6500 uczestników. Przygotowałem również kilka rozdziałów do dostępnych na Copernicus College e-podręczników *Kognitywistyka w praktyce* i *Wprowadzenie do kognitywistyki*.

W latach 2018–2019 byłem autorem dwudziestoodcinkowego podcastu „Rozmowy o umyśle” na YouTube. Celem cyklu było przybliżanie widzom współczesnej wiedzy o procesach poznawczych poprzez przeprowadzone przeze mnie wywiady z następującymi psychologami, terapeutami, biologami, filozofami i psychiatrami: dr Jacek Francikowski, Co potrafią miniaturowe mózgi?; mgr Jakub Matyja, Ucieleśniony umysł muzyczny; dr Łukasz Jach, Kto wierzy w naukę, a kto nie?; dr Marcin Gorazda, Czy psychologia zrewolucjonizowała ekonomię?; dr Marcin Moroń, Czy empatia to nasz moralny kompas?; dr Radosław Zyzik, Neuroprawo: Sci-fi czy konieczność?; prof. Edward Nęcka, Samokontrola i treningi poznawcze; dr Jacek Prusak, Psychologia i duchowość; dr Joanna Grzymała-Moszczyńska, Psychologia aktywizmu; dr Błażej Skrzypulec, Meandry percepcji; dr Katarzyna Jaśko, Zmiana świata w świetle psychologii; dr Łukasz Kurek, W poszukiwaniu wolnej woli; dr Łukasz Janik, Czy psychiatria potrzebuje filozofii?; dr Teresa Hlawacz, Temperament i samokontrola; mgr Natalia Wójcik i mgr Marta Kuczek, Bez klamek: Mity na temat chorób psychicznych; dr Przemysław Nowakowski, Kognitywistyka czy nauki o poznaniu?; dr Marek Jakubiec, Metafora i myślenie abstrakcyjne; dr Łukasz Lamża, Myślenie jednokomórkowe?;

dr Katarzyna Cyranka, Psychoterapia bez tajemnic; prof. Dominika Dudek, Jak leczą psychiatrzy?

Do początku kwietnia 2020 r. powyższe wywiady obejrzało łącznie ponad 66 tysięcy osób. Cykl finansowany był z grantu MNiSW DUN. Wszystkie odcinki dostępne są na YouTube. Obecnie realizuję cykl krótkich wykładów w formie audycji na YouTube, zatytułowany „Od mózgu do umysłu”. Dotychczas ukazały się trzy odcinki, które do początku kwietnia 2020 r. obejrzało prawie 32 tysiące osób.

Do wkładu w popularyzację i upowszechnianie nauki zaliczyć można również moją działalność translatorską. Przetłumaczyłem trzy następujące książki: *Moralność mózgu* Patricii Churchland (wspólnie z Natalią Marek; Kraków: Copernicus Center Press 2013), *Lęk: Neuronauka na tropie źródeł strachu i lęku* Josepha LeDoux (wspólnie z Kingą Wołoszyn; Kraków: Copernicus Center Press 2017) oraz *Górny mózg, dolny mózg* Stephena Kosslyna i G. Wayne’a Millera (wspólnie z Natalią Marek; Kraków: Copernicus Center Press 2019). Tłumaczenia dwóch pierwszych książek opatrzyliśmy rozbudowanymi przedmowami. Byłem również konsultantem naukowym tłumaczeń książek: *Mózg autystyczny* Temple Grandin i Richarda Panka (Kraków: Copernicus Center Press, 2016), *W zdrowym ciele zdrowy mózg* Andersa Hansena (Kraków: ZNAK, 2018) oraz *Inne umysły: Ośmiornice i prapoczątki świadomości* Petera Godfrey’a-Smitha (Kraków: Copernicus Center Press, 2018). Do ostatniej z wymienionych napisałem również wprowadzenie.

7. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Poznanie numeryczne

Po uzyskaniu stopnia doktora głównym obszarem moich zainteresowań naukowych stało się poznanie matematyczne, dlatego moje wysiłki badawcze przeniosły się z filozofii do psychologii. Większość moich badań w tym obszarze dotyczy przetwarzania liczb, a w szczególności elementarnych zdolności numerycznych, na których – zgodnie z przyjmowanym przez wielu badaczy założeniem – bazują bardziej złożone zdolności matematyczne (Dehaene, 2011).

Jednym z najczęściej dyskutowanych w literaturze przejawów elementarnego poznania numerycznego są związki przestrzenno-numeryczne (Cipora, Haman, Domahs, Nuerk, 2020;

Patro, Nuerk, Cress, Haman, 2014). Ich przykładem jest efekt SNARC (Spatial Numerical Association of Response Codes; Dehaene, Bossini, Giraux, 1993). W badaniu przeprowadzonym przez nasz zespół pod kierownictwem prof. Edwarda Nęcki (UJ) i opublikowanym w czasopiśmie *Psychological Research* sprawdziliśmy relację kierunkowych związków przestrzenno-numerycznych, mierzonych behawioralnym zadaniem oceny parzystości liczb, z ekspertywnością matematyczną, operacjonalizowaną w kategoriach edukacji uniwersyteckiej (Cipora, Hohol et al., 2016). Zreplikowaliśmy efekt SNARC w dwóch grupach kontrolnych złożonych z doktorantów i młodych doktorów nauk społecznych oraz kierunków inżynieryjnych. Nie zaobserwowaliśmy jednak efektu SNARC w grupie profesjonalnych matematyków – doktorantów i młodych doktorów matematyki. Pokazaliśmy, że różnicy tej nie można wyjaśnić różnicami w średnich czasach reakcji, wariacji odpowiedzi, a także inteligencji (mierzonej Testem Matryc Ravena w wersji dla Zaawansowanych). Nasze wyniki pokazały, że profesjonalni matematycy posiadają bardziej abstrakcyjną i/lub elastyczną przestrzennie reprezentację liczb, co prowadzi do tego, że nie wykazują domyślnej orientacji liczb od lewej do prawej strony, której wskaźnikiem jest efekt SNARC. W ogólniejszej perspektywie nasze badanie wskazuje, że efekt SNARC kształtowany jest nie tylko przez kierunek czytania (skanowania materiału wizualnego), ale również przez poziom umiejętności matematycznych (zob. Wood, Willmes, Nuerk, Fischer, 2008).

W innym badaniu przeprowadzonym przez nasz zespół interesował nas związek analogowego przetwarzania liczb z ekspertywnością matematyczną. Manuskrypt został złożony w czasopiśmie *Scientific Reports* i skierowany przez recenzentów do rewizji. Po uwzględnieniu uwag recenzentów ponownie złożyliśmy manuskrypt w tym prestiżowym czasopiśmie. Preprint artykułu dostępny jest w serwisie *PsyArXiv* (Hohol, Willmes et al., 2020). Wskaźnikami przetwarzania analogowego są efekty dystansu i rozmiaru numerycznego (Moyer i Landauer, 1967). Przy użyciu zadania klasyfikacji wielkości przebadaliśmy cztery grupy: profesjonalnych matematyków, przedstawicieli nauk społecznych, inżynierów kontynuujących karierę naukową oraz grupę zrekrutowaną w populacji ogólnej. Wyniki poprzednich badań na temat związków analogowego przetwarzania liczb z bardziej złożonymi zdolnościami matematycznymi są niekonkluzywne (por. De Smedt, Verschaffel, Ghesquière, 2009; Mussolin, Mejias, Noël, 2010; Rousselle i Noël, 2007), przy czym badania te dotyczyły osób o typowych lub niższych niż typowe zdolnościach matematycznych. W najbardziej uzasadnionym teoretycznie scenariuszu osoby cechujące się wyższym poziomem ekspertywności matematycznej powinny wykazywać słabsze efekty dystansu i rozmiaru

numerycznego. Nasze badanie zreplikowało obydwie efekty, ale nie ujawniło różnic pomiędzy grupami pod względem siły tych efektów (także gdy zastosowaliśmy analizę bayesowską). Wykorzystując bootstrapping, sprawdziliśmy również rozpowszechnienie efektów na poziomie indywidualnym. O ile rzetelny efekt dystansu występował niemal u wszystkich osób badanych, rozpowszechnienie rzetelnego efektu rozmiaru numerycznego było znacznie mniejsze (w obydwu przypadkach niezależnie od grupy). Wskazaliśmy, że pierwszy z efektów ma charakter dominujący, zaś drugi niedominujący (Rouder i Haaf, 2018). Odkrycie to jest interesujące i godne dalszych badań, ponieważ stoi w sprzeczności z przyjmowaną w głównym nurcie psychologii poznania numerycznego tezą, że efekty dystansu i rozmiaru numerycznego odzwierciedlają własności pojedynczego, uniwersalnego dla wszystkich ludzi, systemu reprezentacji wielkości (tzw. system liczebności przybliżonej / zmysł liczebności: Dehaene, 2011, lub zmysł wielkości: Leibovich, Katzin, Harel, Henik, 2017).

Badanie „grup ekstremalnych” pod względem różnych zdolności poznawczych uznawane jest za owocną strategię w wielu dziedzinach psychologii (Preacher, Rucker, MacCallum, Nicewander, 2005). O ile w kwestii poznania matematycznego na jednym ekstremum znajdują się dość dobrze zbadane niższe niż przeciętnie zdolności matematyczne, np. u osób z dyskalkulią rozwojową, o tyle druga część spektrum, a więc zdolności ponadprzeciętne, przebadana jest gorzej. Omówione wyżej badania należą do zaledwie kilku przeprowadzonych dotąd na świecie psychologicznych studiów nad elementarnymi zdolnościami numerycznymi profesjonalnych matematyków. Są także jedynymi, dotyczącymi bezpośrednio efektów SNARC, dystansu i rozmiaru numerycznego w tej populacji. Kolejne planowane przeze mnie badania mają na celu przetestowanie innych elementarnych efektów przetwarzania numerycznego, ze szczególnym uwzględnieniem różnych typów związków przestrzenno-numerycznych (Cipora, Haman, Domahs, Nuerk, 2020; Patro, Nuerk, Cress, Haman, 2014) w populacji matematyków i innych specjalistów. Inną perspektywą rysującą się jako ważna, a możliwą dzięki opracowaniu metod bootstrappingowych, jest testowanie (w różnych populacjach) indywidualnego rozpowszechnienia takich efektów (dotyczy to także „pozamatematycznych” efektów, badanych od dekad w obszarze psychologii poznawczej).

Innym obszarem moich zainteresowań jest ucieleśnione poznanie numeryczne (np. Lakoff i Núñez, 2000). W obszarze tym jestem współautorem kilku artykułów w czasopiśmie naukowych (Hohol, Wołoszyn, Nuerk, Cipora, 2018; Wołoszyn i Hohol, 2017; Szczygieł, Cipora, Hohol, 2015; Cipora, Szczygieł, Hohol, 2014), monografii (Brożek i Hohol, 2014,

rozdział 2) oraz rozdziałów w innych książkach (Hohol i Cipora, 2014; Hohol, 2013), dyskutujących zarówno o owocność, jak i ograniczenia tego podejścia. Tutaj skupię się tylko na moim wkładzie w badania nad liczeniem na palcach.

Wraz z dr Moniką Szczygieł z Uniwersytetu Pedagogicznego im. KEN w Krakowie i dr. Krzysztofem Ciporą z Uniwersytetu w Loughborough przygotowaliśmy dwa artykuły przeglądowe. Pierwszy z nich ukazał się w czasopiśmie *Psychologia–Etologia–Genetyka* i dotyczy roli liczenia na palcach w poznaniu numerycznym osób dorosłych (Cipora, Szczygieł, Hohol, 2014), zaś drugi ukazał się w *Psychologii rozwojowej*, a jego tematem jest ontogeneza liczenia na palcach (Szczygieł, Cipora, Hohol, 2015). W opublikowanym wraz z mgr Kingą Wołoszyn (UJ) we *Frontiers in Psychology* artykule polemicznym wobec pracy Goldingera et al. (2016), wskazaliśmy na przykładzie zjawiska liczenia na palcach, że badania w paradygmacie ucieleśnienia prowadzą do postępowych przesunięć problemowych w psychologii poznawczej (Wołoszyn i Hohol, 2017).

Zjawisko liczenia na palcach przez długi czas traktowane było jedynie jako przejściowy krok ontogenetyczny, który jest zasadniczo mało istotny – a nawet szkodliwy – dla późniejszego operowania symboliczną matematyką. Jeśli zaś chodzi o rolę tego zjawiska u osób dorosłych, badania koncentrowały się głównie na odciążaniu pamięci roboczej, np. podczas obliczeń arytmetycznych czy kalendarzowych. Jak wskazujemy, liczenie na palcach jest dziś rozpoznawane jako jeden z kluczowych elementów kształtowania umysłowej reprezentacji (pojęcia) liczby. Spójne jest to m.in. z obserwacją, że gnozja palców pozwala na przewidywanie późniejszych osiągnięć w edukacji matematycznej (Penner-Wilger i Anderson, 2013; por. jednak: Schild, Bauch, Nuerk, 2020). W tym kontekście mówi się nawet o „brakującym ogniwie” rozwojowym – zarówno w sensie ontogenetycznym, jak i historycznym – łączącym elementarną predyspozycję do przetwarzania liczebności (wspólną człowiekowi i wielu gatunkom zwierząt) ze specyficznie ludzką, ugruntowaną kulturowo matematyką symboliczną (Andres, Di Luca, Pesenti, 2008). Podkreśla się, że obwody motoryczne mózgu zaangażowane pierwotnie w kontrolę czynności manualnych są adoptowane do przetwarzania liczb na zasadzie „ucieleśnionych” reaktywacji. Wczesne ontogenetyczne nawyki w zakresie liczenia na palcach kształtują kierunek związków przestrzenno-numerycznych, czego przejawem jest silniejszy efekt SNARC u osób dorosłych zaczynających liczenie od lewej ręki, w porównaniu do tych zaczynających od prawej (Fischer, 2008). Z drugiej strony wiele badań wskazuje, że strategie liczenia na palcach są zróżnicowane kulturowo, nawet wśród mieszkańców krajów

europejskich (Lindemann, Alipour, Fischer, 2011), a także podatne na kontekst sytuacyjny (Wasner, Moeller, Fischer, Nuerk, 2014).

Prace nad powyższymi artykułami przeglądowo-teoretycznymi umożliwiły zidentyfikowanie luk w dotychczasowym stanie badań nad liczeniem na palcach, a także milczących założeń przyjmowanych we wcześniejszych studiach. Wpływowa i daleko idąca teza Fischera (2008), zgodnie z którą nawyki liczenia na palcach odgrywają rolę w kształtowaniu kierunkowych związków przestrzenno-numerycznych, zakłada milcząco, że nawyki te powinny być stabilne w czasie, tak by dana ręka i palec zajmowały pozycję korespondującą zawsze z tą samą liczbą. Wprawdzie wykazano, że czynniki sytuacyjne mogą modyfikować sposób liczenia na palcach (Wasner et al., 2014), to jednak nie przetestowano dotychczas na ile sekwencje liczenia na palcach raportowane jako domyślne są stabilne w czasie. Co więcej, choć wielu autorów powołując się na codzienne obserwacje wskazuje, że osoby dorosłe używają palców do obliczeń w rozmaitych okolicznościach, to jednak w literaturze brakowało ilościowych danych na temat rozpowszechnienia tych zachowań.

Aby podjąć te kwestie, skonstruowaliśmy wraz z dr. Krzysztofem Ciporą i mgr Aleksandrą Machniak kwestionariusz nawyków liczenia na palcach, który wykorzystałem w badaniu przeprowadzonym wraz z mgr Kingą Wołoszyn, prof. Hansem-Christophem Nuerkiem i dr. Krzysztofem Ciporą, opublikowanym w czasopiśmie *PeerJ*. Kwestionariusz w wersji polskiej i angielskiej został udostępniony, podobnie jak surowe wyniki tego i innych naszych badań, na Open Science Framework (link znajduje się poniżej, pod danymi bibliograficznymi artykułu Hohol, Wołoszyn et al., 2018). Nasze badanie przeprowadzone zostało z udziałem osób dorosłych (studentów) w planie z pomiarem powtórzonym w dwóch punktach czasowych. Wielkość próby w teście pierwszym wynosiła 380, zaś w re-teście przeprowadzonym 2 miesiące później 84. W obydwu przypadkach osoby badane były najpierw proszone o policzenie na palcach do 10, a następnie wypełniały kwestionariusz. Wyniki analizy test-retest wskazują, że preferencje spontanicznego liczenia na palcach są relatywnie stabilne u większości uczestników (75%), co było spójne z deklarowaną przez nich stabilnością. Nawyki te mogą być jednak elastycznie dostosowywane do wymagań sytuacji, np. gdy w jednej z rąk trzymany jest jakiś przedmiot. Jeśli zaś chodzi o rozpowszechnienie preferencji dotyczących strategii czy stylu liczenia na palcach, niemal wszyscy uczestnicy deklaruwali, że rozpoczynają liczenie od zamkniętej dłoni, rozprostowując kolejne palce. Wzorec ten spójny jest z obserwowanym w innych krajach zachodnich, ale odmienny od obecnego np. Japonii. Zaobserwowaliśmy

również związek preferencji liczenia na palcach i ręczności (mierzonej kwestionariuszem Edynburskim): więcej osób leworęcznych zaczyna liczenie od lewej ręki. Najbardziej rozpowszechnionymi czynnościami, w których wykorzystywane jest liczenie na palcach, są wyliczenie elementów, przedstawianie argumentów i planów oraz obliczenia kalendarzowe.

Zgodnie z moją wiedzą, badanie stabilności liczenia na palcach w czasie w planie z pomiarem powtórzonym w dwóch punktach (test-retest) przeprowadzone zostało po raz pierwszy przez nas. Dla kolejnych badań istotne wydaje się nie tylko potwierdzenie milczącego, a zarazem śmiałego, założenia, że „domyślne” preferencje w liczeniu na palcach są stabilne w czasie, ale również to, że stabilność deklarowana jest spójna ze stabilnością test-retest. Sprawia to, że nasz kwestionariusz jest narzędziem potencjalnie użytecznym w badaniach z pojedynczym pomiarem. W badaniu przeprowadzanym aktualnie wraz z moją magistrantką Aleksandrą Kolny (UJ) testujemy wspomnianą tezę Fischera (2008) o roli nawyków liczenia na palcach w kształtowaniu związków przestrzenno-numerycznych. Uważamy, że jeśli jest ona prawdziwa, efekt SNARC (mierzony zadaniem oceny parzystości, takim jak w Cipora, Hohol et al., 2016) powinien być silniejszy w grupie osób deklarujących stabilne rozpoczęcie liczenia na palcach od lewej ręki, w porównaniu do osób deklarujących brak stabilnych preferencji w tym zakresie.

Do moich zainteresowań w zakresie przetwarzania numerycznego należą również relacje między wyspecjalizowanymi ze względu na dziedzinę (ang. *domain-specific*) a ogólnymi (ang. *domain-general*) mechanizmami poznawczymi. Zgodnie z wiodącą w literaturze koncepcją, podstawę zdolności matematycznych człowieka stanowi mechanizm poznawczy pierwszego typu, określany jako „system liczebności przybliżonej” lub „zmysł liczebności” (Dehaene, 2011). Zgodnie z takim poglądem rola mechanizmów ogólnych w poznaniu matematycznym ogranicza się do wstępnego przetwarzania postrzeganych bodźców oraz modulowania ostatecznego działania. To z kolei prowadzi do zaniedbywania mechanizmów ogólnych w badaniach. W artykule opublikowanym we *Frontiers in Psychology* argumentujemy wraz z dr. Krzysztofem Ciporą, prof. Klausem Willmesem (Uniwersytet RWTH w Akwizgranie) i prof. Hansem-Christophem Nuerkiem (Uniwersytet w Tybindze) za błędnością opisanego wyżej poglądu (Hohol, Cipora et al., 2017). Na przykładach zjawisk takich jak: przetwarzanie notacji, przetwarzanie liczb wielocyfrowych oraz porównywanie liczebności niesymbolicznych, wskazujemy, że ogólne mechanizmy poznawcze zaangażowane są w przetwarzanie numeryczne nie tylko na „wejściu” i „wyjściu”. Do mechanizmów tych należą

grupowanie percepcyjne, uwaga i monitorowanie konfliktu oraz hamowanie poznawcze. To samo prawdą jest w przypadku zjawisk bardziej złożonych, takich jak np. operacje arytmetyczne, które obejmują przywoływanie faktów z pamięci długotrwałej. Co więcej, wskazujemy, że w wielu zadaniach wykorzystywanych powszechnie w badaniach nad poznaniem numerycznym „odizolowanie” mechanizmów wyspecjalizowanych od ogólnych okazuje się bardzo trudne, jeśli w ogóle możliwe.

Na koniec tej sekcji chciałbym zaznaczyć, że różne aspekty poznawczego przetwarzania liczb – od elementarnych, przez ucieleśnienie, po czynniki kulturowe – zostały syntetycznie i przystępnie omówione w monografii *Umysł matematyczny* mojego współautorstwa (Brożek i Hohol, 2014), która obok prac prof. Jacka Dębca (2002) z University of Michigan oraz dr Marty Sobańskiej i prof. Emilii Łojek (2011) z Uniwersytetu Warszawskiego, stanowi jedną z nielicznych polskojęzycznych pozycji książkowych w dziedzinie poznania numerycznego.

Prace dotyczące powyższej sekcji:

Artykuły:

Hohol, M., Wołoszyn, K., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2018). A large-scale survey on finger counting routines, their temporal stability and flexibility in educated adults. *PeerJ*, 6(e5878). <https://doi.org/10.7717/peerj.5878> [IF=2.353]

Dostęp do kwestionariusza zamieszczonego na Open Science Framework: <http://dx.doi.org/10.17605/OSF.IO/RQHFK>

Wołoszyn, K., Hohol, M. (2017). Commentary: The poverty of embodied cognition. *Frontiers in Psychology*, 8(845). <http://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00845> [IF=2.323]

Hohol, M., Cipora, K., Willmes, K., Nuerk, H.-C. (2017). Bringing back the balance: Domain-general processes are also important in numerical cognition. *Frontiers in Psychology*, 8(499). <http://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.00499> [IF=2.323]

Cipora, K., Hohol, M., Nuerk, H.-C., Willmes, K., Brożek, B., Kucharzyk, B., Nęcka, E. (2016) Professional mathematicians differ from controls in their spatial-numerical associations. *Psychological Research*, 80, 710–726. <http://doi.org/10.1007/s00426-015-0677-6> [IF=3.119]

Szczygieł, M., Cipora, K., Hohol, M. (2015). Liczenie na palcach w ontogenezie i jego znaczenie dla rozwoju kompetencji matematycznych. *Psychologia Rozwojowa*, 20(3), 23–33. <http://doi.org/10.4467/20843879PR.15.014.3803>

Cipora, K., Szczygieł, M., Hohol, M. (2014). Palce, które liczą: znaczenie liczenia na palcach dla poznania matematycznego u człowieka dorosłego. *Psychologia-Etologia-Genetyka*, 30, 59–73.

Preprint:

Hohol, M., Willmes, K., Nęcka, E., Brożek, B., Nuerk, H.-C., Cipora, K. (2020). Professional mathematicians do not differ from others in analogue magnitude representation: Evidence from prevalence of numerical distance and size effects. *PsyArXiv* (preprint). <https://doi.org/10.31234/osf.io/evzpa> [w chwili składania wniosku artykuł jest w rewizji w czasopiśmie *Scientific Reports*, IF=4.011]

Monografia:

Brożek, B., Hohol, M. (2014). *Umysł matematyczny*. Kraków: Copernicus Center Press (wydanie drugie: 2016, wydanie trzecie poprawione: 2017).

Rozdziały:

Hohol, M., Cipora, K. (2015). Perspektywy i granice ucieleśnionego poznania matematycznego. W: R. Murawski (red.), *Filozofia matematyki i informatyki* (ss. 119–140). Kraków: Copernicus Center Press.

Hohol, M. (2013). The normativity of mathematics: A neurocognitive approach. W: J. Stelmach, B. Brożek, M. Hohol (red.), *The many faces of normativity* (ss. 191–222). Kraków: Copernicus Center Press.

Poznanie geometryczne

Drugim obszarem moich badań nad poznaniem matematycznym jest przetwarzanie geometrii. Tematowi temu poświęcone jest moje zasadnicze osiągnięcie habilitacyjne, przedstawione w książce *Foundations of geometric cognition* (London–New York: Routledge, 2020). Pracując nad tą książką opublikowałem wraz z prof. Marcinem Miłkowskim (IFiS PAN) w czasopiśmie *Foundations of Science* artykuł na temat artefaktów poznawczych w geometrii, a konkretnie diagramów i języka formuł (Hohol i Miłkowski, 2020), oraz poświęcony przetwarzaniu abstrakcyjnych pojęć rozdział w książce (Hohol, 2018) na zaproszenie jej redaktorów – prof. Romana Murawskiego (UAM) i prof. Jana Woleńskiego (UJ). Nie będę tutaj przybliżał treści tych prac, ponieważ poruszane w nich zagadnienia zostały przedstawione w znacznie pełniejszy i bardziej systematyczny sposób w książce *Foundations of geometric cognition*, a w konsekwencji zarysowane w punkcie 4 autoreferatu.

Aspektem poznania geometrycznego, wokół którego koncentrują się prowadzone przeze mnie obecnie badania, jest orientacja przestrzenna na podstawie geometrii środowiska. Interesują mnie w szczególności dwa pytania badawcze: po pierwsze, jak daleko sięgają filogenetyczne źródła tej zdolności; po drugie, jakie mechanizmy poznawcze odpowiadają za nią u zwierząt ewolucyjnie oddalonych od *H. sapiens*, szczególnie owadów. W badaniach z zakresu psychologii porównawczej współpracuję z dr. Jackiem Francikowskim, mgr. Bartoszem Baranem, dr. Michałem Krzyżowskim (wszyscy z Uniwersytetu Śląskiego) oraz dr. Zoltánem Rádaiem (Uniwersytet w Debreczynie). Wspólnie ze współpracownikami z UŚ opublikowaliśmy w czasopiśmie *Frontiers in Behavioral Neuroscience* artykuł teoretyczny na temat ograniczeń niskopoziomowych i skoncentrowanych jedynie na modalności wzrokowej modeli, w szczególności dopasowywania obrazów (ang. *view-matching*), mających wyjaśniać zachowania nawigacyjne owadów (Hohol et al., 2017).

Następnie, wspólnie z Zoltánem Rádai, podjęliśmy się przeprowadzenia badania na świerszczach domowych (*Acheta domestica*), którego celem było przetestowanie możliwości orientacji przestrzennej opartej na geometrii środowiska przez owady bez dostępu do jakichkolwiek wskazówek wzrokowych. Aby zapewnić porównywalność wyników z badaniami przeprowadzonymi na innych zwierzętach, zastosowaliśmy paradygmat szukania środka (Tommasi, Vallortigara, Zanforlin, 1997), który użyty został po raz pierwszy w badaniu na kurach domowych (*Gallus gallus domestica*), a następnie powtórzony w eksperymentach z udziałem innych ptaków oraz gryzoni. Nikt dotąd nie wykorzystał go jednak w badaniach zachowań bezkręgowców. Paradygmat szukania środka zaimplementowaliśmy w skonstruowanej przez nas aparaturze z podgrzewaną areną i położonym centralnie chłodnym punktem-celem (Wessnitzer, Mangan, Webb, 2008). Rozwiązanie to określane jest jako układ Tennessee Williamsa i stanowi „suchy” analog labiryntu wodnego Morrisa, dostosowany do charakterystyki behawioralnej świerszczy. Badanie przeprowadzone zostało w kompletnej ciemności, aby zapobiec używaniu mechanizmu dopasowywania obrazów lub innych mechanizmów bazujących na wzroku (Wehner i Räber, 1979; Wystrach, Cheng, Sosa, Beugnon, 2011). Wyeliminowaliśmy również wskazówki słuchowe i węchowe, co zmusiło owady do polegania jedynie na percepcji haptycznej (dotykowej).

Testy przeprowadziliśmy na czterech arenach: okrągłej, kwadratowej, trójkątnej oraz asymetrycznej czworokątnej (trapezoidalnej). Analizy wyników wykazały, że regularność geometryczna areny (kształty symetryczne vs kształt niesymetryczny) wpływa istotnie na

uczenie się znajdowania środka zarówno pod względem czasu spędzanego w chłodnym punkcie, jak i czasu potrzebnego na jego lokalizację. Wyniki naszego badania wskazują na możliwość orientacji przestrzennej opartej na niewzrokowej wewnętrznej reprezentacji geometrii środowiska lub stosowaniu przez owady nieprzestrzennej strategii poszukiwania. Artykuł nie został jeszcze opublikowany – znajduje się w recenzji. Jego preprint udostępniliśmy na *BioRxiv* (Baran, Krzyżowski, Rádai, Francikowski, Hohol, 2020). Kolejne etapy prowadzonego badania, począwszy od konstrukcji aparatury, przez układ eksperymentalny, zbieranie danych, ich analizę, aż po interpretację, dyskutowaliśmy na kilku międzynarodowych konferencjach psychologicznych i neurobiologicznych. Nasze obecne badania koncentrują się na testowaniu obydwu członów alternatywy wskazanej w dyskusji wyników. Naszym zdaniem, silnym argumentem na rzecz istnienia wewnętrznej niewzrokowej reprezentacji przestrzeni u owadów będzie obserwacja transferu umiejętności odnajdowania środka wyuczonej na jednej regularnej geometrycznej arenie na inną regularną arenę. Wspomniane w tej sekcji prace mojego autorstwa i współautorstwa stanowią rezultaty kierowanego przeze mnie grantu „Mechanizmy poznania geometrycznego”, który sfinansowany został przez Narodowe Centrum Nauki w programie OPUS.

Prace dotyczące powyższej sekcji:

Artykuły:

- Hohol, M., Miłkowski, M. (2019). Cognitive artifacts for geometric reasoning. *Foundations of Science*, 24(4), 657–680. <https://doi.org/10.1007/s10699-019-09603-w> [IF=1.065]
- Hohol, M., Baran, B., Krzyżowski, M., Francikowski, J. (2017). Does spatial navigation have a blind-spot? Visiocentrism is not enough to explain the navigational behavior comprehensively. *Frontiers in Behavioral Neuroscience*, 11(154). <https://doi.org/10.3389/fnbeh.2017.00154> [IF=3.104]

Preprint:

- Baran, B., Krzyżowski, M., Rádai, Z., Francikowski, J., Hohol, M. (2020). Layout symmetry facilitates spatial learning in the house cricket, *Acheta domesticus*, in the absence of visual cues. *BioRxiv* [Preprint]. <https://doi.org/10.1101/2019.12.28.886655>

Rozdział:

- Hohol, M. (2018). Od przestrzeni do abstrakcyjnych pojęć: W stronę teorii poznania geometrycznego. W: R. Murawski, J. Woleński (red.), *Problemy filozofii matematyki i informatyki* (ss. 129–143), Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Adama Mickiewicza.

Pojęciowe i metodologiczne zagadnienia psychologii i neuronauki poznawczej

Prócz omówionych wyżej badań nad poznaniem matematycznym moje zainteresowania naukowe dotyczą również pojęciowych i metodologicznych zagadnień psychologii i neuronauki poznawczej. Zainteresowania te sięgają mojej rozprawy doktorskiej, której przekształcona wersja ukazała się jako monografia *Wyjaśnić umysł: Struktura teorii neurokognitywnych* (Hohol, 2013; jej drugie poprawione i uaktualnione wydanie ukazało się w 2017 r.). W pracy tej przedyskutowałem nie tylko kluczowe aspekty i metody neuronauki poznawczej, ale także wzbogacone o dodatkowe założenia teoretyczne paradygmaty, w których obecnie rozwija się ta powstała na skrzyżowaniu psychologii poznawczej i neurobiologii dyscyplina. Do paradygmatów tych należą ucieleśnione poznanie oraz psychologia ewolucyjna. Jeśli chodzi o pierwszy z nich, to oprócz omówionych wyżej prac na temat ucieleśnienia matematyki, inne moje prace koncentrowały się na ucieleśnionym poznaniu społecznym (Hohol i Urbańczyk, 2014; Hohol, 2016) oraz na ucieleśnieniu języka (Kwiatek i Hohol, 2016a, 2016b; na temat alternatywnego względem ucieleśnienia poznawczego podejścia do języka por. Brożek i Hohol, 2015). W kwestii pojęciowych i metodologicznych problemów psychologii ewolucyjnej jestem współautorem rozdziału (Hohol i Wołoszyn, 2016). Wreszcie, tematyka, którą podjąłem po raz pierwszy w książce *Wyjaśnić umysł: Struktura teorii neurokognitywnych*, a kontynuowałem w późniejszych pracach, dotyczy wyjaśniania oraz unifikacji teoretycznej.

Pojęciem kluczowym dla wyjaśniania i unifikacji teoretycznej we współczesnej psychologii i neuronauce poznawczej jest „mechanizm” (Craver, 2007). Choć często powtarza się, że we wczesnej psychologii poznawczej dominowała perspektywa funkcjonalistyczna (np. Marr, 1982), jak wskazujemy z prof. Marcinem Miłkowskim i dr. Przemysławem Nowakowskim w artykule wprowadzającym do numeru specjalnego czasopisma *Theory & Psychology*, pionierzy badań nad zjawiskami poznawczymi, tacy jak Boring, Hebb czy Neisser, uważali, że wyjaśnianie tych zjawisk ma miejsce poprzez odkrywanie i opisywanie stojących za nimi mechanizmów (Miłkowski, Hohol, Nowakowski, 2019a). Samo pojęcie mechanizmu oraz wyjaśniania mechanistycznego stanowi przedmiot intensywnych debat toczących się w ostatnich latach (por. Hohol, 2018; Hohol i Furman, 2016). Większość zaangażowanych w nie badaczy zgadza się jednak, że mechanizmy to układy złożone z wielu komponentów, które jako całości charakteryzują się określonymi dyspozycjami, czyli wzorcami działania. Wyjaśnienie tych dyspozycji odbywa się przez opis przyczynowy, jako skutek interakcji między komponentami mechanizmu, jego ogólnej struktury oraz dynamiki zachodzących w nim procesów (Miłkowski, 2013).

Mechanistyczny punkt widzenia postrzegany jest również jako przydatny w unifikacji teoretycznej (Hohol, 2014). W tym kontekście warto wspomnieć słowa Michaela Gazzanigi (1995), jednego z „założycieli” neuronauki poznawczej, że dyscyplina ta „łączy mózg i poznanie w sposób mechanistyczny” (s. xiii). Jako redaktor gościnny współredagowałem dwa numery specjalne czasopism naukowych, poświęconych problematyce mechanicyzmu, ze szczególnym uwzględnieniem unifikacji teoretycznej. W czasopiśmie *Theory & Psychology* ukazał się numer specjalny zatytułowany „Mechanisms in psychology: The road towards unity?” pod redakcją prof. Marcina Miłkowskiego, dr. Przemysława Nowakowskiego oraz moją (2019b). W jego skład weszły artykuły autorstwa badaczy takich jak: dr Eric Hochstein (University of Victoria), dr Marek Pokropski (UW), prof. William Bechtel (Uniwersytet Kalifornijski w San Diego), dr Mark Povich (Washington University, St. Louis), dr Paweł Gładziejewski (UMK), prof. Sabrina Golonka i prof. Andrew Wilson (Leeds Beckett University), prof. Matteo Colombo (Tilburg University) i prof. Andreas Heinz (Charité – Uniwersytet Medyczny w Berlinie) oraz prof. Lawrence Shapiro (University of Wisconsin–Madison). W czasopiśmie *Synthese* ukazują się natomiast sukcesywnie artykuły z numeru specjalnego zatytułowanego „Explanations in cognitive science: unification vs pluralism”, pod redakcją prof. Miłkowskiego oraz moją (2020). Autorkami i autorami opublikowanych dotychczas artykułów są: dr Sidney Carls-Diamante (Instytut Badań na Poznaniem i Ewolucją Konrada Lorentza w Klosterneuburgu), dr Gabe Dupre (Uniwersytet Kalifornijski w Los Angeles), dr Lotem Elber-Dorozko i prof. Oron Shagrir (Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie), dr Haydar Oğuz Erdin (Bogazici University), prof. Marcin Miłkowski i dr Przemysław Nowakowski (IFiS PAN), prof. Jens Harbecke (Witten/Herdecke University), dr Vicente Raja (Western University, Kanada) oraz dr J. Brendan Ritchie (KU Leuven).

Oprócz wspomnianych wyżej prac, pojęciowe i metodologiczne zagadnienia mechanicyzmu w psychologii i neuronauce poznawczej były przedmiotem artykułu mojego współautorstwa, opublikowanego we *Frontiers in Psychology* (Miłkowski, Clowes et al., 2018). Artykuł ten stanowi podsumowanie prac Europejskiej Sieci Badań nad Inteligencją Społeczną SINTELNET i wskazuje, że podejście mechanistyczne jest odpowiednie nie tylko w odniesieniu do dobrze rozpoznanych już dziedzin, takich jak neurobiologia komórkowa, psychologia i neuronauka poznawcza czy neuronauka obliczeniowa, ale również tzw. szerokich systemów poznawczych, obejmujących ciało, artefakty poznawcze, a nawet grupy.

Ostatnim aspektem moich zainteresowań dotyczących problematyki pojęciowej i metodologicznej jest replikowalność i reprodukowalność badań. Kryzys replikacyjny został dobrze rozpoznany w odniesieniu do badań behawioralnych (Zwaan, Etz, Lucas, Donnellan, 2018) oraz neuroobrazowych (Poldrack et al., 2017), wdrażane są także strategie mające mu zapobiec (Anderson i Maxwell, 2017). Z drugiej strony, społeczność naukowców skupionych na replikacjach (czy ogólniej: na otwartej nauce), wydaje się nie dostrzegać problemów z powtarzalnością modeli (symulacji) obliczeniowych. Modelowanie stanowi nieprzerwanie jedną z metod psychologii i kognitywistyki od czasu „rewolucji poznawczej”, która rozpoczęła się w drugiej połowie lat pięćdziesiątych. Coraz więcej badaczy zgadza się ponadto z tezą, że najlepsze teorie na temat funkcjonowania mózgu i przebiegu procesów poznawczych to te zaimplementowane w modelach obliczeniowych (Thagard, 2005). W związku z tym, kryzys powtarzalności modeli obliczeniowych postrzegany może być jako kryzys wiarygodności osiągnięć dużej części nauk o mózgu i poznaniu.

Zagadnieniu temu poświęciliśmy wraz z prof. Marcinem Miłkowskim oraz dr. Witoldem Henslem (Uniwersytet w Białymstoku) artykuł opublikowany w *Journal of Computational Neuroscience* – oficjalnym czasopiśmie Organization for Computational Neuroscience. Wskazujemy w nim na różne funkcje replikacji i reprodukcji modeli w neuronauce obliczeniowej oraz różne przyczyny niepowodzeń w ich uzyskaniu. Przez replikację rozumiemy w tym kontekście możliwość uzyskania przez niezależnych badaczy tego samego wyniku przy użyciu oryginalnego kodu oraz danych. Przez reprodukcję zaś, możliwość zrekonstruowania modelu przez niezależnych badaczy na podstawie informacji zawartych w publikacji (i ew. materiałach uzupełniających). Replikowalność modeli wspierana powinna być udostępnianiem kodu i danych w otwartych repozytoriach. Jak wykazał nasz przegląd, jedynie 32% z 242 oryginalnych artykułów badawczych (wykluczaliśmy prezentacje metod i oprogramowania), opublikowanych między styczniem 2016 r. a wrześniem 2018 r. w trzech prominentnych czasopismach neuroobliczeniowych (*Journal of Computational Neuroscience*, *Biological Cybernetics* oraz *Frontiers in Neuroinformatics*) zawierała informacje o udostępnionym kodzie. Argumentujemy jednak, że poprawa w tym zakresie, choć ogólnie bardzo ważna, nie jest wystarczająca dla zapewnienia reprodukowalności modeli. Niską reprodukowalność modeli postrzegamy zresztą jako większe zagrożenie dla postępu naukowego niż niską replikowalność. Wskazujemy, że kłopoty z reprodukowalnością wynikają przede wszystkim z pomijania relewantnych informacji w treści artykułów. Co za tym idzie,

czasopisma powinny wypracować nie tylko lepsze standardy w kwestii udostępniania kodu i danych, ale również w kwestii prezentacji samych modeli obliczeniowych w publikacjach.

Prace dotyczące powyższej sekcji:

Monografia:

Hohol, M. (2013). *Wyjaśnić umysł: Struktura teorii neurokognitywnych*. Kraków: Copernicus Center Press (drugie wydanie poprawione: 2017).

Artykuły:

Miłkowski, M., Hohol, M., Nowakowski, P. (2019a). Mechanisms in psychology: The road towards unity? *Theory & Psychology*, 29(5), 567–578.

<https://doi.org/10.1177/0959354319875218> [IF=1.178]

Miłkowski, M., Hensel, W.M., Hohol, M. (2018). Replicability or reproducibility? On the replication crisis in computational neuroscience and sharing only relevant detail. *Journal of Computational Neuroscience*. 45(3), 163–172.

<https://doi.org/10.1007/s10827-018-0702-z> [IF=1.712]

Miłkowski, M., Clowes, R.W., Rucińska, Z., Przegalińska, A., Zawidzki, T., Gies, A., Krueger, J., McGann, M., Afeltowicz, Ł., Wachowski, W.M., Stjernberg, F., Loughlin, V., Hohol, M. (2018). From wide cognition to mechanisms: A silent revolution. *Frontiers in Psychology*, 9(2393). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.02393> [IF=2.323]

Brożek, B., Hohol, M. (2015). Language as a tool: An insight from cognitive science. *Studia Humana*, 4(2), 16–25. <http://doi.org/10.1515/sh-2015-0013>

Rozdziały w książkach

Hohol, M. (2018). Podstawy neuronauki poznawczej. W: B. Brożek, Ł. Kurek, J. Stelmach (red.), *Prawo i nauki kognitywne* (ss. 13–36), Warszawa: Wolters Kluwer.

Kwiatek, Ł., Hohol, M. (2016a). Embodiment, simulation and the meaning of language. W: J. Stelmach, B. Brożek, Ł. Kwiatek (red.), *The normative mind* (ss. 111–133). Kraków: Copernicus Center Press.

Kwiatek, Ł., Hohol, M. (2016b). The emergence of symbolic communication: From intentional gestures of great apes to human language. W: J. Stelmach, B. Brożek i Ł. Kurek (red.), *The emergence of normative orders* (ss. 184–213). Kraków: Copernicus Center Press.

Hohol, M., Furman, M. (2016). On explanation in neuroscience: The mechanistic framework. W: M. Heller, B. Brożek, M. Hohol (red.), *The concept of explanation* (ss. 207–235). Kraków: Copernicus Center Press.

- Hohol, M., Wołoszyn, K. (2016). Ewolucja umysłu. W: M. Heller, J. Życiński, ze współautorami: M. Hohol, Ł. Kwiatek, T. Pietrucha, K. Wołoszyn, *Dylematy ewolucji* (ss. 293–310). Wyd. 2. Kraków: Copernicus Center Press.
- Hohol, M. (2016), Ucieleśniony podmiot: od wspólnej różnorodności do „ja”. W: A. Warmbier (red.), *Spór o podmiotowość: Perspektywa interdyscyplinarna* (ss. 177–190). Kraków: Księgarnia Akademicka.
- Hohol, M. (2014). W stronę zunifikowanej wiedzy o umyśle: teorie międzydziedzinowe w naukach kognitywnych. W: J. Woleński, A. Dąbrowski (red.), *Metodologiczne i teoretyczne problemy kognitywistyki* (ss. 89–111). Kraków: Copernicus Center Press.
- Hohol, M., Urbańczyk, P. (2014). Some remarks on embodied-embedded social cognition. W: J. Dębiec, M. Heller, B. Brożek, J. LeDoux (red.), *Emotional brain revisited* (ss. 279–302). Kraków: Copernicus Center Press.

Redakcje numerów specjalnych czasopism

- Miłkowski, M., Hohol, M. (red.) (2020). Explanations in cognitive science: unification vs pluralism. *Synthese* [IF=1.262]; 75% przewidzianych artykułów dostępnych jest już na zasadzie online first na stronie czasopisma (<https://www.springer.com/journal/11229>); pozostałe ukażą się nie później niż w lipcu 2020.
- Miłkowski, M., Hohol, M., Nowakowski, P. (red.) (2019b). Mechanisms in psychology: The road towards unity?. *Theory & Psychology*, 29(5), 567–735 [IF=1.178].

Inne prace interdyscyplinarne

Oprócz wszystkich omówionych powyżej aktywności i osiągnięć uważam warte odnotowania, że współredagowałem kilka tomów książkowych. Jeden z nich dotyczy pojęcia wyjaśniania w różnych dyscyplinach nauki: przyrodniczych, humanistycznych i społecznych (Brożek, Heller, Hohol, 2017). Dwie pozostałe książki dotyczą natomiast zagadnienia powstawania norm w różnych sferach aktywności człowieka, takich jak język, matematyka, moralność czy prawo (Brożek, Hohol, Kurek, Stelmach, 2014; Stelmach, Brożek, Hohol, 2013).

Prace dotyczące powyższej sekcji:

- Brożek, B., Heller, M., Hohol, M. (red.). (2017). *The concept of explanation*. Kraków: Copernicus Center Press.
- Brożek, B., Hohol, M., Kurek, Ł., Stelmach, J. (red.). (2013). *W świecie powinności*. Kraków: Copernicus Center Press.

Stelmach, J., Brożek, B., Hohol, M. (red.). (2013). *The many faces of normativity*. Kraków: Copernicus Center Press.

Nagrody i wyróżnienia

Moje dotychczasowe wysiłki badawcze zostały docenione: Nagrodą Naukową Polityki (2013), Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla wybitnych młodych naukowców (2013–2016) oraz Stypendium „Start” Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej (2018).

Granty badawcze

Prócz kierowanego przeze mnie grantu Narodowego Centrum Nauki OPUS „Mechanizmy poznania geometrycznego” (2016–2020) pracowałem jako wykonawca w następujących grantach badawczych: „Kognitywistyka w poszukiwaniu jedności: unifikacja i integracja badań interdyscyplinarnych” (NCN SONATA BIS, 2015–2020), „Law & Neuroscience” (FNP „Mistrz”, 2015–2016), „Naturalizacja prawa” (NCN MAESTRO, 2012–2013), a także „The Limits of Scientific Explanation” (John Templeton Foundation, 2011–2014).

Literatura cytowana (z pominięciem prac mojego współ/autorstwa wskazanych powyżej):

- Anderson, S. F., Maxwell, S. E. (2017). Addressing the “replication crisis”: Using original studies to design replication studies with appropriate statistical power. *Multivariate Behavioral Research*, 52(3), 305–324. <https://doi.org/10.1080/00273171.2017.1289361>
- Andres, M., Di Luca, S., Pesenti, M. (2008). Finger counting: The missing tool? *Behavioral and Brain Sciences*, 31(06), 642–643. <https://doi.org/10.1017/S0140525X08005578>
- Cipora, K., Haman, M., Domahs, F., Nuerk, H.-C. (2020). On the development of space-number relations: Linguistic and cognitive determinants, influences, and associations. *Frontiers in Psychology*, 11(182). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00182>
- Craver, C. F. (2007). *Explaining the brain: Mechanisms and the mosaic unity of neuroscience*. Oxford: Oxford University Press.
- De Smedt, B., Verschaffel, L., Ghesquière, P. (2009). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 469–479. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.01.010>
- Dębiec, J. (2002). *Mózg i matematyka*. Tarnów: Biblos.
- Dehaene, S. (2011). *The number sense* (wyd. poprawione). Oxford: Oxford University Press.
- Dehaene, S., Bossini, S., Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number

- magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, 122(3), 371–396. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.3.371>
- Fischer, M. H. (2008). Finger counting habits modulate spatial-numerical associations. *Cortex*, 44(4), 386–392. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.004>
- Gazzaniga, M. S. (1995). *The cognitive neurosciences*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Goldinger, S. D., Papesh, M. H., Barnhart, A. S., Hansen, W. A., Hout, M. C. (2016). The poverty of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 23(4), 959–978. <https://doi.org/10.3758/s13423-015-0860-1>
- Lakoff, G., Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from*. New York: Basic Books.
- Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., Henik, A. (2017). From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, 40(e164). <https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960>
- Lindemann, O., Alipour, A., Fischer, M. H. (2011). Finger counting habits in Middle Eastern and Western individuals: An online survey. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 42(4), 566–578. <https://doi.org/10.1177/0022022111406254>
- Marr, D. (1982). *Vision: A computational investigation into the human representation and processing of visual information*. New York: Freeman.
- Miłkowski, M. (2013). *Explaining the computational mind*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Moyer, R. S., Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature*, 215(5109), 1519–1520. <https://doi.org/10.1038/2151519a0>
- Mussolin, C., Mejias, S., Noël, M.-P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition*, 115(1), 10–25. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2009.10.006>
- Patro, K., Nuerk, H.-C., Cress, U., Haman, M. (2014). How number-space relationships are assessed before formal schooling: A taxonomy proposal. *Frontiers in Psychology*, 5(419). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00419>
- Penner-Wilger, M., Anderson, M. L. (2013). The relation between finger gnosis and mathematical ability: why redeployment of neural circuits best explains the finding. *Frontiers in Psychology*, 4(877). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00877>
- Poldrack, R. A., Baker, C. I., Durnez, J., Gorgolewski, K. J., Matthews, P. M., Munafò, M. R., ... Yarkoni, T. (2017). Scanning the horizon: Towards transparent and reproducible neuroimaging research. *Nature Reviews Neuroscience*, 18(2), 115–126. <https://doi.org/10.1038/nrn.2016.167>
- Preacher, K. J., Rucker, D. D., MacCallum, R. C., Nicewander, W. A. (2005). Use of the

- extreme groups approach: A Critical reexamination and new recommendations. *Psychological Methods*, 10(2), 178–192. <https://doi.org/10.1037/1082-989X.10.2.178>
- Rouder, J. N., Haaf, J. M. (2018). Power, dominance, and constraint: A note on the appeal of different design traditions. *Advances in Methods and Practices in Psychological Science*, 1(1), 19–26. <https://doi.org/10.1177/2515245917745058>
- Rousselle, L., Noël, M.-P. (2007). Basic numerical skills in children with mathematics learning disabilities: A comparison of symbolic vs non-symbolic number magnitude processing. *Cognition*, 102(3), 361–395. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.01.005>
- Schild, U., Bauch, A., Nuerk, H. (2020). A Finger-based numerical training failed to improve arithmetic skills in kindergarten children beyond effects of an active non-numerical control training. *Frontiers in Psychology*, 11(529). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00529>
- Sobańska, M., Łojek, E. (2011). *Struktura umysłu a wykonywanie prostych działań arytmetycznych: Badania neuropsychologiczne*. Warszawa: Warszawa: Difin.
- Thagard, P. (2005). *Mind: Introduction to cognitive science*. Cambridge, MA: The MIT Press.
- Tommasi, L., Vallortigara, G., Zanforlin, M. (1997). Young chickens learn to localize the centre of a spatial environment. *Journal of Comparative Physiology A: Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 180(5), 567–572. <https://doi.org/10.1007/s003590050073>
- Wasner, M., Moeller, K., Fischer, M. H., Nuerk, H.-C. (2014). Aspects of situated cognition in embodied numerosity: the case of finger counting. *Cognitive Processing*, 15(3), 317–328. <https://doi.org/10.1007/s10339-014-0599-z>
- Wehner, R., Räber, F. (1979). Visual spatial memory in desert ants, *Cataglyphis bicolor*. *Experientia*, 35(12), 1569–1571. <https://doi.org/10.1007/BF01953197>
- Wessnitzer, J., Mangan, M., Webb, B. (2008). Place memory in crickets. *Proceedings of the Royal Society B*, 275(1637), 915–921. <https://doi.org/10.1098/rspb.2007.1647>
- Wood, G., Willmes, K., Nuerk, H.-C., Fischer, M. H. (2008). On the cognitive link between space and number: A meta-analysis of the SNARC effect. *Psychology Science Quarterly*, 50(4), 489–525.
- Wystrach, A., Cheng, K., Sosa, S., Beugnon, G. (2011). Geometry, features, and panoramic views: Ants in rectangular arenas. *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*, 37(4), 420–435. <https://doi.org/10.1037/a0023886>
- Zwaan, R. A., Etz, A., Lucas, R. E., Donnellan, M. B. (2018). Making replication mainstream. *Behavioral and Brain Sciences*, 41, 1–13. <https://doi.org/10.1017/S0140525X17001972>

