

Autoreferat

Dr Kamil Korzekwa

21 lipca 2022

Spis treści

1	Imię i nazwisko	2
2	Dyplomy i stopnie naukowe	2
3	Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych	2
4	Omówienie osiągnięć	2
4.1	Formalne określenie osiągnięć	2
4.2	Przegląd cyklu <i>Optymalizacja przetwarzania informacji kwantowej w obecności więzów</i>	4
4.2.1	Wstęp	4
4.2.2	Motywacja i cele naukowe	5
4.2.3	Streszczenie wyników	8
4.3	Wyniki dotyczące więzów termodynamicznych	11
4.3.1	Optymalne przetwarzanie poza granicą termodynamiczną	11
4.3.2	Termodynamiczne konsekwencje zasady superpozycji	19
4.4	Wyniki dotyczące więzów pamięci	22
4.4.1	Optymalne przetwarzanie termodynamiczne bez pamięci	22
4.4.2	Przewaga kwantowa dla procesów bezpamięciowych	28
4.5	Wyniki dotyczące więzów symetrii	32
4.5.1	Optymalne procesy o symetrii względem translacji w czasie oraz symetrii rotacyjnej	32
4.5.2	Optymalne kodowanie informacji w asymetrii	37
4.6	Wyniki dotyczące więzów klasyczności	40
4.6.1	Minimalizacja nieodwracalności procesu losowego	40
4.6.2	Strukturalne różnice pomiędzy losowością klasyczną a kwantową	45
5	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową	49
5.1	Aktywność naukowa w instytucjach badawczych	49
5.2	Artykuły spoza cyklu habilitacyjnego	50
5.3	Współpraca krajowa i międzynarodowa	51
5.4	Wykłady na konferencjach i seminariach	53
5.5	Dane bibliometryczne	55
6	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę	55
6.1	Osiągnięcia dydaktyczne	55
6.2	Osiągnięcia organizacyjne	56
6.3	Osiągnięcia popularyzujące naukę	57
7	Pozostałe osiągnięcia naukowe	58
7.1	Nagrody i stypendia	58
7.2	Wyróżnione artykuły	58

1 Imię i nazwisko

Kamil Korzekwa

2 Dyplomy i stopnie naukowe

- **Doktorat z Fizyki** – Grudzień, 2016
Uniwersytet: Imperial College London, Wielka Brytania
Promotorzy: Dr David Jennings, Prof. Terry Rudolph
Rozprawa doktorska: *Quantum coherence, thermodynamics and uncertainty relations*
- **Magister z Fizyki** – Wrzesień, 2013
Uniwersytet: Imperial College London, Wielka Brytania
Promotorzy: Dr David Jennings, Prof. Terry Rudolph
Praca magisterska: *Resource Theory of Asymmetry*
- **Magister z Fizyki (specjalność: Nanoinżynieria)** – Lipiec, 2012
Uniwersytet: Politechnika Wrocławska, Polska
Promotor: Prof. Paweł Machnikowski
Praca magisterska: *Magneto-optical Kerr effect and resonant spin amplification*
- **Licencjat z Fizyki** – Lipiec, 2010
Uniwersytet: Politechnika Wrocławska, Polska
Promotor: Prof. Paweł Machnikowski

3 Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych

- **Kierownik grupy badawczej (Adiunkt naukowy)** – Październik, 2019 - do teraz
Grupa Kwantowych Zasobów
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński, Polska
- **Stażysta podoktorski (Adiunkt naukowy)** – Czerwiec, 2019 - Grudzień, 2019
Grupa Nowych Kwantowych Zasobów
Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych
Uniwersytet Gdański, Polska
- **Stażysta podoktorski (Adiunkt naukowy)** – Styczeń, 2017 - Maj, 2019
Quantum Science Group
School of Physics
University of Sydney, Australia

4 Omówienie osiągnięć

4.1 Formalne określenie osiągnięć

Osiągnięcia, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, dane są przez cykl powiązanych ze sobą artykułów naukowych pt.

Optymalizacja przetwarzania informacji kwantowej w obecności więzów.

Cykl ten składa się z następujących 15 prac:

1. [H15] *Optimizing thermalizations*
Kamil Korzekwa, Matteo Lostaglio
Phys. Rev. Lett. **129**, 040602 (2022) [arXiv:2202.12616]
Liczba stron: 6+3, Punktacja ministerialna: 200, Impact factor: 8.385

2. [H14] *Continuous thermomajorization and a complete set of laws for Markovian thermal processes*
Matteo Lostaglio, Kamil Korzekwa
[Phys. Rev. A **106**, 012426 \(2022\) \[arXiv:2111.12130\]](#)
Liczba stron: 18, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
3. [H13] *Encoding classical information into quantum resources*
Kamil Korzekwa, Zbigniew Puchała, Marco Tomamichel, Karol Życzkowski
[IEEE Trans. Inf. Theory **68**, 4518 \(2022\) \[arXiv:1911.12373\]](#)
Liczba stron: 13, Punktacja ministerialna: 200, Impact factor: 2.501
4. [H12] *Fluctuation-dissipation relations for thermodynamic distillation processes*
Tanmoy Biswas, A. de Oliveira Junior, Michał Horodecki, Kamil Korzekwa
[Phys. Rev. E **105**, 054127 \(2022\) \[arXiv:2105.11759\]](#)
Liczba stron: 30, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 2.296
5. [H11] *Algebraic and geometric structures inside the Birkhoff polytope*
Grzegorz Rajchel-Mieldzioć, Kamil Korzekwa, Zbigniew Puchała, Karol Życzkowski
[J. Math. Phys. **63**, 012202 \(2022\) \[arXiv:2101.11288\]](#)
Liczba stron: 18, Punktacja ministerialna: 70, Impact factor: 1.488
6. [H10] *Dephasing superchannels*
Zbigniew Puchała, Kamil Korzekwa, Roberto Salazar, Paweł Horodecki, Karol Życzkowski
[Phys. Rev. A **104**, 052611 \(2021\) \[arXiv:2107.06585\]](#)
Liczba stron: 12, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
7. [H9] *Quantum advantage in simulating stochastic processes*
Kamil Korzekwa, Matteo Lostaglio
[Phys. Rev. X **11**, 021019 \(2021\) \[arXiv:2005.02403\]](#)
Liczba stron: 20, Punktacja ministerialna: 200, Impact factor: 12.577
8. [H8] *Robustness of Noether's principle: Maximal disconnects between conservation laws and symmetries in quantum theory*
Cristina Cîrstoiu, Kamil Korzekwa, David Jennings
[Phys. Rev. X **10**, 041035 \(2020\) \[arXiv:1908.04254\]](#)
Liczba stron: 41, Punktacja ministerialna: 200, Impact factor: 12.577
9. [H7] *Distinguishing classically indistinguishable states and channels*
Kamil Korzekwa, Stanisław Czachórski, Zbigniew Puchała, Karol Życzkowski
[J. Phys. A: Math. Theor. **52**, 475303 \(2019\) \[arXiv:1812.09083\]](#)
Liczba stron: 43, Punktacja ministerialna: 70, Impact factor: 2.110
10. [H6] *Avoiding irreversibility: engineering resonant conversions of quantum resources*
Kamil Korzekwa, Christopher T. Chubb, Marco Tomamichel
[Phys. Rev. Lett. **122**, 110403 \(2019\) \[arXiv:1810.02366\]](#)
Liczba stron: 6+1, Punktacja ministerialna: 200, Impact factor: 8.385
11. [H5] *Moderate deviation analysis of majorisation-based resource interconversion*
Christopher T. Chubb, Marco Tomamichel, Kamil Korzekwa
[Phys. Rev. A **99**, 032332 \(2019\) \[arXiv:1809.07778\]](#)
Liczba stron: 14, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
12. [H4] *Beyond the thermodynamic limit: finite-size corrections to state interconversion rates*
Christopher T. Chubb, Marco Tomamichel, Kamil Korzekwa
[Quantum **2**, 108 \(2018\) \[arXiv:1711.01193\]](#)
Liczba stron: 32, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 5.381
13. [H3] *Coharifying quantum channels*
Kamil Korzekwa, Stanisław Czachórski, Zbigniew Puchała, Karol Życzkowski

New J. Phys. **20**, 043028 (2018) [arXiv:1710.04228]

Liczba stron: 27, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 3.539

14. [H2] *Markovian evolution of quantum coherence under symmetric dynamics*

Matteo Lostaglio, Kamil Korzekwa, Antony Milne

Phys. Rev. A **96**, 032109 (2017) [arXiv:1703.01826]

Liczba stron: 20, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777

15. [H1] *Structure of the thermodynamic arrow of time in classical and quantum theories*

Kamil Korzekwa

Phys. Rev. A **95**, 052318 (2017) [arXiv:1609.05910]

Liczba stron: 13, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777

Innym znaczącym osiągnięciem naukowym jest stworzenie i prowadzenie Grupy Badawczej Kwantowych Zasobów, założonej na Uniwersytecie Jagiellońskim w styczniu 2020 i składającej się z lidera grupy, trzech stażystów podoktorskich i jednego doktoranta. Podczas pierwszych 2.5 roku działalności, członkowie grupy opublikowali 16 artykułów w czasopismach naukowych (oraz 3 preprinty w serwisie arXiv, które aktualnie są w recenzji), a także wygłosili 22 wykłady i zaprezentowali 9 plakatów na konferencjach i seminariach. Dokładne szczegóły dotyczące pracy grupy można znaleźć na jej oficjalnej stronie quantum-resources.com.

4.2 Przegląd cyklu *Optymalizacja przetwarzania informacji kwantowej w obecności więzów*

4.2.1 Wstęp

Zadaniem fizyki jest opisywanie naszej rzeczywistości poprzez odróżnienie zdarzeń, które mogą się wydarzyć, od tych, które są niemożliwe. W pewnym sensie możemy myśleć o prawach fizyki jako więzach ograniczających nieskończony zbiór możliwości do jednej prawdziwej rzeczywistości. Na przykład prawo powszechnego ciężenia ogranicza możliwe ruchy obiektów: jeśli upuścimy piłkę na Ziemi, to spadnie ona na dół, a nie odleci w stronę Księżyca. Poprzez odkrywanie i studiowanie fundamentalnych więzów, takich jak zasada zachowania energii (energia nie może pojawić się znikąd) czy istnienie ostatecznej bariery szybkości (nic nie może poruszać się szybciej niż światło w próżni), pogłębialiśmy nasze rozumienie świata, co z kolei pozwala nam przewidywać przyszłość i wnioskować o przeszłości bazując na teraźniejszości.

Ale by poszerzyć to rozumienie, niekoniecznie musimy skupiać się na poszukiwaniu fundamentalnych więzów, możemy także zająć się całkiem praktycznymi ograniczeniami. Najlepszym przykładem są tu XIX-wieczne próby zaprojektowania optymalnego silnika cieplnego. Celem fizyków było wtedy skonstruowanie najbardziej wydajnej maszyny wykonującej pracę mechaniczną, więzem natomiast to, że jedynym źródłem jej energii miało być ciepło. Mimo iż problem ten wydaje się być bardzo szczególny i brak mu widocznej uniwersalności, to jego rozwiązanie dało ludzkości wgląd w naturę rzeczywistości w postaci drugiego prawa termodynamiki, tak fundamentalnego, że Eddington powiedział kiedyś [1]:

“Jeśli ktoś wytknie Ci, że Twoja teoria wszechświata stoi w sprzeczności z równaniami Maxwella – tym gorzej dla równań Maxwella. Jeśli okaże się, że jest w sprzeczności z obserwacjami – cóż, eksperymetatorzy czasem partaczą swoją robotę. Ale jeśli Twoja teoria okaże się przeczyć drugiemu prawu termodynamiki, nie daję Ci żadnej nadziei; nie pozostaje jej nic innego niż przepaść w największym upokorzeniu.”

Istotnym jest tu fakt, iż pierwsze rygorystyczne sformułowania drugiej zasady termodynamiki, przez Clausiusa w 1850 i Kelvina w 1851, były wprost wyrażone jako więzy na możliwe procesy fizyczne [2]. Pierwszy z nich napisał:

“Nie istnieją procesy termodynamiczne, których jedynym efektem jest przepływ ciepła z zimniejszego do cieplejszego rezerwuaru”,

drugi natomiast sformułował to następująco:

“Nie istnieją procesy termodynamiczne, których jedynym efektem jest całkowita zamiana ciepła pobranego z rezerwuaru w pracę.”

Dużo później, na koniec XX wieku, badania nad komunikacją w obecności więzów pozwoliły fizykom wyjaśnić jeden z najbardziej tajemniczych aspektów fizyki – zjawisko kwantowego splątania [3]. Do tego czasu, te silne i niewytłumaczalne klasycznie korelacje pomiędzy rozdzielonymi obiektami, które prześladowały Einsteina (nazywał splątanie “upiornym działaniem na odległość”), mogły być badane tylko w sposób jakościowy, ponieważ standardowy formalizm mechaniki kwantowej nie dawał fizykom recepty na kwantyfikację splątania. By rozwiązać ten problem, autorzy przełomowej pracy [4] zdecydowali się zbadać, w jaki sposób dwucząstkowy układ kwantowy może być przetworzony przez dwie rozdzielone od siebie strony, przy więzach lokalnych operacji (każda strona może dowolnie przetwarzać swoją część dwucząstkowego układu) i klasycznej komunikacji (strony mogą między sobą wymieniać dowolną liczbę klasycznych bitów). Ponieważ takie operacje LOCC (z ang. *local operations and classical communication*) nie są w stanie wytworzyć splątania, pozwoliło to na częściowe uporządkowanie dwucząstkowych stanów kwantowych ze względu na moc ich splątania¹: stan ψ , który może zostać przetransformowany w ϕ za pomocą operacji LOCC musi być bardziej splątany niż ϕ . Te rozważania pozwoliły na wprowadzenie ilościowych miar splątania i zmieniły nasze rozumienie tego zjawiska kwantowego. Kiedyś traktowane jako abstrakcyjny koncept, splątanie stało się mierzalnym obiektem, np. fizycy mogą obecnie wyliczyć ile splątania (mierzonego w ebitach) jest w danym stanie kwantowym, albo ile splątania potrzeba by wykonać dany protokół, taki jak np. kwantowa teleportacja [6, 7].

Badania podobnych problemów z więzami okazały się być owocne nie tylko w kwestii splątania, ale także w całej nowopowstającej gałęzi fizyki znanej jako teoria kwantowej informacji. Od dawna wiadano, że informatyka i fizyka są ze sobą subtelnie powiązane: poczynając od idei demona Maxwella (który używa informacji by zmniejszyć entropię [8]), przez eksperyment myślowy z silnikiem Szilarda (który zamienia informację na pracę mechaniczną [9]), aż do zasady Landauera (która ustala dolną granicę na ilość energii potrzebną do wykasowania bitu informacji [10]). Sytuacja skomplikowała się jeszcze bardziej, gdy naukowcy zaczęli rozważać konsekwencje tego, że układy fizyczne, które są nośnikami informacji, powinny przestrzegać praw mechaniki kwantowej. Podstawowe cegiełki składowe informacji – bity, które mogą przyjmować jedną z dwóch wartości 0 lub 1 – muszą wtedy zostać zastąpione kubitami (z ang. *qubit* od *quantum bit*), które mogą być w dowolnej kwantowej superpozycji 0 i 1 (a także różne kubity mogą być ze sobą nawzajem splątane). Jednocześnie, rozwój kwantowych protokołów kryptograficznych (takich jak BB84 [11] czy E91 [12]) oraz algorytmów kwantowych (jak algorytm faktoryzacji Shora [13] czy algorytm przeszukiwania Grovera [14]) jasno wskazują, że ten nowy kwantowy sposób przetwarzania informacji może mieć znaczącą przewagę w stosunku do istniejących klasycznych metod. W związku z tym, pojawiło się zapotrzebowanie na nowy formalizm matematyczny, który pozwoliłby na ilościowe badanie potencjalnych korzyści płynących z kwantowości natury.

4.2.2 Motywacja i cele naukowe

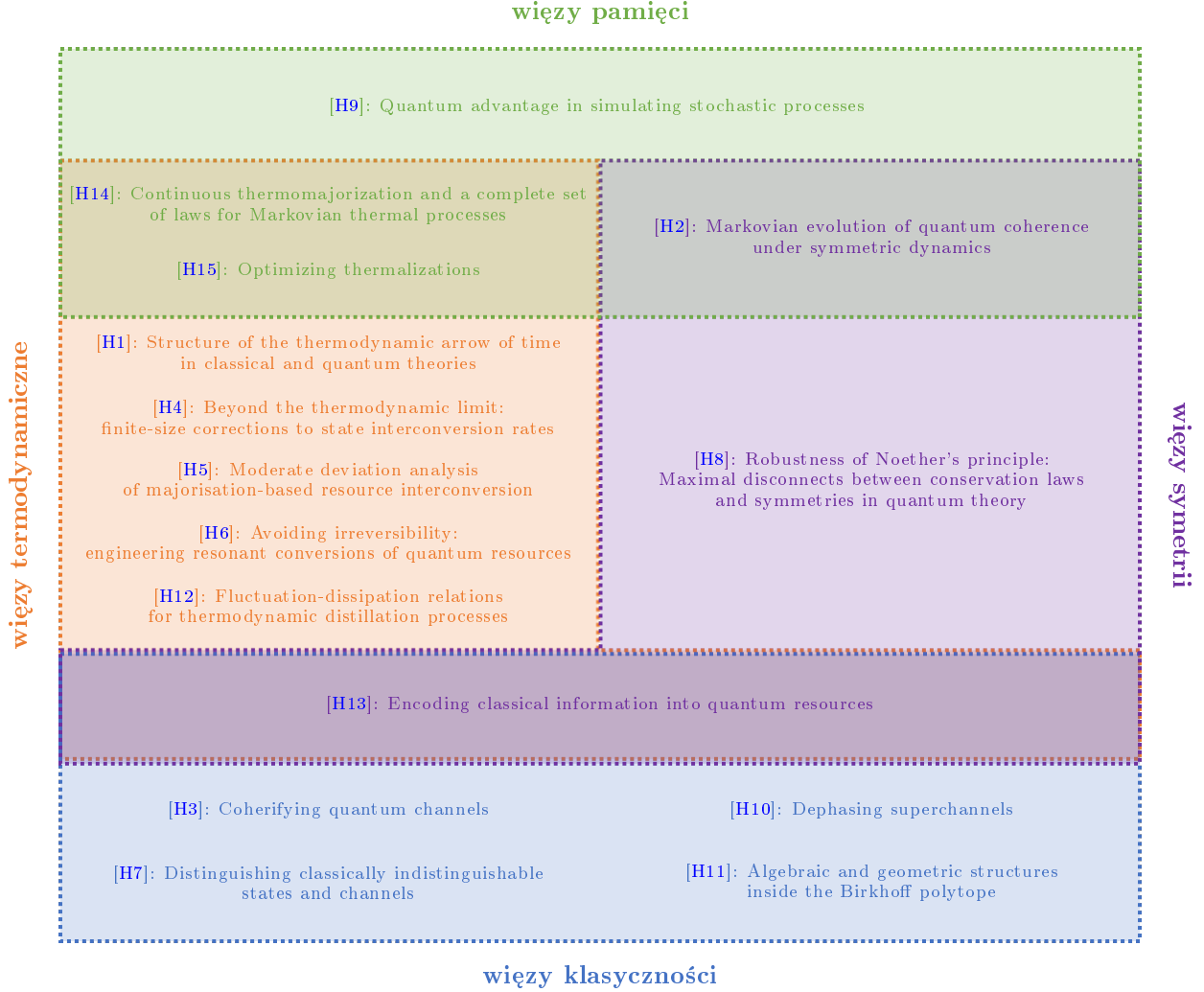
Od ponad dekady naukowcy na całym świecie rozwijają taki formalizm pod nazwą kwantowej teorii zasobów [15, 16]. Prace w cyklu *Optymalizacja kwantowego przetwarzania informacji w obecności więzów* znacząco przyczyniają się do tych wysiłków, samemu cyklowi zaś przyświecają te same cele:

- Zrozumieć, które składniki (koherencja, splątanie, itp.) i w jakich warunkach (ograniczenie do lokalnych operacji, ograniczony dostęp do energii, itp.) stają się “zasobami kwantowymi” pozwalającymi wykonać dane zadanie lepiej niż pozwala na to fizyka klasyczna.
- Scharakteryzować dozwolone transformacje zasobów w różnych warunkach, by zidentyfikować sposób najlepszego ich wykorzystania.
- Znaleźć optymalne sposoby implementacji protokołów przejawiających przewagę kwantową, biorąc pod uwagę realia eksperymentalne.

Ujmując to bardziej ogólnie, celem cyklu jest poszerzenie naszego rozumienia świata poprzez analizę problemów przetwarzania informacji kwantowej w obecności więzów, które mogą mieć podłoże zarówno fundamentalne (takie jak druga zasada termodynamiki), jak i bardziej praktyczne (jak np. ograniczony dostęp do pamięci).

Powyższe cele realizowałem w cyklu na czterech częściowo przekrywających się frontach, określonych rodzajem analizowanych więzów (zob. Rys. 1):

¹Dokładne szczegóły tego częściowego porządku zostały odkryte dopiero później przez Nielsena [5].



Rysunek 1: **Mapa cyklu.** Cykl *Optymalizacja kwantowego przetwarzania informacji w obecności wężów* skupia się na czterech rodzajach wężów: termodynamicznych, pamięci, symetrii i klasyczności. Powyższy diagram pokazuje, które z prac cyklu odnosiły się do których wężów.

1. **Wężu termodynamiczne.** W tym wypadku skupiłem się na tym, w jaki sposób stan układu kwantowego może zostać przetworzony, jeśli źródła zmian ograniczymy do oddziaływania układu z łaźnią cieplną w równowadze termodynamicznej o temperaturze T [17, 18]. Zasada zachowania energii oraz termiczność łaźni wiązą wtedy możliwe stany końcowe układu osiągalne dla danego stanu początkowego. Wszelkie dodatkowe źródła uporządkowanej energii lub ujęcia entropii mogą być także użyte, ale muszą być zamodelowane *explicite* pod postacią dodatkowych układów kwantowych (np. poprzez układ-baterię mogącą wykonać pracę). Takie ujęcie problemu pozwala na badanie ogólnych transformacji termodynamicznych przy jednoczesnym dokładnym zliczaniu wszelkich zużytych zasobów. Moimi głównymi celami naukowymi związanymi z przetwarzaniem kwantowej informacji w obecności wężów termodynamicznych były:

- (a) Zrozumieć jaki wpływ na optymalne transformacje ma wyjście poza granicę termodynamiczną, tj. rozważanie termodynamiki małej liczby układów. Formalizm termodynamiczny tradycyjnie ogranicza się do obiektów makroskopowych, dla których fluktuacje energii są zaniedbywalne w porównaniu do średniej energii obiektu [2]. Mała liczba układów kwantowych (np. tuzin cząstek gazu) w oczywisty sposób nie spełnia warunku makroskopowości, moim celem było zaś uchwycić

konsekwencje tego faktu.

- (b) Zrozumieć jaki wpływ na optymalne transformacje termodynamiczne ma zasada superpozycji, powalająca na przygotowanie przetwarzanych układów w kwantowej superpozycji stanów odpowiadających różnym energiom. Makroskopowa termodynamika zakłada, że fazy pomiędzy różnymi stanami energii w superpozycji są losowe, co w efekcie sprawia, że mamy do czynienia z niekoherentną mieszaniną stanów [2]. Jednak w doskonale kontrolowanych warunkach eksperymentalnych, mała liczba kwantowych obiektów może zachować względną fazę, co pozwala na interferencję (konstruktywną i destruktywną) podczas transformacji termodynamicznej. Moim celem było opisanie wpływu, jaki to ma na optymalne przetwarzanie kwantowej informacji.

2. **Więzy pamięci.** W tym wypadku skupiłem się na badaniu dozwolonych form przetwarzania informacji kwantowej w przypadku, gdy procesowany układ może oddziaływać z otoczeniem tylko w sposób bezpamięciowy (markowski) [19, 20], tj. transformacja układu w każdej chwili może zależeć tylko od stanu układu w tej właśnie chwili (a nie od całej historii stanów, przez które układ ewoluował). Z jednej strony, procesy markowskie zwykle bardzo dobrze opisują oddziaływanie małych kwantowych układów z makroskopowym otoczeniem [21]. Dlatego też badanie tego rodzaju więzów pozwala na opisanie, jak szum otoczenia niszczy informację kwantową zapisaną w danym układzie (alternatywnie: badania te pozwalają na charakteryzację dozwolonych form przetwarzania kwantowej informacji, gdy kontrola ograniczona jest do makroskopowych układów). Z drugiej strony, modelując pamięć *explicite* za pomocą dodatkowych układów przechowujących informację, badania nad więzami pamięci pozwalają na ocenę i kwantyfikację roli pamięci w osiąganiu optymalnego przetwarzania kwantowej informacji. Moimi głównymi celami naukowymi związanymi z więzami pamięci były:

- (a) Zrozumieć ograniczenia wynikające z braku pamięci w przypadku transformacji termodynamicznych, tj. ocenić jaką rolę odgrywa pamięć w osiąganiu optymalnej wydajności protokołów termodynamicznych. Standardowe rozważania dotyczące optymalnych transformacji termodynamicznych (np. optymalnej zamiany bitów informacji na pracę mechaniczną) zakładają, że drugie prawo termodynamiki jest w zasadzie jedynym ograniczeniem [17, 22]. Jednak, w realistycznych warunkach eksperymentalnych, kontrola nad oddziaływaniami i korelacjami pomiędzy przetwarzanym układem a łaźnią cieplną jest zwykle poważnie ograniczona. Taką ograniczoną kontrolę eksperymentatora można efektywnie zamodelować przez danie mu dostępu tylko do procesów bezpamięciowych. Moim celem było zbadanie wpływu takiej ograniczonej kontroli na osiągalną wydajność procesów termodynamicznych.
- (b) Zrozumieć jak możliwości bezpamięciowego przetwarzania klasycznej informacji zmieniają się przy założeniu, że nośniki informacji przestrzegają praw mechaniki kwantowej. Zasada superpozycji powiększa wtedy przestrzeń stanów badanego układu (poza niekoherentnymi stanami losowymi, istnieją też koherentne superpozycje różnych stanów) i ta powiększona przestrzeń może potencjalnie spełniać rolę efektywnej pamięci wewnętrznej układu. W konsekwencji, może to skutkować tym, że pewne procesy, które klasycznie wymagają pamięci, można zrealizować kwantowo w bezpamięciowy sposób. Moim celem był zbadanie tej potencjalnej kwantowej przewagi w przetwarzaniu informacji klasycznej.

3. **Więzy symetrii.** W tym wypadku badałem, jakie formy kwantowego przetwarzania informacji są dozwolone, gdy ograniczymy się do procesów wykazujących pewną symetrię (np. niezmienniczych ze względu na obroty) lub do procesów zadanych przez operacje pewnej symetrii (np. gdy przetwarzanie układu ograniczone jest do jego obracania w przestrzeni trójwymiarowej). W pierwszym przypadku więzy symetrii, poprzez twierdzenie Noether, mogą być powiązane z zasadami zachowania [23]. Dlatego też badania te mogą służyć scharakteryzowaniu dozwolonego przetwarzania informacji kwantowej w obecności zachowanych ładunków. W drugim zaś przypadku moje badania pozwalają na kwantyfikację asymetrii obecnej w stanach kwantowych obiektów, co z kolei może być zastosowane m.in. do badania bezpieczeństwa komunikacji kwantowej [24]. Moimi głównymi celami naukowymi związanymi z więzami symetrii były:

- (a) Zrozumieć możliwości i ograniczenia przetwarzania informacji kwantowej zakodowanej w stopniach swobody odpowiadających zachowanym ładunkom. Zwyczajowo, rozważania kwantowo-

informacyjne abstrahują od fizycznych szczegółów nośników informacji, skupiając się głównie na fakcie, że nośnik może przyjmować jeden z kilku perfekcyjnie rozróżnialnych stanów. Informacja jest jednak fizyczna, tzn. nośnikami informacji są fizyczne obiekty a sama informacja zakodowana jest w fizycznych własnościach nośnika, takich jak jego energia czy moment pędu. Istnienie zasady zachowania dla danej własności ogranicza sposoby, na które można modyfikować tę własność (np. energii nie można stworzyć z niczego, musi ona wpłynąć do układu z otoczenia), moim celem było zaś uchwycenie konsekwencji tego faktu dla przetwarzania informacji kwantowej.

- (b) Zrozumieć optymalny sposób wykorzystania asymetrii stanów kwantowych dla celów bezpiecznej komunikacji klasycznej [25]. Gdy dwie komunikujące się ze sobą strony mają dostęp do wspólnego układu odniesienia (np. ustalać kierunki osi kartezjańskiego układu współrzędnych), który potrafią ukryć przed światem zewnętrznym, mogą bezpiecznie przysyłać sobie informację zakodowaną w stopniach swobody, które łamią symetrię związaną z tym układem odniesienia (np. kodując informację w kierunku koherentnego stanu spinowego, który łamie symetrię obrotową). Kodowanie takie jest bezpieczne, gdyż strona podsłuchująca, nie mając dostępu do układu odniesienia, nie wie jakiego pomiaru ma dokonać na przechwyconym nośniku informacji (np. w którym kierunku zmierzyć wartość spinu). Z kolei, ponieważ pomiar zaburza stan układu kwantowego, wykonanie błędnego pomiaru wykasowuje informację oryginalnie zakodowaną w układzie. Moim celem było znalezienie optymalnej liczby bitów, które mogą być bezpiecznie przesłane pomiędzy komunikującymi się stronami, w zależności od ilości asymetrii dostępnej dla tych stron.

4. **Więzy klasyczności.** W tym wypadku badałem, jakie formy kwantowego przetwarzania informacji są dozwolone, gdy klasyczny efekt tego przetwarzania ustalimy na zadany. Innymi słowy, moim celem było scharakteryzowanie wszystkich tych procesów kwantowych, które wyglądają identycznie z klasycznej perspektywy, tzn. gdy nie mamy dostępu do informacji fazowej zakodowanej w amplitudach prawdopodobieństwa, a tylko do samych prawdopodobieństw pomiarów danej obserwabli. Moimi głównymi celami naukowymi związanymi z przetwarzaniem kwantowej informacji w obecności więzów klasyczności były:

- (a) Zrozumieć jak bardzo można zredukować losowość klasycznego procesu poprzez ujęcie go jako wyniku procesu kwantowego. Procesy losowe są wszechobecne zarówno w fizyce klasycznej, jak i kwantowej. Jednakowoż, natura losowości w tych dwóch reżimach znacząco się od siebie różni. Z jednej strony, klasyczna ewolucja losowa jest koniecznie nieodwracalna. Z drugiej strony, ewolucja kwantowa może być całkowicie deterministyczna (a więc i odwracalna, jeśli tylko nie wykonamy pomiaru), wciąż jednak prowadząc do losowych wyników pomiarów danej obserwabli przez to, że transformuje układ w koherentną superpozycję stanów własnych tejże obserwabli. Badając dynamikę układu, można zatem zaobserwować te same prawdopodobieństwa losowych przejść pomiędzy stanami układu, niezależnie od tego, czy ewolucja była koherentna, czy też niekoherentna. Moim celem było znalezienie odpowiedzi na następujące pytanie: do jakiego stopnia obserwowana losowość przejść może być wytłumaczona przez deterministyczny i koherentny proces kwantowy, a na ile potrzeba losowości klasycznej?
- (b) Zrozumieć o ile bogatsza jest struktura losowych procesów kwantowych w porównaniu do procesów klasycznych. Ujmując to bardziej precyzyjnie, chciałem znaleźć odpowiedź na pytanie ile różnych (tj. w pełni rozróżnialnych) procesów kwantowych istnieje, wszystkie klasycznie odpowiadające temu samemu procesowi losowemu. Moim celem było scharakteryzowanie tego zbioru i zastosowanie tej charakterystyki do zidentyfikowania procesów, które wykonując pewną zadaną transformację klasyczną, optymalnie zachowują kwantową część informacji.

4.2.3 Streszczenie wyników

1. Wyniki dotyczące więzów termodynamicznych:

- (a) Rozwinąłem² formalizm matematyczny pozwalający na rozszerzenie opisu termodynamicznego poza układy makroskopowe [H4, H12]. By to osiągnąć, wprowadziłem koncept związanej z ener-

²Tu, i wszędzie później w tekście, kiedykolwiek piszę, że „ja” coś zrobiłem, oczywiście mam na myśli „ja razem z moimi współpracownikami”.

gią swobodną zmiennej losowej, której wartość oczekiwana odpowiada energii swobodnej układu, ale która to zmienna zawiera także informację o wyższych momentach, które można interpretować jako fluktuacje energii swobodnej zawartej w układzie. Włączenie informacji o tych fluktuacjach do formalizmu pozwoliło mi na badanie transformacji termodynamicznych pomiędzy małą liczbą układów, gdy fluktuacje nie są zaniedbywalne w porównaniu do średnich wielkości. Dzięki temu byłem w stanie znaleźć warunki wystarczające i konieczne na istnienie transformacji termodynamicznej pomiędzy dwoma nierównowagowymi stanami układu małej liczby cząstek. Makroskopowy warunek, mówiący o nierosnącej energii swobodnej układu, został w ten sposób wzmocniony do następującego stwierdzenia: aby osiągnąć transformację termodynamiczną z daną dokładnością, energia swobodna układu musi zmaleć co najmniej o x , gdzie x jest konkretną funkcją dokładności oraz fluktuacji energii swobodnej w stanie początkowym i końcowym.

- (b) Ponieważ dowiodłem, że transformacje poza granicą termodynamiczną są w ogólności nieodwracalne i wymagają nakładów energii swobodnej (np. cykle termodynamiczne muszą być zaopatrywane w dodatkowe źródło pracy), zbadałem konsekwencje tego faktu dla optymalnej wydajności protokołów termodynamicznych (takich jak ekstrakcja pracy, usuwanie informacji, czy termodynamicznie ograniczona komunikacja) [H4, H12].
- (c) Zinterpretowałem uzyskane wyniki w kontekście słynnego twierdzenia o fluktuacji-dyssypacji, jako że wiążą one minimalną ilość energii swobodnej zdysypowanej w danym procesie termodynamicznym z fluktuacjami tejże energii swobodnej obecnymi w transformowanych stanach układu [H12].
- (d) Odkryłem ważne zjawisko rezonansu zasobowego [H6] – mianowicie, gdy fluktuacje energii swobodnej w początkowym i końcowym stanie układu są odpowiednio do siebie dostrojone, dyssypacja ulega znaczącej redukcji.
- (e) Co ciekawe, z powodu matematycznego podobieństwa między formalizmem opisującym transformacje termodynamiczne i LOCC, zjawisko rezonansu zostało także przewidziane i numerycznie potwierdzone dla transformacji LOCC pomiędzy czystymi stanami splątanych dwóch cząstek [H5].
- (f) Zanalizowałem jak wyniki dotyczące optymalnej dyssypacji i fluktuacji energii swobodnej zmieniają się, gdy pozwolimy by stan początkowy układu zadany był przez kwantową superpozycję stanów o różnej energii [H12]. Ponieważ entropowy wkład do fluktuacji energii swobodnej wtedy maleje, używanie stanów z koherencją kwantową w ogólności pozwala na zmniejszenie dyssypacji.
- (g) Zbadałem wpływ koherencji kwantowej na uporządkowanie termodynamiczne stanów pojedynczego układu. W szczególności, pokazałem że jest ona odpowiedzialna za nadanie termodynamicznej strzałce czasu dodatkowej struktury matematycznej kraty, w wyniku czego koherencja kwantowa staje się zasobem koniecznym do wykonania optymalnego procesu wymazywania historii [H1].

2. Wyniki dotyczące więzów pamięci:

- (a) Wprowadziłem nowe pojęcie ciągłej termomajoryzacji, które pozwoliło mi określić, jakie przetwarzanie termodynamiczne stanów kwantowych jest dozwolone przy wykorzystaniu bezpamięciowej dynamiki [H14]. Używając tego pojęcia, wyprowadziłem fundamentalne ograniczenia na zmianę obsadzeń poziomów energetycznych układów kwantowych generowanych przez bezpamięciowe transformacje termodynamiczne, tj. dla zadanych obsadzeń początkowych, sformułowałem warunki konieczne i wystarczające na istnienie termicznego procesu markowskiego, który zmieni stan układu na stan o zadanych obsadzeniach końcowych. Doprowadziło to do udowodnienia wyniku typu uogólnionego twierdzenia H Boltzmanna, w postaci ciągłej rodziny funkcji entropowych, które muszą monotonicznie rosnąć podczas termodynamicznej ewolucji układu.
- (b) Stworzyłem algorytm, który w skończonej liczbie kroków pozwala na skonstruowanie pełnego zbioru obsadzeń osiągalnych z danego stanu początkowego za pomocą bezpamięciowych transformacji termodynamicznych, a także pokazałem, że wszystkie takie wektory obsadzeń mogą zostać osiągnięte ze stanu początkowego za pomocą uniwersalnego zbioru elementarnych operacji w postaci częściowych termalizacji dwupoziomowych [H14].

- (c) Otrzymane wyniki wykorzystałem do znalezienia optymalnych protokołów ekstrakcji pracy oraz chłodzenia, co pozwoliło pokazać jaką rolę odgrywają efekty pamięci w tego typu protokołach termodynamicznych [H15].
- (d) Poza rozważaniami termodynamicznymi, badałem także więzy pamięci w kontekście potencjalnego uzyskania przewagi kwantowej, udowadniając że kwantowa dynamika bezpamięciowa może symulować klasyczne procesy, które koniecznie wymagają pamięci [H9].
- (e) Rozszerzając klasyczne pojęcie kosztu czasoprzestrzennego danego procesu stochastycznego do dziedziny kwantowej, udowodniłem przewagę kwantową polegającą na mniejszym koszcie symulowania zadanego procesu stochastycznego przy wykorzystaniu dynamiki kwantowej w porównaniu do wykorzystania dynamiki klasycznej [H9].
- (f) Pokazałem, że zbiór stanów klasycznych osiągalnych za pomocą kwantowej ewolucji markowskiej jest większy od zbioru osiągalnego przy pomocy klasycznej ewolucji markowskiej, co prowadzi m.in. do potencjalnej przewagi kwantowej w protokołach chłodzenia [H9].

3. Wyniki dotyczące więzów symetrii:

- (a) Zanalizowałem jak symetria ze względu na translacje w czasie, związana z zasadą zachowania energii, ogranicza możliwe przetwarzanie koherencji kwantowej pomiędzy stanami o różnych energiach [H2]. Głównym otrzymanym wynikiem w tym wypadku jest twierdzenie ograniczające z dołu minimalną dekoherencję dla zdanej dynamiki obsadzeń poziomów energetycznych. Twierdzenie to można interpretować jako uogólnienie do wielopoziomowych układów słynnej relacji $T_2 \leq 2T_1$, pomiędzy czasem dekoherencji T_2 układu dwupoziomowego a jego czasem relaksacji T_1 .
- (b) Pokazałem, w jaki sposób twierdzenie o minimalnej dekoherencji można wykorzystać do weryfikowania niemarkowskości dynamiki układu oraz do ocenienia roli pamięci jako zasobu koniecznego do przechowywania i transferu koherencji [H2].
- (c) Przeprowadziłem analizę struktury wypukłej oraz punktów ekstremalnych zbioru kanałów kwantowych symetrycznych ze względu na działanie ogólnej grupy Liego G [H8]. Pozwoliło mi to ilościową analizę tego, w jaki sposób więzy symetrii narzucone na kanały kwantowe indukują zasady zachowania, tzn. dla kanałów symetrycznych względem G wyprowadziłem ograniczenie na odchylenie od zasady zachowania jako funkcję odchylenia kanału od zamkniętej dynamiki.
- (d) Dla symetrii $SU(2)$, związanej z zasadą zachowania momentu pędu, znalazłem fundamentalne granice tego, na ile cząstka o spinie j_A może spolaryzować cząstkę o większym spinie j_B , oraz tego, jak bardzo polaryzacja spinowa może zostać odwrócona za pomocą operacji o symetrii obrotowej [H8].
- (e) Zbadałem problem optymalnej komunikacji pomiędzy dwoma stronami komunikującymi się za pomocą kodowania ograniczonego do operacji symetrii zadanej grupy G [H13]. Ten problem odpowiada kodowaniu informacji w asymetrii stanu układu kwantowego względem grupy symetrii G , co z kolei pozwala na stworzenie bezpiecznego protokołu komunikacji wykorzystującego prywatny układ odniesienia związany z G . Wyprowadziłem wyrażenia na optymalny transfer informacji pomiędzy stronami w reżimie pojedynczej i wielokrotnej komunikacji, a także pokazałem w jaki sposób zastosować te wyrażenia do całego szeregu problemów komunikacji z więzami, np. gdy informacja może być kodowana tylko w koherencjach układu kwantowego, lub gdy strony ograniczone są do operacji lokalnych i chcą zbadać możliwości supergęstego kodowania.

4. Wyniki dotyczące więzów klasyczności:

- (a) Wprowadziłem nowatorski koncept kwantowej koheryfikacji klasycznego procesu, czyli zbioru kanałów kwantowych, które wywołują te same prawdopodobieństwa przejść pomiędzy poziomami, co zadany proces klasyczny, ale w różny sposób przetwarzają kwantową koherencję układu [H3]. Pokazałem, że klasyczny nieodwracalny proces opisany macierzą przejścia T może zostać skoheryfikowany do odwracalnego procesu unitarnego wtedy, i tylko wtedy, gdy T jest unistochastyczne. W przeciwnym wypadku wszystkie koheryfikacje muszą być nieodwracalne i, aby ocenić ich poziom niedeterminizmu, znalazłem ograniczenia na ich entropię i czystość.

- (b) Znalazłem optymalne koherfikacje dla kilku klas procesów (włączając w to wszystkie procesy dla układów dwupoziomowych) a także nieoptymalne procedury koherfikacji działające dla układów wielopoziomowych [H3].
- (c) W kontekście badań nad liczbą różnych procesów kwantowych skutkujących tym samym procesem klasycznym, uzyskałem serię wyników dotyczących zarówno wystarczających jak i koniecznych warunków na istnienie M perfekcyjnie rozróżnialnych koherfikacji danego kanału klasycznego [H7].
- (d) Ponieważ tylko macierze przejścia należące do zbioru macierzy unistochastycznych mogą być całkowicie skoheryfikowane, skupiłem się na badaniu własności tego zbioru przez wprowadzenie i zanalizowanie jego szczególnego nadzbioru macierzy łańcuskowych [H11]. Opisałem algebraiczne i geometryczne własności tego zbioru, m.in. jego gwiazdzystość, zamknięcie ze względu na mnożenie przez macierze faktoryzowalne oraz zachowanie widm macierzy łańcuskowych. W wyniku tego, unistochastyczne macierze dla małych wymiarów zostały całkowicie scharakteryzowane.
- (e) Poza ideą koherfikacji, więzy klasyczności zostały także zbadane przez wprowadzenie i charakteryzację klasy szumów pod nazwą defazujących superkanałów, które obniżają koherentne własności kanałów kwantowych, ale nie wpływają na indukowane przez nie macierze przejścia [H10]. Znalazłem ogólny matematyczny opis takich superkanałów, pokazałem w jaki sposób mogą być one fizycznie realizowane, oraz scharakteryzowałem możliwe efekty na koherentne własności kanałów podlegających szumom opisanym przez defazujące superkanały.

4.3 Wyniki dotyczące więzów termodynamicznych

4.3.1 Optymalne przetwarzanie poza granicą termodynamiczną

Model termodynamiczny. Rozwijająca się dziedzina kwantowej termodynamiki (zob. [26] oraz prace tam cytowane) skupia się na badaniu możliwych transformacji małej liczby kwantowych układów oddziałujących z otoczeniem termicznym. Badany układ opisany jest hamiltonianem $H = \sum_i E_i |E_i\rangle\langle E_i|$ a jego stan początkowy ogólną macierzą gęstości ρ , podczas gdy stan łaźni cieplnej, opisanej przez hamiltonian H_B , dany jest termiczną macierzą gęstości (zwaną także stanem Gibbsa) odpowiadającą równowadze termodynamicznej,

$$\gamma_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\text{Tr}(e^{-\beta H_B})}, \quad (1)$$

gdzie $\beta = 1/k_B T$, T to temperatura łaźni, a k_B to stała Boltzmanna. Zakłada się, że ewolucja całkowitego układu (układ plus łaźnia) jest zamknięta, a zatem opisana operatorem unitarnym U , który dodatkowo zachowuje energię całkowitą,

$$[U, H \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1} \otimes H_B] = 0. \quad (2)$$

Głównym pytaniem jest teraz problem konwersji stanów kwantowych: jakie są możliwe stany końcowe układu, w który zadany stan początkowy ρ może zostać przetransformowany? Ujmując to bardziej formalnie, definiuje się zbiór *operacji termicznych* [17, 27], które opisują wszystkie możliwe transformacje układu osiągalne bez użycia dodatkowych zasobów (poza pojedynczą łaźnią cieplną). Zbiór operacji termicznych dla zadanego β składa się z całkowicie dodatnich i zachowujących ślad (CPTP, z ang. *completely positive and trace-preserving*) odwzorowań $\{\mathcal{E}^\beta\}$, które działają na stan ρ układu o Hamiltonianie H w następujący sposób:

$$\mathcal{E}^\beta(\rho) = \text{Tr}_{B'}(U(\rho \otimes \gamma_B)U^\dagger), \quad (3)$$

z U spełniającym wzór (2), γ_B zadanym przez wzór (1), H_B dowolnym, oraz B' oznaczającym dowolny podukład całkowitego układu. Należy zwrócić uwagę, że warunek zachowania energii, wzór (2), można interpretować jako kodujący pierwsze prawo termodynamiki; natomiast fakt, że łaźnia jest w równowadze termodynamicznej prowadzi do $\mathcal{E}^\beta(\gamma) = \gamma$, gdzie γ jest stanem równowagi termodynamicznej układu (tj. zadanym przez wzór (1) z H_B zamienionym przez H), w ten sposób kodując drugą zasadę termodynamiki.

Granica termodynamiczna i poza nią. Ważnym wariantem problemu konwersji stanów kwantowych jest konwersja asymptotyczna, w której rozważane są transformacje dowolnie wielkiej liczby kopii stanu początkowego, a szukaną wielkością jest maksymalny współczynnik konwersji, tj. maksymalny stosunek otrzymanej

liczby stanów końcowych do początkowych przy zanedbywalnie małym błędzie transformacji. Fizycznie, odpowiada to transformacjom makroskopowych układów składających się z $n \rightarrow \infty$ cząstek w tzw. granicy termodynamicznej, gdy fluktuacje energii są zanedbywalnie małe w porównywaniu do średniej energii układu. W pracy [18] pokazano, że optymalny asymptotyczny współczynnik konwersji zadany jest przez stosunek nierównowagowych energii swobodnych stanu początkowego i końcowego, w wyniku czego transformacje stają się całkowicie odwracalne w tym asymptotycznym reżimie. Jednak te makroskopowe wyniki nie stosują się do skończonych n , przez co transformacje mogą stać się nieodwracalne. Mimo że potrzeba wyjścia poza klasyczną termodynamikę jest głównie motywowana faktem, że w nanoskali efekty kwantowe, jak koherencja [28–31] [KK10, KK11] czy splątanie [32–34], zaczynają grać istotną rolę, w kwantowym reżimie mamy także do czynienia z układami złożonymi ze skończonej liczby n cząstek. Dlatego też transformacje termodynamiczne takich układów mogą doświadczać efektywnej nieodwracalności i jednym z moich celów było rygorystyczne zaadresowanie tego problemu. Moje prace [H4–H6, H12] są mostem pomiędzy ekstremalnymi przypadkami termodynamiki pojedynczych cząstek z $n = 1$ [17] a asymptotyczną granicą $n \rightarrow \infty$ [18], pozwalając tym samym na studiowanie nieodwracalności procesów termodynamicznych w pośrednim reżimie dużych, ale skończonych, n .

Optymalny współczynnik konwersji dla stanów niekoherentnych. W pracy [H4] skupiam się na układach złożonych ze skończonej liczby n nieoddziałujących podukładów (każdy opisany tym samym hamiltonianem H) i rozważam stany podukładu ρ (początkowy) oraz σ (końcowy), komutujące z H (tzn. ρ i σ są tzw. stanami energetycznie niekoherentnymi). Moim celem było znalezienie maksymalnego współczynnika konwersji R , dla którego istnieje operacja termiczna $\mathcal{E}^\beta$ taka, że $\mathcal{E}^\beta(\rho^{\otimes n}) = \tilde{\sigma}$ dla pewnego stanu $\tilde{\sigma}$ na Rn podukładach, który jest wystarczająco bliski stanowi $\sigma^{\otimes Rn}$. Innymi słowy, badałem problem optymalnej termodynamicznej konwersji stanów pomiędzy skończonymi liczbami kopii stanu ρ i σ dla zadanej temperatury dostępnej łaźni cieplnej (ustalonej przez β), i przy przyzwoleniu na mały błąd transformacji ϵ . Błąd ten kwantyfikowany jest przez odległość dwóch stanów mierzoną funkcją niewierności, tzn. wymagamy by $F(\sigma^{\otimes Rn}, \tilde{\sigma}) \geq 1 - \epsilon$ dla pewnego parametru dokładności $\epsilon \in (0, 1)$, gdzie $F(\cdot, \cdot)$ oznacza funkcję wierności Uhlmann’a [35],

$$F(\rho, \sigma) := \left(\text{Tr} \left(\sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right) \right)^2. \quad (4)$$

Maksymalny współczynnik konwersji $R = R(\rho, \sigma, n, \epsilon)$ zależy od stanu początkowego i końcowego, ρ i σ , a także od liczby podukładów n oraz dokładności ϵ . Wyniki wyrażone są za pomocą dwóch wielkości informacyjnych: entropi względnej [36] względem stanu Gibbsa, $D(\cdot \| \gamma)$, i wariancji entropi względnej [37, 38] względem tego samego stanu Gibbsa, $V(\cdot \| \gamma)$. Wielkości te zdefiniowane są następująco:

$$D(\rho \| \gamma) := \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \gamma)), \quad V(\rho \| \gamma) := \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \gamma)^2) - D(\rho \| \gamma)^2 \quad (5)$$

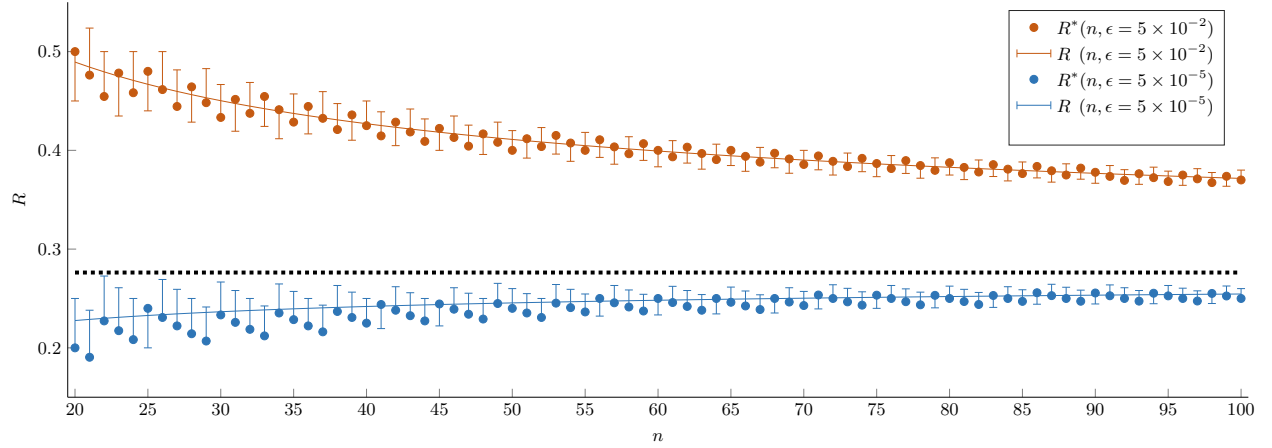
i mogą być termodynamicznie zinterpretowane w następujący sposób: $D(\rho \| \gamma)/\beta$ jest różnicą pomiędzy uogólnioną nierównowagową energią swobodną stanów ρ i γ [18], natomiast $V(\rho \| \gamma)$ jest proporcjonalne do uogólnionej pojemności cieplnej układu [H4]. Co więcej, zwrócić należy uwagę, że $D(\rho \| \gamma)$ przyjmuje wartość zero wtedy, i tylko wtedy, gdy $\rho = \gamma$, natomiast $V(\rho \| \gamma)$ zeruje się gdy ρ jest proporcjonalne do stanu Gibbsa na swoim nośniku, np. gdy ρ jest stanem czystym. Zakładamy, że ani stan początkowy ρ ani końcowy σ nie są stanem Gibbsa γ , w przeciwnym bowiem wypadku problem konwersji trywializuje się. Dla tak opisanego problemu udowodniłem, że optymalny współczynnik konwersji zadany jest przez

$$R(\rho, \sigma, n, \epsilon) \simeq \frac{D(\rho \| \gamma)}{D(\sigma \| \gamma)} \left(1 + \sqrt{\frac{V(\rho \| \gamma)}{n D(\rho \| \gamma)^2}} Z_{1/\nu}^{-1}(\epsilon) \right) \quad (6a)$$

$$\simeq \frac{D(\rho \| \gamma)}{D(\sigma \| \gamma)} \left(1 + \sqrt{\frac{V(\sigma \| \gamma)}{n D(\rho \| \gamma) D(\sigma \| \gamma)}} Z_{\nu}^{-1}(\epsilon) \right), \quad (6b)$$

gdzie Z_{ν}^{-1} to funkcja odwrotna dystrybucyj rozkładu Rayleigha-normalnego Z_{ν} wprowadzonego w pracy [39] z ν danym przez

$$\nu = \frac{V(\rho \| \gamma)/D(\rho \| \gamma)}{V(\sigma \| \gamma)/D(\sigma \| \gamma)}, \quad (7)$$



Rysunek 2: **Optymalny współczynnik konwersji.** Porównanie pomiędzy przybliżeniem asymptotycznym drugiego rzędu, R , a faktycznym optymalnym współczynnikiem konwersji R^* , dla konwersji pomiędzy stanem $\rho = \frac{7}{10} |0\rangle\langle 0| + \frac{3}{10} |1\rangle\langle 1|$ i $\sigma = \frac{8}{10} |0\rangle\langle 0| + \frac{2}{10} |1\rangle\langle 1|$, przy Hamiltonianie danym przez $H = |1\rangle\langle 1|$ i dostępie do łaźni cieplnej o temperaturze zadanej przez $1/\beta = 3$. Kółka oznaczają faktyczne współczynniki a linie odpowiadają przybliżeniu drugiego rzędu ze wzoru (6a). Ponieważ faktyczny współczynnik konwersji jest zawsze całkowitą wielokrotnością $1/n$, zaokrąglenie przybliżenia do najbliższych $1/n$ jest także wskazane za pomocą słupków błędów. Kolory odpowiadają różnym współczynnikom dokładności transformacji: $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$ dla koloru czerwonego i $\epsilon = 10^{-5}$ dla koloru niebieskiego. Przerywana linia wskazuje wynik asymptotyczny pierwszego rzędu.

oraz $\simeq$ oznaczającym równość do składników rzędu $o(1/\sqrt{n})$. Zwrócić należy uwagę, że $Z_0 = \Phi$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego a Z_1 dystrybuantą rozkładu Rayleigha. Funkcja odwrotna dystrybuanty rozkładu Rayleigha-normalnego jest w ogólności ujemna dla małych wartości ϵ (chyba że $\nu = 1$), a zatem poprawki wynikające ze skończonego rozmiaru układu, skalujące się jak $1/\sqrt{n}$, są w ogólności ujemne. Powodem podania obu wyrażeń, zadanych wzorami (6a)-(6b), jest fakt, iż w ten sposób można uchwycić oba specjalne przypadki, gdy $V(\rho||\gamma) = 0$ lub $V(\sigma||\gamma) = 0$, unikając używania funkcji Z_∞^{-1} , która jest nieokreślona. Przypadek, gdy obie wariancje entropii względnej się zerują, jest opisany oddzielnie za pomocą następującego dokładnego wyrażenia na R :

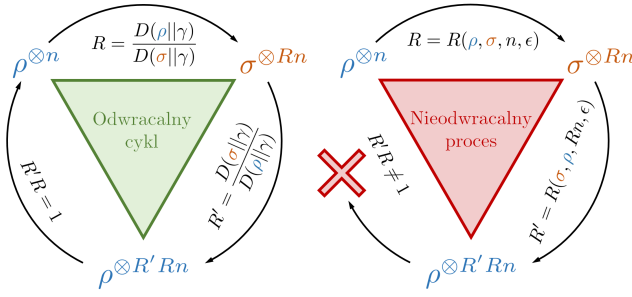
$$R = \frac{1}{n} \left[\frac{nD(\rho||\gamma) - \log(1 - \epsilon)}{D(\sigma||\gamma)} \right] \simeq \frac{D(\rho||\gamma)}{D(\sigma||\gamma)}. \quad (8)$$

Wreszcie, używając wyników pierwotnie wyprowadzonych w pracy [40], można numerycznie obliczyć optymalny współczynnik konwersji dla małych n i porównać go z powyższym asymptotycznym rozwinięciem drugiego rzędu. Na Rys. 2 pokazuję, że nawet dla względnie małych rozmiarów układu, to asymptotyczne wyrażenie drugiego rzędu daje wyjątkowo dobre przybliżenie faktycznego optymalnego współczynnika konwersji, w szczególności jeśli porównamy je do wyniku asymptotycznego pierwszego rzędu.

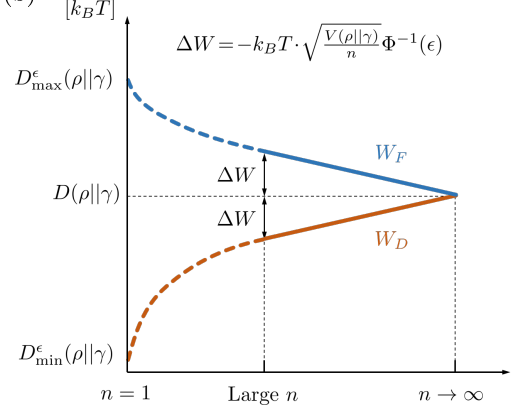
Nieodwracalność wywołana skończonym rozmiarem układu. Mimo iż badanie ogólnego problemu konwersji termodynamicznej pomiędzy stanami kwantowymi może wydawać się problemem dość abstrakcyjnym, jego rozwiązanie może zostać zastosowane do badań nad bardziej typowymi procesami termodynamicznymi. Ponieważ przy konwersji asymptotycznej dozwolone są odwracalne cykle, a wyniki pracy [H4] opisują wynikające ze skończonych rozmiarów układu poprawki do asymptotycznego wyrażenia na współczynnik konwersji, głównym rozpatrywanym efektem będzie nieodwracalność. Pierwszy indykator nieodwracalności może zostać uchwyciony przez obliczenie współczynnika konwersji dla transformacji n kopii układu w stanie ρ , przez stan σ , z powrotem do stanu ρ :

$$\rho^{\otimes n} \xrightarrow{\epsilon_1} \sigma^{\otimes Rn} \xrightarrow{\epsilon_2} \rho^{\otimes R'Rn}, \quad (9)$$

(a)



(b)



Rysunek 3: **(a) Nieodwracalność a skończone wymiary układu.** Po lewej: w granicy asymptotycznej, $n \rightarrow \infty$, optymalny współczynnik konwersji ze stanu ρ w stan σ jest równy odwrotności optymalnego współczynnika konwersji ze stanu σ w stan ρ . Pozwala to na wykonanie odwracalnych cykli. Po prawej: przy założeniu niskiego błędzie transformacji, poprawki do współczynnika konwersji wynikające ze skończonej liczby n transformowanych układów są w ogólności ujemne, co prowadzi do nieodwracalności opisanej przez $R'R < 1$. **(b) Różnica prac.** Zachowanie destylowalnej pracy W_D i pracy formacyjnej W_F różni się w zależności od rozważanego reżimu. W przypadku transformacji pojedynczego układu, $n = 1$, są one związane z minimalną i maksymalną entropią względną [17]. W pośrednim reżimie dużej, ale skończonej, liczby n układów (badanym w pracy [H4]), wartości W_D i W_F leżą symetrycznie wokół wartości osiągalnej w reżimie asymptotycznym, gdy W_D i W_F są sobie równe i dane przez nierównowagowe uogólnienie energii swobodnej. Skala osi y wyrażona jest tu w jednostkach $k_B T$.

co zilustrowane jest na Rys. 3a. Bez poprawek asymptotycznych drugiego rzędu wyprowadzonych w pracy [H4], współczynnik odwracalności $R_r := RR'$ równy jest 1 i wzór (9) opisuje doskonale cykliczny proces. Jednak, uwzględniając wyprowadzone poprawki, otrzymujemy

$$R_r \simeq 1 + \sqrt{\frac{V(\rho||\gamma)}{nD(\rho||\gamma)^2}} \left(Z_{1/\nu}^{-1}(\epsilon_1) + Z_{1/\nu}^{-1}(\epsilon_2) \right). \quad (10)$$

Błąd konwersji kumuluje się podczas obu transformacji ze wzoru (9), całkowity zaś błąd ϵ ograniczony jest przez

$$\epsilon \leq \left(\sqrt{\epsilon_1(1-\epsilon_2)} + \sqrt{\epsilon_2(1-\epsilon_1)} \right)^2. \quad (11)$$

Narzucając teraz wymóg, by liczba kopii n nie zmieniała się podczas transformacji (tj. wymuszając $R = R' = 1$), otrzymujemy

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = Z_{1/\nu}(0), \quad (12)$$

a całkowity błąd ϵ może być wtedy ograniczony przez

$$\epsilon \leq 4Z_{\nu}(0)(1 - Z_{\nu}(0)), \quad (13)$$

gdzie wykorzystaliśmy własność dualności rozkładu Rayleigha-normalnego, $Z_{1/\nu}(\mu) = Z_{\nu}(\sqrt{\nu}\mu)$. Ponieważ prawa strona powyższego równania ma pojedyncze minimum w $\nu = 1$, wielkość ν można zinterpretować jako parametr odwracalności, kwantyfikujący jak bardzo kompatybilne ze sobą są dwa stany (początkowy i końcowy). Innymi słowy, im bliżej ν jest wartości 1, tym mniejszy będzie błąd transformacji podczas wykonywania cyklu $\rho^{\otimes n} \rightarrow \sigma^{\otimes n} \rightarrow \rho^{\otimes n}$ (tj. proces będzie bardziej odwracalny).

Inną ważną konsekwencją nieodwracalności jest różnica między destylowalną pracą, a pracą formacyjną [17]. Wielkości te kwantyfikują ilość istotnych zasobów termodynamicznych, które mogą być wydestylowane (wydobyte) z danego stanu, lub które są potrzebne do jego stworzenia. Podobnie jak w przypadku teorii splątania,

gdzie stany Bella służy jak standardowe wzorniki ilości splątania [3], także w termodynamicznej teorii zasobów istnieją stany, które służą za “złoty standard” do mierzenia ilości zasobów obecnych w danym stanie. Te wzorowe stany dane są przez czyste stany własne energii, które dzięki zerowej entropii mają jasną energetyczną interpretację. Mianowicie, transformacja wymagająca zmiany dodatkowego układu-baterii z czystego stanu $|w\rangle$ o energii w , w stan $|0\rangle$ o zerowej energii, interpretowana jest jako wykonanie (zainwestowanie) pracy w nad badanym układem; natomiast transformacja pozwalająca na odwrotną zmianę odpowiada wydobywaniu (ekstrakcji) pracy w z układu. Dlatego też, w celu oceny ilości termodynamicznych zasobów w n kopiach danego stanu energetycznie niekoherentnego, $\rho^{\otimes n}$, możemy zbadać o ile energia czystego stanu baterii musi się zmniejszyć na jedną kopię ρ , by skonstruować $\rho^{\otimes n}$ ze stanu termicznego, a o ile może się ona zwiększyć podczas transformacji $\rho^{\otimes n}$ w stan termiczny. Używając wzoru (6b), możemy wyprowadzić następujące asymptotyczne przybliżenie drugiego rzędu na wyrażenia na pracę destylowalną W_D i formacyjną W_F :

$$W_D \simeq \frac{1}{\beta} \left(D(\rho||\gamma) + \sqrt{\frac{V(\rho||\gamma)}{n}} \Phi^{-1}(\epsilon) \right), \quad W_F \simeq \frac{1}{\beta} \left(D(\rho||\gamma) - \sqrt{\frac{V(\rho||\gamma)}{n}} \Phi^{-1}(\epsilon) \right), \quad (14)$$

gdzie Φ^{-1} jest funkcją odwrotną dystrybucyjną standardowego rozkładu normalnego. Zwróćmy uwagę, że otrzymane wartości W_D i W_F leżą symetrycznie wokół asymptotycznej wartości $W = D(\rho||\gamma)/\beta$,

$$W_D \simeq W - \Delta W, \quad W_F \simeq W + \Delta W, \quad \text{with} \quad \Delta W := -\frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{V(\rho||\gamma)}{n}} \Phi^{-1}(\epsilon), \quad (15)$$

oraz że poprawka ΔW jest dodatnia dla małych wartości błędu ϵ . Dlatego też koszt stworzenia danego stanu (z małym błędem transformacji) jest zawsze większy niż ilość zasobów, które można potem z niego wydestylować, co w jasny sposób prowadzi do nieodwracalności. Ta symetryczna różnica w pracach, która pojawia się dla skończonych n , zilustrowana jest na Rys. 3b, gdzie porównujemy także wartości W_D i W_F dla reżimu pojedynczej cząstki $n = 1$ (gdy W_D i W_F leżą w ogólności asymetrycznie wokół asymptotycznej wartości W). Wreszcie, w pracy [H4], tłumaczę także w jaki sposób wydajność silników cieplnych zmienia się z powodu skończonego rozmiaru substancji pracującej. W szczególności, pokazuję jak wyprowadzone poprawki na optymalny współczynnik konwersji nie pozwalają na jednoczesne osiągnięcie perfekcyjnej jakości pracy (tj. z zaniedbywalnym błędem transformacji) przy zachowaniu wydajności Carnot.

Rozszerzenie do reżimu umiarkowanych odchyień. Wyniki pracy [H4] dotyczyły poprawek drugiego rzędu do asymptotycznej wartości współczynnika konwersji w tzw. reżimie *małych odchyień* [41], gdy współczynnik zbliża się do asymptotycznej wartości kiedy $n \rightarrow \infty$, ale transformacja realizowana jest z zadaniem stałym błędem. W pracy [H5] kwestia stałego błędu została rozwiązana przez wyprowadzenie poprawek do asymptotycznej wartości współczynnika konwersji w reżimie *umiarkowanych odchyień* [42], gdy poprawka wciąż znika kiedy $n \rightarrow \infty$, ale także transformacja jest wykonywana z asymptotycznie znikającym błędem. By formalnie przedstawić wyniki otrzymane w pracy [H5], potrzeba nam wprowadzić następujące pojęcie: szereg liczb rzeczywistych $\{t_n\}_n$ jest *umiarkowanym szeregiem* gdy jego skalowanie z n jest ostro pomiędzy $1/\sqrt{n}$ a 1, co oznacza, że $t_n \rightarrow 0$ oraz $\sqrt{n}t_n \rightarrow +\infty$ gdy $n \rightarrow \infty$. Ważna rodzina szeregów umiarkowanych dana jest przez $t_n \sim n^{-\alpha}$ for $\alpha \in (0, 1/2)$ i może być wykorzystana do uzyskania szczególnie eleganckiej formy poniżej przedstawionych wyników. Dla dowolnego szeregu umiarkowanego t_n i akceptowalnego poziomu błędu (mierzonego przez funkcję niewierności, $1 - F$, lub przez odległość śladową δ) danego przez

$$\epsilon_n = e^{-nt_n^2}, \quad (16)$$

asymptotyczne rozwinięcie optymalnego współczynnika konwersji $R(\rho, \sigma, n, \epsilon_n)$ dane jest przez

$$R(\rho, \sigma, n, \epsilon_n) \simeq \frac{D(\rho||\gamma)}{D(\sigma||\gamma)} - \sqrt{\frac{2V(\rho||\gamma)}{D(\sigma||\gamma)^2}} |1 - 1/\sqrt{\nu}| t_n, \quad (17)$$

gdzie ν jest parametrem odwracalności ze wzoru (7) a $\simeq$ oznacza tu równość do składników rzędu $o(t_n)$. Należy zwrócić uwagę, że gdy $V(\rho||\gamma) = 0$, co skutkuje w $1/\sqrt{\nu}$ rozbieżnym do nieskończoności i pozornym mnożeniu zera przez nieskończoność, możemy po prostu skorzystać z definicji ν by zamienić wzór (17) w

$$R(\rho, \sigma, n, \epsilon_n) \simeq \frac{D(\rho||\gamma)}{D(\sigma||\gamma)} - \sqrt{\frac{2V(\sigma||\gamma)D(\rho||\gamma)}{D(\sigma||\gamma)^3}} t_n. \quad (18)$$

Rozszerzenie do innych teorii zasobów. Częściowo niespodziewanie, wyniki dotyczące poprawek asymptotycznych do współczynnika konwersji termodynamicznej w reżimie umiarkowanych odchyłeń mogą być niemal wprost zastosowane do badań nad dwoma innymi ważnymi przykładami teorii zasobów: splątania [3] i koherencji [43]. Wynika to z faktu, iż teorie te są ze sobą na poziomie matematycznym mocno związane: warunki na transformacje pomiędzy stanami pojedynczych układów w tych dwóch teoriach (tj. z transformacjami ograniczonymi do lokalnych operacji i klasycznej komunikacji, LOCC, lub do operacji niekoherentnych) wyrażone są za pomocą majoryzacji [5, 44], w termodynamice natomiast warunki te dane są przez wariant majoryzacji znany jako termomajoryzacja [17]. Nie tylko pozwala to na zunifikowane podejście do problemu, ale także umożliwia nam wykorzystanie uproszczonej reprezentacji stanów początkowych i końcowych, ρ i σ , przy pomocy wektorów prawdopodobieństwa, $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$. Dokładniej mówiąc, dla teorii splątania początkowy i końcowy stan czysty układu dwóch cząstek, $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ i $\sigma = |\Phi\rangle\langle\Phi|$, z dekompozycją Schmidta daną przez $|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle \otimes |\psi'_i\rangle$ i $|\Phi\rangle = \sum_i \sqrt{q_i} |\phi_i\rangle \otimes |\phi'_i\rangle$, mogą być reprezentowane przez $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$. Analogicznie, w teorii koherencji względem zadanej bazy $\{|i\rangle\}$, możemy reprezentować początkowy i końcowy stan układu, $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ i $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$, używając $p_i = |\langle i|\psi\rangle|^2$ i $q_i = |\langle i|\phi\rangle|^2$. Wtedy, jak zostało udowodnione w pracy [H5], rozwinięcie asymptotyczne współczynnika konwersji pomiędzy stanami $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$, $r(\mathbf{p}, \mathbf{q}, n, \epsilon_n)$, dla teorii splątania i koherencji zadane jest przez

$$r(\mathbf{p}, \mathbf{q}, n, \epsilon_n) \simeq \frac{H(\mathbf{p})}{H(\mathbf{q})} - \sqrt{\frac{2V(\mathbf{p})}{D(\mathbf{q})^2}} |1 - 1/\sqrt{\nu'}| t_n, \quad (19)$$

gdzie t_n to dowolny szereg umiarkowany, ν' dane jest przez [39]

$$\nu' = \frac{V(\mathbf{p})/H(\mathbf{p})}{V(\mathbf{q})/H(\mathbf{q})}, \quad (20)$$

z H oznaczającym entropię Shannona a V odpowiadającą jej wariancję entropii [41, 45],

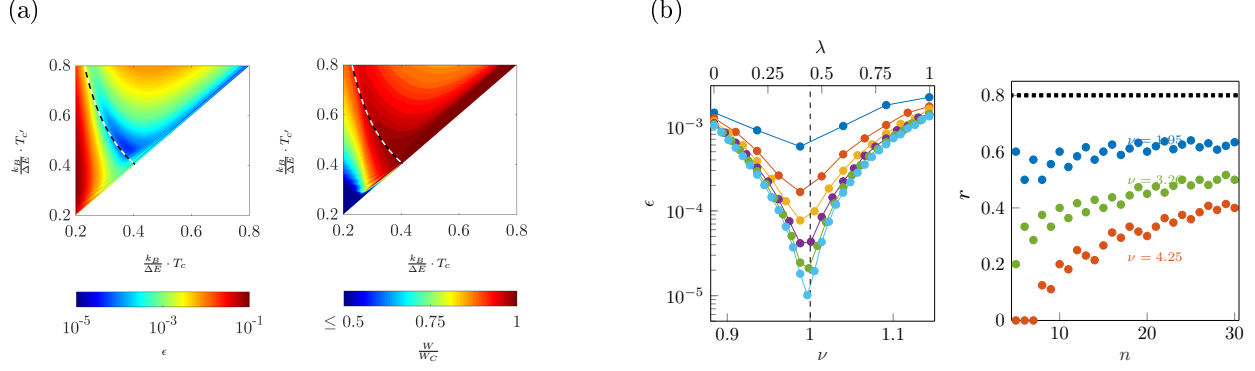
$$H(\mathbf{p}) = - \sum_i p_i \log p_i, \quad V(\mathbf{p}) = \sum_i p_i (\log p_i + H(\mathbf{p}))^2. \quad (21)$$

Zwróćmy uwagę, że gdy $V(\mathbf{p}) = 0$, co skutkuje w $1/\sqrt{\nu'}$ rozbieżnym do nieskończoności i pozornym mnożeniu zera przez nieskończoność, możemy po prostu skorzystać z definicji ν' by zamienić wzór (19) w

$$r(\mathbf{p}, \mathbf{q}, n, \epsilon_n) \simeq \frac{H(\mathbf{p})}{H(\mathbf{q})} - \sqrt{\frac{2V(\mathbf{q})H(\mathbf{p})}{H(\mathbf{q})^3}} t_n. \quad (22)$$

Rezonans zasobowy. Jak widzieliśmy w poprzednich sekcjach, dla transformacji w teoriach zasobów termodynamiki, splątania i koherencji, w przypadku stanów początkowych i końcowych spełniających relację $\nu = 1$ (lub $\nu' = 1$), optymalny współczynnik konwersji przy zaniedbywalnym błędzie transformacji dany jest przez wartość asymptotyczną tego współczynnika, bez żadnych poprawek drugiego rzędu. Oznacza to, że z dokładnością do wielkości rzędu $o(t_n)$, transformacje takie są odwracalne nawet w przypadku skończonej liczby n transformowanych układów. W związku z tym, nowe zjawisko *rezonansu zasobowego* zostało odkryte i omówione w pracy [H6]. Zwróćmy uwagę, że ponieważ energia swobodna $D(\cdot\|\gamma)$ (lub entropia Shannona $H(\cdot)$) kwantyfikuje średnią (asymptotyczną) zawartość zasobów danego stanu, wariancja energii swobodnej $V(\cdot\|\gamma)$ (lub wariancja entropii $V(\cdot)$) może być rozumiana jako kwantyfikator fluktuacji zasobów. Dlatego też stosunek V/D (lub V/H) mówi nam o względnej sile fluktuacji zasobów w pojedynczej kopii danego stanu, a zatem warunek rezonansu $\nu = 1$ (lub $\nu' = 1$) jest spełniony dla par stanów z równą względną fluktuacją zasobów. Poniżej zobrazujemy to ogólne zjawisko przy pomocy dwóch przykładów.

Po pierwsze, rozważmy silnik cieplny z substancją pracującą złożoną z $n = 200$ nieoddziałujących układów dwupoziomowych, działający pomiędzy dwoma łaźniami cieplnymi o temperaturach $T_h > T_c$, i wykonujący pracę na układzie-baterii początkowo przygotowanym w stanie podstawowym. Taki proces może być elegancko ujęty jako problem konwersji pomiędzy stanami kwantowymi w termodynamicznej teorii zasobów, z substancją pracującą o niskiej temperaturze T_c działającą jako termodynamiczny zasób w obecności łaźni cieplnej o wyższej temperaturze T_h . Podczas gdy substancja pracująca ogrzewa się z T_c do T_c' , część jej



Rysunek 4: **(a) Rezonans przy wykonywaniu pracy.** Wydajność silnika cieplnego z substancją pracującą składającą się z $n = 200$ nieoddziałujących kubitów, każdy z przerwą energetyczną ΔE . Temperatura ciepłej łaźni ustalona jest przez $k_B T_h = 10\Delta E$, substancja pracująca początkowo przygotowana w niższej temperaturze T_c i ogrzewa się do T_c' podczas procesu. Po lewej: optymalna jakość wykonanej pracy, mierzona przez wartość funkcji niewierności ϵ pomiędzy końcowym stanem baterii a jej stanem wzbudzonym, podczas wykonania pracy równej $W = 0.95W_C$ na jeden kubit substancji pracującej. Po prawej: optymalny ułamek W_C jaki można wykonać na jeden kubit substancji pracującej, gdy jakość pracy ograniczona jest przez $\epsilon < 10^{-3}$. Przerywana linia na obu wykresach wskazuje pozycję rezonansu zasobowego przewidzianego przez ustawienie $\nu = 1$ we wzorze (7). **(b) Dostrajanie zasobów do rezonansu.** Konwersja stanów kwantowych przy więzach LOCC dla n dwucząstkowych stanów układów trzypoziomowych. Po lewej: wartość funkcji niewierności ϵ pomiędzy pożądanym stanem końcowym $|\Phi\rangle^{\otimes n}$ a optymalnym stanem końcowym osiągalnym z $|\Psi_1\rangle^{\otimes \lambda n} \otimes |\Psi_2\rangle^{\otimes (1-\lambda)n}$. Różne krzywe odpowiadają różnym liczbom przetwarzanych układów $n \in \{5, 10, \dots, 30\}$ (po kolei, od $n = 5$ na samej górze do $n = 30$ na samym dole). Pozycja rezonansowego czynnika zmieszania λ_* (przerywana linia) może być znaleziona przy użyciu wzoru (20). Po prawej: Optymalny współczynnik konwersji r pomiędzy stanem początkowym $|\Psi_i\rangle^{\otimes n}$ a stanem końcowym $|\Phi\rangle^{\otimes n}$ z błędem transformacji ograniczonym przez $\epsilon < 0.01$. Różne wykresy odpowiadają stanom początkowym z równą wartością asymptotyczną współczynnika konwersji (przerywana linia), ale różnymi wartościami współczynnika odwracalności ν' .

zasobu jest konwertowana na pracę poprzez wzbudzenie baterii. Perfekcyjny silnik, używający nieskończenie wielkiej substancji pracującej, $n \rightarrow \infty$, i operujący ciągle z optymalną wydajnością Carnot, byłby w stanie wykonać pracę równą nW_C , równą zmianie energii swobodnej substancji pracującej. Ponieważ jednak n jest małe, fluktuacje energii w substancji pracującej nie są zaniedbywalne w porównaniu ze średnią energią, i dlatego silnik działa poza granicą termodynamiczną. Można wtedy spodziewać się dwóch rodzajów efektów. Z jednej strony, jakość wykonanej pracy [46, 47] nie będzie idealna, ponieważ część fluktuującej energii zostanie przeniesiona na baterię. Po lewej stronie Rys. 4a, zaprezentowano optymalną jakość pracy jako funkcję T_c i T_c' dla silnika wykonującego pracę równą $W = 0.95W_C$ na jedną cząstkę substancji pracującej. Z drugiej strony, jeśli wymusimy by jakość pracy była powyżej pewnej progowej wartości, optymalna wydajność silnika może nie być w stanie osiągnąć wydajności Carnot. Po prawej stronie Rys. 4a, wykreślony jest optymalny ułamek pracy W_C , który może zostać wykonany na jedną cząstkę substancji pracującej przy założeniu, że jakość pracy jest wyższa niż ustalona wartość progowa, znów w funkcji T_c i T_c' . Na obu wykresach jasno widać rezonansowe linie (odpowiadające dokładnie warunkowi rezonansu $\nu = 1$), wskazujące niemal idealną jakość pracy i wydajność niemal równą wydajności Carnot, co odpowiada odwracalnemu (a więc pozbawionemu dyssypacji) procesowi, który wykonany jest daleko poza granicą termodynamiczną z wykorzystaniem substancji pracującej o skończonym rozmiarze.

Po drugie, wyobraźmy sobie dostęp do n dwucząstkowych splątanych stanów czystych, każdy początkowo w stanie ρ_1 lub ρ_2 , i potrzebę przetworzenia ich w dany stan końcowy σ . Ponadto, założmy, że asymptotyczne wartości zasobowe stanów ρ_1 i ρ_2 są równe, tj. asymptotycznie możemy uzyskać tyle samo kopii stanu σ z n kopii stanu ρ_1 , jak i z n kopii stanu ρ_2 . Asymptotyczna wartość współczynnika konwersji może zostać osiągnięta także dla skończonych n , ceną tego jednak będzie błąd transformacji ϵ . Błąd ten zależy od

parametru ν' , dlatego też dla skończonych n stany ρ_1 i ρ_2 nie muszą już mieć tej samej wartości. Co ważne, może się zdarzyć, że stany te są niekompatybilne z σ w przeciwny sposób tak, że parametr odwracalności dla ρ_1 i σ będzie mniejszy od 1, a dla ρ_2 i σ będzie większy od 1. Zatem, biorąc λn kopii stanu ρ_1 i $(1 - \lambda)n$ kopii stanu ρ_2 , można dostroić stan początkowy, by był w rezonansie ze stanem końcowym, tj. by parametr odwracalności był bliski 1. Po lewej stronie Rys. 4b, możemy zobaczyć jak takie dostrajanie redukuje o kilka rzędów wielkości błąd transformacji pomiędzy stanami splątanymi. Zwróćmy tu uwagę na to, że efekt ten jest znacznie silniejszy niż redukcja błędu związana ze zwiększaniem liczby n przetwarzanych stanów, którą możemy obserwować dla $\lambda \in \{0, 1\}$. Zamiast wymagać transformacji z asymptotycznym współczynnikiem konwersji, można też wymóc, by błąd transformacji był poniżej pewnej progowej wartości ϵ . Tak jak przedtem, możemy skupić się na zbiorze stanów $\{\rho_i\}$, które są asymptotycznie równoważne, i zapytać ile kopii stanu σ można otrzymać z $\rho_i^{\otimes n}$, przy błędzie nie przekraczającym ϵ . Patrząc na wzór (19), widzimy że współczynnik konwersji r powinien rosnąć z n , osiągając asymptotyczną wartość szybciej dla stanów ρ_i , które są bliżej rezonansu ze stanem σ . W rzeczy samej tak jest, co potwierdzają numeryczne wyniki zaprezentowane po prawej stronie Rys. 4b.

Związek z twierdzeniem o fluktuacji-dyssypacji. Twierdzenie o fluktuacji-dyssypacji jest fundamentalnym wynikiem fizyki statystycznej, który powiązał odpowiedź układu na zaburzenie z fluktuacjami własności układu w stanie równowagi termodynamicznej [48, 49]. W pracy [H12] wyprowadziłem wariant tego twierdzenia w formalizmie teorii zasobów, gdzie bada się optymalne przejścia pomiędzy stanami w obecności więzów termodynamicznych. By to osiągnąć, skupiłem się na procesach termodynamicznej destylacji, w których początkowy układ, składający się z asymptotycznie wielu nieoddziałujących podukładów, jest przetransformowany (z pewnym dozwolonym błędem) za pomocą operacji termicznych w czysty stan własny energii układu końcowego. Przy tych założeniach, analogicznych do założeń z artykułów [H4–H6], główne wyniki pracy [H12] uchwycone są przez dwa twierdzenia. Pierwsze z nich określa minimalny możliwy błąd transformacji ϵ jako funkcję różnicy energii swobodnych ΔF (mierzonych za pomocą entropii względnej $D(\cdot||\gamma)$) pomiędzy stanem początkowym a pożądanym stanem końcowym, oraz fluktuacji energii swobodnej $\sigma(F)$ (mierzonej przez wariancję entropii względnej $V(\cdot||\gamma)$) w stanie początkowym:

$$\epsilon = \Phi\left(-\frac{\Delta F}{\sigma(F)}\right), \quad (23)$$

gdzie, tak jak wcześniej, $\Phi(x)$ oznacza dystrybucję standardowego rozkładu normalnego. Powyższy wzór został udowodniony dla układów składających się z wielu niezależnych podukładów w dowolnych stanach energetycznie niekoherentnych, a także dla wielu niezależnych podukładów w tym samym stanie czystym (niekoniecznie stanie własnym energii). Drugie twierdzenie (które używa pierwszego w swoim dowodzie) podaje dokładną relację pomiędzy fluktuacjami energii swobodnej $\sigma(F)$ w stanie początkowym, a minimalną ilością energii swobodnej F_{diss} dyssypowaną w optymalnym termodynamicznym procesie destylacji (tj. F_{diss} jest różnicą między energią swobodną stanu początkowego a faktycznego stanu końcowego układu):

$$F_{\text{diss}} = a(\epsilon) \sigma(F) \quad (24)$$

gdzie

$$a(\epsilon) = -\Phi^{-1}(\epsilon)(1 - \epsilon) + \frac{\exp\left(\frac{-(\Phi^{-1}(\epsilon))^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (25)$$

Twierdzenie to zostało udowodnione dla układów składających się z wielu niezależnych podukładów w tym samym stanie energetycznie niekoherentnym, a dla wielu niezależnych podukładów w tym samym stanie czystym udowodniono, że prawa strona wzoru (24) ogranicza z dołu wielkość F_{diss} . Interpretacja fizyczna tego wyniku jest jasna i wprost odnosi się do oryginalnego twierdzenia o fluktuacji-dyssypacji: kiedy układ jest wypychany poza swój stan początkowy (niekoniecznie stan termiczny) w jakiś stan końcowy, ilość dyssypowanej energii swobodnej w tym procesie jest dokładnie proporcjonalna do wielkości fluktuacji energii swobodnej w stanie początkowym. Innymi słowy, to te fluktuacje są odpowiedzialne za dyssypację, tak samo jak w pierwotnych pracach Einsteina i Smoluchowskiego o ruchach Browna [50, 51]. Przypomnijmy, że rozważano tam cząstkę poruszającą się poprzez ciecz, która odczuwa opór i przez to dyssypuje energię, a źródło oporu (tj. wiele małych molekuł cieczy ciągle bombardujących badaną cząstkę) jest tym samym, co źródło losowych fluktuacji położenia cząstki w stanie równowagi termodynamicznej.

4.3.2 Termodynamiczne konsekwencje zasady superpozycji

Optymalne przetwarzanie stanów z koherencją. Rezultaty otrzymane w pracy [H12] były także użyte do wzmocnienia poprzednich wyników dotyczących wydajności ważnych protokołów termodynamicznych. Co najważniejsze, dzięki rozszerzeniu analizy do układów w dowolnych stanach czystych, mogłem zbadać nie tylko rolę termicznych fluktuacji energii, ale także fluktuacji kwantowych, których źródłem jest zasada superpozycji. W szczególności, dla stanów początkowych zadanych przez n kopii dowolnego stanu czystego, $|\psi\rangle^{\otimes n}$, obliczyłem optymalną ilość pracy, którą można wydobyć z tego stanu, a także optymalną ilość informacji, jaką można w tym stanie zakodować bez używania termodynamicznych zasobów. Pomimo zupełnie różnej natury tych stanów w porównaniu do stanów energetycznie niekoherentnych, wyprowadzone równania mają tę samą formę rozwinięcia asymptotycznego drugiego rzędu (tj. wyrażenia gdy $n \rightarrow \infty$ z członem poprawkowym skalującym się jak $1/\sqrt{n}$). Jedyna potrzebna zmiana w równaniach to zamiana energii swobodnej i jej fluktuacji przez średnią energię $\langle E \rangle$ i jej fluktuacje $\sigma(E)$, gdzie

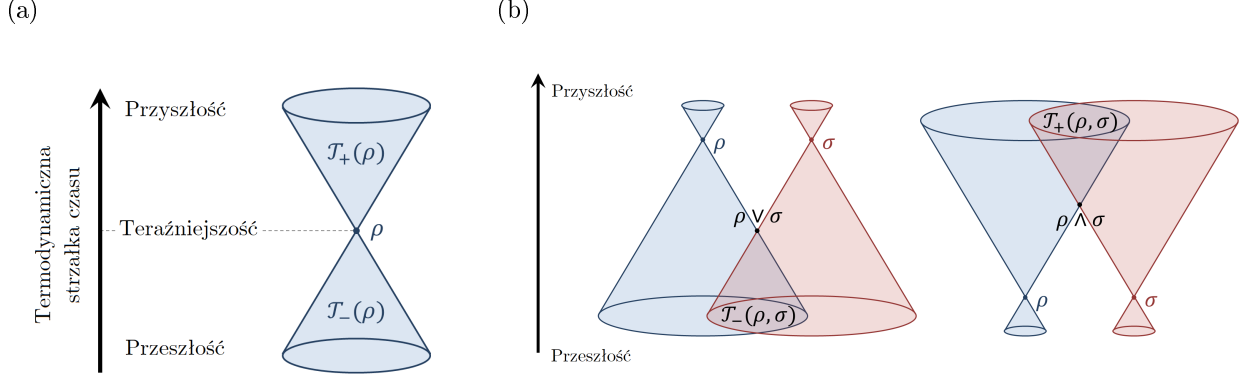
$$\langle E \rangle = N \langle \psi | H | \psi \rangle, \quad \sigma(E) = \sqrt{N} \left(\langle \psi | H^2 | \psi \rangle - \langle \psi | H | \psi \rangle^2 \right). \quad (26)$$

Podsumowując, pokazałem że w reżimie wielu przetwarzanych układów, analiza transformacji termodynamicznych stanów z koherencją jest podobna do analogicznej analizy dla stanów energetycznie niekoherentnych.

Struktura termodynamicznego porządku częściowego. W pracy [H1] badałem strukturę termodynamicznego uporządkowania stanów nierównowagowych, która wyłania się, gdy zbiór dozwolonych transformacji termodynamicznych zadamy przez wszystkie kanały kwantowe, które nie pozwalają na skonstruowanie perpetuum mobile. Każdy taki kanał GP $\mathcal{E}$ (z ang. *Gibbs-preserving*, zachowujący stan Gibbsa) spełnia $\mathcal{E}(\gamma) = \gamma$, a zbiór wszystkich kanałów GP tworzy nadzbiór wcześniej omawianych operacji termicznych. Kanały GP kodują strukturę *termodynamicznej strzałki czasu* mówiąc nam, w jakie stany może wyewoluować dany stan (oraz które stany mogą wyewoluować w niego) w zgodzie z zasadami termodynamiki. Innymi słowy, kiedykolwiek stan ρ może swobodnie, tj. bez używania dodatkowych zasobów termodynamicznych, wyewoluować w stan σ , to ρ poprzedza σ w termodynamicznym porządku częściowym. Zamiast skupiać się na uporządkowaniu indukowanym przez kanały GP pomiędzy poszczególnymi stanami, w pracy [H1] skupiłem się na globalnych własnościach termodynamicznej strzałki czasu. Będąc bardziej precyzyjnym, porządek częściowy to bardzo ogólna struktura, badana przez dział matematyki zwany teorią porządku [52], którą definiują trzy własności: zwrotność, przechodniość i antysymetria. Ponieważ jest to tak szerokie i ogólne pojęcie, nasuwa się oczywiste pytanie, czy porządek termodynamiczny ma bardziej sztywną lub szczególną strukturę. Inspirując się teorio-porządkowymi ideami, w pracy [H1] skupiam się na specjalnym rodzaju porządku częściowego znanym jako *krata*, interpretuję go z perspektywy termodynamicznej i przedstawiam dowody na to, że zasada superpozycji odpowiedzialna jest za nadanie dodatkowej struktury termodynamicznej strzałce czasu.

Krata termodynamiczna. W celu zbadania porządku termodynamicznego pomiędzy stanami układu, warto wprowadzić pojęcie *stożków termicznych* (patrz Rys. 5a). Zbiór stanów $\mathcal{T}_+(\rho)$, w które stan ρ może zostać przetworzony za pomocą kanałów GP, nazywany jest *przyszłym stożkiem termicznym* stanu ρ . Analogicznie, zbiór stanów $\mathcal{T}_-(\rho)$, które mogą być przetworzone w ρ za pomocą kanałów GP, nazywany jest *przeszłym stożkiem termicznym* stanu ρ . Następnie, dla dowolnych dwóch stanów ρ i σ , definiujemy zbiór $\mathcal{T}_-(\rho, \sigma) = \mathcal{T}_-(\rho) \cap \mathcal{T}_-(\sigma)$, tj. zbiór wszystkich stanów, których przyszłe stożki termiczne zawierają zarówno ρ , jak i σ . Zbiór $\mathcal{T}_-(\rho, \sigma)$ termodynamicznie interpretujemy jako zbiór stanów w przeszłości, które mogą wyewoluować w zgodzie z termodynamiczną strzałką czasu zarówno w ρ i w σ w teraźniejszości. Analogicznie definiujemy zbiór $\mathcal{T}_+(\rho, \sigma) = \mathcal{T}_+(\rho) \cap \mathcal{T}_+(\sigma)$, tj. zbiór wszystkich stanów, których przeszłe stożki termiczne zawierają zarówno ρ , jak i σ . Podobnie interpretujemy $\mathcal{T}_+(\rho, \sigma)$ jako zbiór stanów w przyszłości, które mogą być osiągnięte w zgodzie z termodynamiczną strzałką czasu zarówno z ρ i z σ w teraźniejszości. Jeśli istnieje takie $\tau_- \in \mathcal{T}_-(\rho, \sigma)$, że dla wszystkich $\tau \in \mathcal{T}_-(\rho, \sigma)$ mamy $\tau_- \in \mathcal{T}_+(\tau)$, to τ_- nazywane jest *sumą kratową* ρ i σ , oznaczaną zwyczajowo przez $\rho \vee \sigma$ (patrz Rys. 5b). Notacja taka jest uzasadniona faktem, że $\mathcal{T}_+(\tau_-)$ jest najmniejszym stożkiem termicznym zawierającym $\mathcal{T}_+(\rho) \cup \mathcal{T}_+(\sigma)$. Termodynamicznie interpretujemy sumę kratową ρ i σ jako unikalny stan³ w przeszłości, który jest spójny z ρ i z σ w teraźniejszości, a także spójny

³Tak naprawdę “unikalny stan” oznacza tu właściwie stan, który jest unikalny z dokładnością do relacji równoważności zadanej przez stany, które są wzajemnie między sobą osiągalne za pomocą kanałów GP.



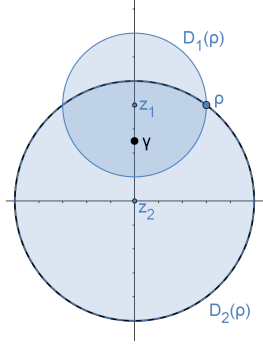
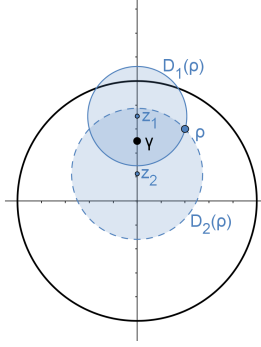
Rysunek 5: **(a) Stożki termiczne.** Osiągalność jednych stanów z innych za pomocą kanałów GP wprowadza uporządkowanie stanów kwantowych wzdłuż termodynamicznej strzałki czasu. Stany, które mogą być osiągnięte z danego stanu ρ tworzą jego przyszły stożek termiczny $\mathcal{T}_+(\rho)$, natomiast stany, które mogą być przetransformowane w ρ tworzą jego przeszły stożek termiczny $\mathcal{T}_-(\rho)$. **(b) Wizualizacja sumy i iloczynu kratowego.** Po lewej: część wspólna stożków termicznych stanów ρ i σ , oznaczona przez $\mathcal{T}_-(\rho, \sigma)$, to zbiór stanów, które mogą termodynamicznie wyewoluować zarówno w ρ , jak i w σ . Suma kratowa $\rho \vee \sigma$ to unikalny stan należący do $\mathcal{T}_-(\rho, \sigma)$, który może być termodynamicznie osiągnięty z każdego stanu należącego do $\mathcal{T}_-(\rho, \sigma)$. Po prawej: część wspólna przyszłych stożków termicznych stanów ρ i σ , oznacza przez $\mathcal{T}_+(\rho, \sigma)$, to zbiór stanów, w które może termodynamicznie wyewoluować zarówno stan ρ , jak i σ . Iloczyn kratowy $\rho \wedge \sigma$ to unikalny stan należący do $\mathcal{T}_+(\rho, \sigma)$, który może termodynamicznie wyewoluować w każdy stan należący do $\mathcal{T}_+(\rho, \sigma)$.

ze wszystkimi możliwymi wspólnymi przeszłościami stanów ρ i σ . Sumę kratową można także widzieć jako ekstremalny moment w przeszłej ewolucji układu, w którym układ musiał się “zdecydować”, czy ewoluować w stronę ρ , czy też σ . Analogicznie, jeśli istnieje takie $\tau_+ \in \mathcal{T}_+(\rho, \sigma)$, że dla wszystkich $\tau \in \mathcal{T}_+(\rho, \sigma)$ mamy $\tau_+ \in \mathcal{T}_-(\tau)$, to τ_+ nazywane jest *iloczynem kratowym* ρ i σ , oznaczanym zwyczajowo przez $\rho \wedge \sigma$ (patrz Rys. 5b). Notacja ta znowu uzasadniona jest przez fakt, że $\mathcal{T}_+(\tau_+)$ jest największym stożkiem termicznym zawartym w $\mathcal{T}_+(\rho) \cap \mathcal{T}_+(\sigma)$. Termodynamicznie interpretujemy iloczyn kratowy ρ i σ jako unikalny stan w przyszłości, który jest spójny z ρ i z σ w teraźniejszości, a także spójny ze wszystkimi możliwymi wspólnymi przyszłościami ρ i σ . Iloczyn kratowy można także widzieć jako ekstremalny moment w przyszłej ewolucji układu, po którym układ “zapomina”, czy wyewoluował z ρ , czy też z σ , ponieważ stan staje się spójny z oboma przeszłościami.

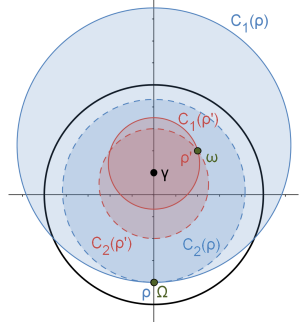
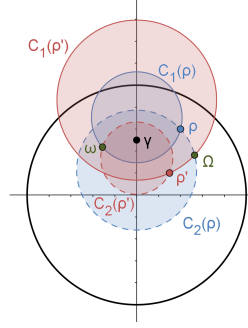
W pracy [H1], zwracam uwagę, że w granicy nieskończonej temperatury termodynamiczna strzałka czasu ma strukturę kraty, oraz podaję bezpośrednie wyrażenia na sumę i iloczyn kratowy dowolnych dwóch stanów. Co istotne, struktura kraty wciąż jest zachowana, gdy ograniczy się rozważania do podzbioru stanów klasycznych, tj. stanów energetycznie niekoherentnych, które można reprezentować za pomocą wektora prawdopodobieństwa opisującego obsadzenia poziomów energetycznych. Dlatego też, gdy $T \rightarrow \infty$, zarówno klasyczna jak i kwantowa strzałka czasu ma strukturę kraty. Pokazuję jednak też, że ta struktura zanika w reżimie klasycznym, gdy rozważymy skończone temperatury. Co ciekawe, udowadniam także, że struktura kraty może przetrwać w skończonych temperaturach, jeśli rozważać będziemy pełny zbiór stanów kwantowych, co sugeruje z kolei, iż koherencja kwantowa może grać istotną rolę w zapewnieniu odpowiedniej struktury termodynamicznej strzałce czasu. By to osiągnąć, skupiłem się na zbadaniu termodynamiki najprostszego możliwego modelu kwantowego danego przez układ dwupoziomowy. W tym wypadku całkowicie rozwiązałem problem konwersji pomiędzy stanami układu za pomocą kanałów GP oraz pokazałem, że uzyskany porządek jest w istocie kratą. Najpierw znalazłem przyszły stożek termiczny $\mathcal{T}_+(\rho)$ dla stanów kubitowych ρ . Na sferze Blocha, jest on dany przez obszar zdefiniowany przez obracanie wokół osi z części wspólnej dwóch dysków, $D_1(\rho) \cap D_2(\rho)$, (zob. Rys. 6a), gdzie D_1 i D_2 zdefiniowane są następująco. Przypomnijmy, że reprezentacja na sferze Blocha stanu kubitowego ρ dana jest przez

$$\rho = \frac{\mathbb{1} + \mathbf{r}_\rho \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad (27)$$

(a)



(b)



Rysunek 6: **(a) Przyszły stożek termiczny dla kubitów (zdefiniowany przez kanały GP).** Ogólny stan kubitowy ρ oraz stan termiczny γ z $\mathbf{r}_\gamma = (0, 0, 0.5)$ zaprezentowane na sferze Blocha. Dysk $D_1(\rho)$ odpowiada zbiorowi stanów $\{\sigma\}$ z $R_-(\sigma) \leq R_-(\rho)$, natomiast dysk $D_2(\rho)$ odpowiada zbiorowi stanów $\{\sigma\}$ z $R_+(\sigma) \leq R_+(\rho)$. Równości osiągnięte są na brzegach dysków. Zbiór stanów, do których ρ może być przetransformowane przez kanały GP, zadany jest przez część wspólną $D_1(\rho) \cap D_2(\rho)$ (która może być także dowolnie obracana wokół osi z). Po lewej: zmieszany stan początkowy z $\mathbf{r}_\rho = (0.4, 0, 0.6)$. Po prawej: czysty stan początkowy z $\mathbf{r}_\rho = (0.6, 0, 0.8)$. **(b) Termodynamiczna krata dla kubitów.** Stan termiczny γ oraz dwa stany ρ i ρ' zaprezentowane na sferze Blocha. Po lewej: stany opisane przez $\mathbf{r}_\rho = (0.4, 0, 0.6)$, $\mathbf{r}_{\rho'} = (0.3, 0, 0.2)$, $\mathbf{r}_\gamma = (0, 0, 0.5)$. Suma kratowa Ω dla stanów ρ i ρ' leży na przecięciu okręgów C_i definiujących dyski $D_1(\rho)$ i $D_2(\rho)$, natomiast ich iloczyn kratowy ω leży na przecięciu okręgów C_i definiujących dyski $D_1(\rho)$ i $D_2(\rho')$. Po prawej: stany opisane przez $\mathbf{r}_\rho = (0, 0, -0.8)$, $\mathbf{r}_{\rho'} = (0.4, 0, 0.4)$, $\mathbf{r}_\gamma = (0, 0, 0.2)$. Suma kratowa Ω dla stanów ρ i ρ' leży na przecięciu okręgów C_i definiujących dyski $D_1(\rho)$ i $D_2(\rho)$ (i pokrywa się ze stanem ρ), natomiast ich iloczyn kratowy ω leży na przecięciu okręgów C_i definiujących dyski $D_1(\rho')$ i $D_2(\rho')$ (i pokrywa się ze stanem ρ').

gdzie $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ oznacza wektor macierzy Pauliego. Następnie, ustawiamy sferę Blocha tak, żeby wektory Blocha rozważanego stanu ρ i stanu termicznego γ dane były przez $\mathbf{r}_\rho = (x, 0, z)$ i $\mathbf{r}_\gamma = (0, 0, \zeta)$. Dwa dyski, $D_1(\rho)$ i $D_2(\rho)$, mają wtedy promienie

$$R_1(\rho) = \frac{R_-(\rho) + \zeta^2}{1 - \zeta^2}, \quad R_2(\rho) = \frac{R_+(\rho) - \zeta^2}{1 - \zeta^2}, \quad (28)$$

oraz środki w punktach

$$\mathbf{z}_1(\rho) = [0, 0, \zeta(1 + R_1(\rho))], \quad \mathbf{z}_2(\rho) = [0, 0, \zeta(1 - R_2(\rho))], \quad (29)$$

gdzie

$$R_\pm(\rho) = \sqrt{(z - \zeta)^2 + x^2(1 - \zeta^2)} \pm \zeta z. \quad (30)$$

Suma i iloczyn kratowy dla stanów ρ i ρ' są teraz zdefiniowane przy pomocy

$$\rho_m^{\max} = \arg \max\{R_m(\rho), R_m(\rho')\}, \quad \rho_m^{\min} = \arg \min\{R_m(\rho), R_m(\rho')\}, \quad (31)$$

dla $m \in \{1, 2\}$: suma kratowa dana jest przez stan leżący na sferze Blocha na przecięciu dwóch okręgów definiujących $D_1(\rho_1^{\max})$ i $D_2(\rho_2^{\max})$, a iloczyn kratowy zdefiniowany jest analogicznie przez podmiannę max na min (zob. Rys. 6b).

Wreszcie, podkreślić należy, że istnienie kraty termodynamicznej nie tylko pogłębiłoby nasze rozumienie termodynamicznej strzałki czasu (z unikalną spójną przyszłością i przeszłością dla każdego podzbioru stanów), ale także pozwoliłoby na użycie nowych narzędzi algebraicznych do studiowania termodynamiki. Mianowicie, jeśli termodynamiczny porządek częściowy ma strukturę kraty, to może być w pełni opisany przez strukturę algebraiczną składającą się ze zbioru stanów kwantowych i dwóch binarnych operacji $\vee$ oraz $\wedge$, które spełniają następujące aksjomaty dla wszystkich stanów ρ, σ, τ :

$$\rho \vee \sigma = \sigma \vee \rho, \quad \rho \vee (\sigma \vee \tau) = (\rho \vee \sigma) \vee \tau, \quad \rho \vee (\rho \wedge \sigma) = \rho, \quad (32)$$

oraz kolejne trzy otrzymane przez podmianę w powyższych wyrażeniach $\vee$ na $\wedge$.

Proces wymazywania historii. Aby zapewnić fizyczną interpretację powyżej przedstawionych wyników, oraz aby podkreślić różnicę między przypadkami nieskończonej i skończonej temperatury (a także między sytuacją klasyczną i kwantową), w pracy [H1] wprowadziłem i omówiłem pojęcie *procesu wymazywania historii*. Wyobraźmy sobie, że dwa różne zdarzenia mogły zdarzyć się “w przeszłości”: układ mógł być przygotowany albo w stanie ρ , albo w stanie σ . Następnie ewoluował zgodnie z termodynamiczną strzałką czasu do stanu τ , tj. kanał GP przetransformował układ w stan τ . Pytamy teraz: czy da się wywnioskować przeszłość układu (tj. czy był on początkowo przygotowany w stanie ρ czy σ) ze stanu teraźniejszego τ ? Jeśli oba stany ρ i σ należą do przeszłego stożka termicznego $\mathcal{T}_-(\tau)$, to jest to niemożliwe i mówimy wtedy, że historia- (ρ, σ) została wymazana podczas ewolucji. Oczywiście, każda historia może być wymazana przez ewolucję, która przeprowadza układ w stan równowagi termodynamicznej γ . Niekoniecznym jednak musi być, by system stermalizował całkowicie w γ , aby wymazać jego historię. Dlatego też pojawia się następujące pytanie: jak daleko wzdłuż strzałki czasu musi ewoluować układ, by jego stan stał się spójny z dwoma możliwymi przeszłościami, zadanymi przez stany ρ i σ ? Aby rygorystycznie uchwycić pojęcie “daleko”, możemy zapytać: o ile energia swobodna układu musi spaść, aby wykasować historię- (ρ, σ) ? Najprostszy przypadek to ten, w którym obie potencjalne przeszłości są wzajemnie termodynamicznie uporządkowane, powiedzmy ρ należy do przeszłego stożka termicznego σ . Wtedy, jeśli układ przygotowany był w stanie σ , to nie musi w ogóle ewoluować (a jego energia swobodna nie musi się zmniejszać), by wymazać historię. W rzeczy samej, obserwując układ w stanie σ , nie moglibyśmy stwierdzić, czy zaczął on w ρ i stermalizował do σ , czy też był przygotowany w σ i w ogóle nie ewoluował (przypomnijmy, że operacja identyczności jest dozwolonym termodynamicznie kanałem GP). Ciekawszym przypadkiem jest, gdy ρ i σ nie są uporządkowane. Wtedy, w ogólności, może istnieć wiele optymalnych stanów τ , które prowadzą do wymazania historii, tj. stanów, które należą do przyszłego stożka termicznego obu stanów ρ i σ , ale których przeszłe stożki termiczne nie zawierają stanów z taką własnością. Jeśli jednak porządek termodynamiczny ma strukturę kraty, to istnieje taki unikalny stan optymalny τ , zadany przez iloczyn kratowy $\rho \wedge \sigma$, który prowadzi do wymazania historii- (ρ, σ) . Fakt, iż w granicy nieskończonej temperatury mamy do czynienia z kratą oznacza, że gdy informacja jest jedynym termodynamicznym zasobem (w tym sensie, że nie ma znaczenia, który poziom energetyczny jest obsadzony, a jedynie to, jak mocno zlokalizowany jest rozkład obsadzeń), to istnieje unikalny optymalny proces wymazywania historii. Innymi słowy, istnieje dobrze zdefiniowany sposób na wymazanie historii tak, by wszystkie termodynamiczne monotony (jak energia swobodna) obniżyły się o minimalną możliwą wartość. Z drugiej strony, w reżimie klasycznym w skończonych temperaturach, nie istnieje taki unikalny proces wymazywania historii, a raczej wiele nierównoważnych procesów, każdy optymalizujący spadek innego monotonu termodynamicznego. Wreszcie, w przypadku układów dwupoziomowych, jeśli nie ograniczymy się do stanów klasycznych, to istnieje optymalny sposób na wymazanie historii- (ρ, σ) , zadany przez iloczyn kratowy ρ i σ . Zwróćmy uwagę, że dla dwóch klasycznych stanów, ich iloczyn kratowy zadany jest przez stan nieklasyczny z koherencją. Dlatego też widzimy, że dla układu dwupoziomowego koherencja jest niezbędna dla istnienia optymalnego procesu wymazywania historii w skończonych temperaturach, a zatem wykorzystując koherencję można wymazać klasyczną historię zużywając mniej energii swobodnej.

4.4 Wyniki dotyczące więzów pamięci

4.4.1 Optymalne przetwarzanie termodynamiczne bez pamięci

Markowskie procesy termiczne. Celem pracy [H14] było uchwycenie praw rządzących dozwolonymi transformacjami termodynamicznymi przy założeniu, że układ kwantowy oddziałuje z łaźnią cieplną o temperaturze $T = 1/(k_B\beta)$ w bezpamięciowy (markowski) sposób. Warunek markowskości zwyczajowo pojawia się przy mikroskopowych wyprowadzeniach dynamiki układu kwantowego oddziałującego z makroskopową łaźnią cieplną w granicy słabego sprzężenia [21, 53, 54]. Formalnie, ewolucja stanu ρ układu jest wtedy opisana równaniem GKSL (od nazwisk jego twórców: Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad) o ogólnej postaci [19, 20]:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \mathcal{H}(\rho(t)) + \mathcal{L}_t(\rho(t)). \quad (33)$$

Pierwszy człon, $\mathcal{H}$, jest generatorem zamkniętej (odwracalnej) dynamiki kwantowej,

$$\mathcal{H}(\rho) = -i[H, \rho], \quad (34)$$

z $[\cdot, \cdot]$ oznaczającym komutator, $[A, B] = AB - BA$, oraz H będącym (ubranym) Hamiltonianem układu, który tu zakładamy jako niezależny od czasu. Drugi człon, $\mathcal{L}_t$, znany jest jako *Lindbladian* lub *dyssypator* i generuje otwartą (nieodwracalną) dynamikę kwantową. Ma on następującą ogólną postać:

$$\mathcal{L}_t(\rho) = \sum_i r_i(t) \left(L_i(t) \rho L_i(t)^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_i(t)^\dagger L_i(t), \rho \} \right), \quad (35)$$

z $\{\cdot, \cdot\}$ oznaczającym antykomutator, $\{A, B\} = AB + BA$, $L_i(t)$ będącymi zależnymi od czasu *operatorami skoków*, a $r_i(t)$ zależnymi od czasu, nieujemnymi *szybkościami skoków*. Podczas gdy dla ogólnego Lindbladianu jedynym wymaganiem jest nieujemność r_i , Lindbladiany wynikające z oddziaływań układu kwantowego z dużą łaźnią cieplną mają także następujące standardowe własności [21, 53, 54]:

(P1) **Stacjonarny stan termiczny.** Gibbsowski stan równowagi termodynamicznej γ (zadany przez wzór (1) z H zamiast H_B) jest stacjonarnym rozwiązaniem równania ewolucji, tj.

$$\forall t: \quad \mathcal{L}_t \gamma = 0. \quad (36)$$

(P2) **Kowariancja.** Lindbladian $\mathcal{L}_t$ komutuje z generatorem dynamiki hamiltonowskiej $\mathcal{H}$ dla wszystkich czasów t , tj.

$$\forall \rho: \quad \mathcal{L}_t(\mathcal{H}(\rho)) = \mathcal{H}(\mathcal{L}_t(\rho)). \quad (37)$$

Dynamikę kwantową generowaną przez równanie GKLS dane wzorem (33) oraz spełniające własności (P1)-(P2) nazywamy *markowskim procesem termicznym*. Innymi słowy, kanał kwantowy $\mathcal{E}$ jest MTP (z ang. *Markovian thermal process*), jeśli uzyskany jest w wyniku scałkowania równania (33) pomiędzy czasem 0 a $t_f \in [0, +\infty]$, z Lindbladianem $\mathcal{L}_t$ spełniającym własności (P1)-(P2). Kanały te tworzą standardowy opis termalizacji w termodynamice kwantowej oraz poza nią (zob. np. dyskusję w sekcji 3.1 pracy [54]), i są głównym tematem pracy [H14].

Mimo iż nie da się łatwo scharakteryzować *wszystkich* sytuacji fizycznych, które można zamodelować przy wykorzystaniu MTP, sytuacje takie zdarzają się typowo. Kluczowym faktem, o którym należy pamiętać, jest to, że MTP są *efektywnym modelem*, który pojawia się po zastosowaniu powszechnie używanych przybliżeń (takich jak przybliżenie wiekowe, czy pominięcie przesunięcia Lamba) i w odpowiednim układzie odniesienia (zwykle: w wirującym układzie odniesienia). Dla konkretnego przykładu, rozważmy typową sytuację kwantowego silnika cieplnego z substancją pracującą o dyskretnym spektrum i w granicy słabego sprzężenia. Zwyczajowo dyssypatory działają wtedy tylko przez pewien czas, a potem są nagle zmieniane na inne, zgodnie z określonym harmonogramem. Jest to szczególna wersja równania (35) z $L_i(t) \equiv L_i$, $r_i(t)$ danymi przez odpowiednie funkcje skokowe, oraz H (w przybliżeniu) stałym po odrzuceniu małego przesunięcia Lamba. Co ważne, to nie tylko ciekawa klasa przykładów: jak pokazałem w pracy [H14], tego typu ograniczona kontrola skokowa jest wystarczająca by zrealizować każdą transformację MTP. Dlatego też do każdej sytuacji, która może być formalnie zamodelowana przez równanie (33) z własnościami (P1)-(P2) (z lub bez zależności od czasu $\mathcal{L}_t$), możemy zastosować wyniki otrzymane w pracy [H14]. Sytuacje te to np. modelowanie niekoherentnego szumu w komputerze kwantowym, czy efektywne modele opisujące fluorescencję i inne nieradiacyjne kanały zaniku w atomach, molekułach i nanostrukturach [55]. Co więcej, korzystając z dobrze znanej formalnej równoważności pomiędzy termodynamiką a innymi modelami dyssypacji [56] (np. depolaryzacja i tłumienie amplitudy w teorii kwantowej informacji może być widziane jako szczególne przypadki markowskich procesów termicznych z $\beta \rightarrow 0$ i $\beta \rightarrow \infty$), wyniki pracy [H14] mogą być także wykorzystane poza oczywistymi sytuacjami termodynamicznymi.

Kompletny zbiór zasad. Jednym z głównych pytań dotyczących transformacji termodynamicznych w obecności więzów pamięci jest: które stany końcowe $\rho(t_f)$ są osiągalne z danego stanu początkowego $\rho(0)$ za pomocą markowskich procesów termicznych? Jeśli istnieje taki proces mapujący $\rho(0)$ w $\rho(t_f)$, oznaczać to będziemy przez

$$\rho(0) \xrightarrow{\text{MTP}} \rho(t_f). \quad (38)$$

Głównym wkładem pracy [H14] jest znalezienie kompletnego zbioru warunków pozwalających odpowiedzieć na to pytanie, gdy $\rho(t_f)$ jest blokowo-diagonalne w bazie energii (tzn. gdy jest stanem energetycznie niekoherentnym). Z powodu własności (P2), badany problem można zredukować do problemu dotyczącego tylko rozkładów energii (obsadzeń):

$$\mathbf{p}(0) \xrightarrow{\text{MTP}} \mathbf{p}(t_f). \quad (39)$$

Ważnym jest tu fakt, że otrzymane rozwiązanie spełnia dwa dezyderaty:

- (D1) **Skończona weryfikowalność.** Zweryfikowanie, czy $\mathbf{p}(0) \xrightarrow{\text{MTP}} \mathbf{p}(t_f)$ dla dowolnych stanów początkowych i końcowych wymaga sprawdzenia tylko skończonej liczby warunków.
- (D2) **Konstruowalność.** Kiedykolwiek $\mathbf{p}(0) \xrightarrow{\text{MTP}} \mathbf{p}(t_f)$, istnieje przepis (wykorzystujący sekwencję elementarnych operacji) na skonstruowanie markowskiego procesu termicznego realizującego to przejście.

Powyższe wymagania są kluczowe dla efektywnego wykorzystania otrzymanych wyników, a typowo nie są spełnione w innych podejściach teorii zasobów.

Ciągła termomajoryzacja. Pierwszym krokiem w stronę znalezienia kompletnego zbioru zasad rządzących transformacjami MTP było wprowadzenie uogólnionego wariantu porządku termomajoryzacyjnego $\succ_\gamma$ [17, 27]. Mówimy, że wektor prawdopodobieństwa $\mathbf{p}$ *ciągle termomajoryzuje* $\mathbf{q}$, co oznaczamy przez $\mathbf{p} \succ_\gamma \mathbf{q}$, jeśli istnieje ciągły zbiór wektorów prawdopodobieństwa $\mathbf{r}(t)$ dla $t \in [0, t_f)$ taki, że

1. $\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}$,
2. $\forall t_1, t_2 \in [0, t_f) : t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathbf{r}(t_1) \succ_\gamma \mathbf{r}(t_2)$,
3. $\mathbf{r}(t_f) = \mathbf{q}$.

Rodzinę wektorów prawdopodobieństwa $\mathbf{r}(t)$ spełniającą powyższe warunki nazywamy *trajektorią termomajoryzacyjną* między $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$. Znaczenie ciągłej termomajoryzacji dla transformacji przy pomocy MTP uchwycone jest przez następujący wynik udowodniony w pracy [H14]:

$$\mathbf{p}(0) \xrightarrow{\text{MTP}} \mathbf{p}(t_f) \iff \mathbf{p}(0) \succ_\gamma \mathbf{p}(t_f). \quad (40)$$

Uniwersalność elementarnych termalizacji. Drugim krokiem było ustalenie, że dla każdej pary wektorów prawdopodobieństwa spełniających $\mathbf{p}(0) \succ_\gamma \mathbf{p}(t_f)$, istnieje szczególnie prosta trajektoria termomajoryzacyjna. Skonstruowana jest ona przy pomocy *elementarnych termalizacji*, z których każda działa tylko na dwóch poziomach energetycznych (i, j) i dana jest przez ekstremalnie proste markowskie równania resetujące,

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_j} (p_i + p_j) - p_i \right), \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{dp_i}{dt}.$$

które opisują wykładniczą relaksację do stanu równowagi:

$$\mathbf{p}^{i,j}(t) = e^{-t/\tau} \mathbf{p}^{i,j}(0) + N_{ij}(0)(1 - e^{-t/\tau}) \boldsymbol{\gamma}^{i,j}. \quad (42)$$

Powyżej $\mathbf{x}^{i,j}(t) := (x_i(t), x_j(t))$ a $N_{ij} = p_i(0) + p_j(0)$. Możemy to także zapisać formalnie za pomocą równania macierzowego

$$\mathbf{p}^{i,j}(t) = T^{i,j}(\lambda_t) \mathbf{p}^{i,j}(0) \quad (43)$$

gdzie $\lambda_t = 1 - e^{-t/\tau}$ oraz

$$T^{i,j}(\lambda) = \begin{bmatrix} (1 - \lambda) + \frac{\lambda \gamma_i}{\gamma_i + \gamma_j} & \lambda \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_j} \\ \lambda \frac{\gamma_j}{\gamma_i + \gamma_j} & (1 - \lambda) + \frac{\lambda \gamma_j}{\gamma_i + \gamma_j} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Transformacje te wyróżniają się swoją formalną prostotą – są to procesy stochastyczne z termicznym punktem stałym na dwóch poziomach, które można zrealizować za pomocą markowskiego równania ewolucji. Co więcej, pojawiają się one naturalnie w rozmaitych podejściach do kwantowej termodynamiki [57–59], gdzie

często używa się ich jako cegiełek budujących bardziej złożone protokoły [60–62]. Znaczenie elementarnych termalizacji dla transformacji MTP zostało udowodnione w pracy [H14] przez dowiedzenie następującego wyniku:

$$\mathbf{p}(0) \gg_{\gamma} \mathbf{p}(t_f) \iff \mathbf{p}(t_f) = T^{i_f, j_f}(\lambda_f) \dots T^{i_1, j_1}(\lambda_1) \mathbf{p}(0), \quad (45)$$

tj. elementarne termalizacje tworzą uniwersalny zbiór operacji w tym sensie, że kiedykolwiek istnieje jakaś trajektoria termomajoryzacyjna łącząca $\mathbf{p}(0)$ i $\mathbf{p}(t_f)$, to istnieje także taka trajektoria zdefiniowana za pomocą elementarnych termalizacji.

Drugie prawa termodynamiki w reżimie markowskim. Łącząc ze sobą wyniki ze wzorów (40) i (45), możemy ustalić równoważność pomiędzy istnieniem markowskiego kanału termicznego między dwoma blokowo-diagonalnymi stanami opisanymi przez wektory prawdopodobieństwa $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$, a istnieniem skończonej sekwencji elementarnych termalizacji pomiędzy tymi dwoma wektorami:

$$\mathbf{p}(0) \xrightarrow{\text{MTP}} \mathbf{p}(t_f) \iff \mathbf{p}(t_f) = T^{i_f, j_f}(\lambda_f) \dots T^{i_1, j_1}(\lambda_1) \mathbf{p}(0). \quad (46)$$

Co więcej, w pracy [H14] pokazałem jak, bez straty ogólności, można ograniczyć większość z powyższych elementarnych termalizacji do skończonej klasy pełnych termalizacji z $\lambda = 1$. W wyniku tego otrzymano skończoną liczbę warunków do zweryfikowania, a więc dezyderat (D1) został spełniony. Ponadto, kiedykolwiek warunki te są spełnione, wiadomo dokładnie jak skonstruować MTP pomiędzy $\mathbf{p}(0)$ a $\mathbf{p}(t_f)$ używając elementarnych termalizacji, a więc dezyderat (D2) został także spełniony. Aby przedstawić warunki, o których mowa, potrzeba nam najpierw wprowadzić następujące dwa pojęcia. Po pierwsze, γ -uporządkowanie $\pi(\mathbf{p})$ danego wektora $\mathbf{p}$ jest taką zmianą kolejności $\{1, \dots, d\}$, która sortuje p_i/γ_i nierosnąco. Po drugie, szereg wektorów γ -uporządkowań $\{\pi^k\}$ nazywamy kanonicznym, gdy π^k i π^{k+1} różnią się tylko o transpozycję sąsiadujących elementów, a każde γ -uporządkowanie pojawia się co najwyżej raz. Głównym wynikiem pracy [H14] jest następujący przepis. Mając dane $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$, znajdziemy najpierw wszystkie kanoniczne szeregi $\{\pi^k\}_{k=1}^N$ z $\pi^1 = \pi(\mathbf{p})$ i $\pi^N = \pi(\mathbf{q})$. Dla każdego takiego szeregu, skonstruujemy następujący stan

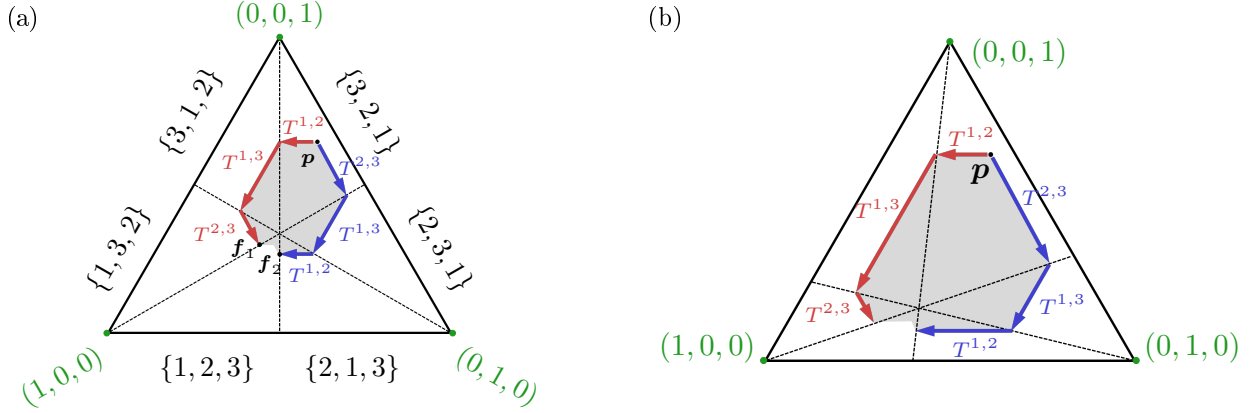
$$\mathbf{f} := \prod_{k=1}^{N-1} T^{i_k, j_k}(1) \mathbf{p}, \quad (47)$$

gdzie $T^{i_k, j_k}(1)$ są pełnymi elementarnymi termalizacjami z $\lambda = 1$ oraz poziomami i_k, j_k określonymi przez składowe, na których π^k i π^{k+1} się różnią. Wreszcie, relacja $\mathbf{p} \xrightarrow{\text{MTP}} \mathbf{q}$ zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy przynajmniej dla jednego $\mathbf{f}$ mamy

$$\mathbf{f} \succ_{\gamma} \mathbf{q}. \quad (48)$$

Na Rys. 7 zilustrowano, jak zweryfikować powyższy kompletny zbiór warunków (drugich praw termodynamiki w reżimie markowskim) dla prostego przypadku układu o $d = 3$ poziomach. Ponadto, w pracy [H14] szczegółowo wytłumaczono, jak zbudować algorytm weryfikujący otrzymane warunki dla dowolnego d oraz zamieszczono kod realizujący go przy pomocy oprogramowania *Mathematica* [63].

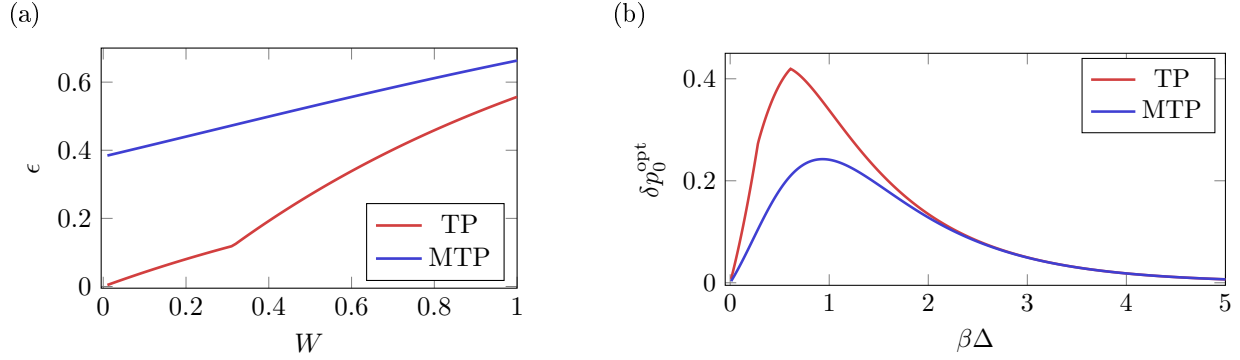
Optymalizacja termalizacji. Narzędzia matematyczne wprowadzone w artykule [H14] zostały zastosowane w pracy [H15] do rozwiązywania problemów optymalizacji dotyczących chłodzenia, wykonywania pracy oraz katalizy, a także do skwantyfikowania mocy pamięci (tj. niemarkowskiej dynamiki) do zwiększenia wydajności tych protokołów termodynamicznych. Na początku zanalizowałem istotne z perspektywy eksperymentalnej algorytmiczne protokoły chłodzenia za pomocą łaźni cieplnej (protokoły HBAC, z ang. *heat-bath algorithmic cooling protocols* [64–68]), których celem jest osiągnięcie największego możliwego ochłodzenia danego układu za pomocą protokołu składającego się z następujących dwóch kroków. W pierwszym kroku wykonuje się ewolucję unitarną danego układu i układów pomocniczych w stanie termicznym. W drugim kroku, układy te oddziałują z makroskopową łaźnią cieplną. Oba kroki powtarza się wielokrotnie, a ich eksperymentalne realizacje zostały zademonstrowane m.in. w architekturach nuklearnego rezonansu magnetycznego (ciałostalowego i ciekłego), pułapek jonowych oraz optyki kwantowej [68]. W jednym z bardziej znanych protokołów PPA (z ang. *partner pairing algorithm*) [69], oddziaływanie z otoczeniem jest zwyczajnie zadane przez resetowanie pomocniczych układów do stanu termicznego. Przez długi czas był to najlepszy znany sposób, aż do wprowadzenia protokołu SRΓ (z ang. *state-reset-Γ*) [70]. Oparty jest on o jądrowy



Rysunek 7: **Stany osiągalne za pomocą MTP dla $d = 3$.** (a) Sympleks reprezentujący przestrzeń obsadzeń (wektorów prawdopodobieństwa) dla układów o 3 poziomach z obszarami o ustalonych γ -uporządkowaniach opisanymi przez $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$. Optymalne ścieżki łączące p o γ -uporządkowaniu $\{3, 2, 1\}$ ze stanami f_1, f_2 o γ -uporządkowaniu $\{1, 2, 3\}$ otrzymuje się poprzez elementarne termalizacje $T^{i,j}$ (oznaczone czerwonymi i niebieskimi strzałkami). Zbiór stanów z γ -uporządkowaniem $\{1, 2, 3\}$ osiągalny z p przez markowskie operacje termiczne uzyskuje się jako sumę zbiorów stanów q termomajoryzowanych przez f_1 oraz stanów q termomajoryzowanych przez f_2 . W tym przykładzie stan termiczny został wybrany jako $\gamma = [1/3, 1/3, 1/3]$, co odpowiada granicy nieskończonej temperatury. (b) Szary obszar oznacza zbiór stanów osiągalnych z p za pomocą markowskich operacji termicznych, gdy stan termiczny dany jest przez $\gamma = [1/2, 1/3, 1/6]$. Elementarne termalizacje $T^{i,j}$, które całkowicie termalizują pary poziomów i oraz j (a których działanie oznaczone jest czerwonymi i niebieskimi strzałkami), grają główną rolę w sekwencji wymaganych operacji.

efekt Overhausera i polega na resecie w podprzestrzeni $\{|00\dots 0\rangle, |11\dots 1\rangle\}$ stanów energetycznych badanego układu i układów pomocniczych, wymaga więc kolektywnych oddziaływań, które prowadzą do lepszego chłodzenia. Zwróćmy uwagę, że w obu protokołach oddziaływanie z łaźnią zadane jest przez MTP. Można zatem zapytać: czy protokół SRF jest optymalny, czy też można by go jeszcze jakoś ulepszyć przy podobnej kontroli za pomocą lepiej dobranej dynamiki termalizującej? W pracy [H15] pokazuję, że formalizm wypracowany w artykule [H14] algorytmicznie zwraca protokół SRF jako najlepszy możliwy protokół HBAC uzyskany przy pomocy MTP w przypadku kubitowego układu chłodzonego i kubitowego układu pomocniczego. Nie tylko jest to wcześniej nieznany wynik, ale także przykład na to, jak przejść od zgadywania formy protokołów chłodzenia do ich rygorystycznej optymalizacji.

Następnie, w pracy [H15] zająłem się analizą podstawowego protokołu ekstrakcji (wykonywania) pracy. Praca w termodynamice kwantowej jest często traktowana jako zmienna losowa, problemem dla mikroskopowych układów jest jednak to, że średnie mogą być tego samego rzędu co fluktuacje [46]. Dlatego też sporo uwagi w literaturze poświęcono sposobom ich uwzględniania i kontrolowania [17, 46, 71, 72]. W szczególności, protokoły ekstrakcji pracy typu single-shot gwarantują wykonanie pracy w ilości co najmniej W z prawdopodobieństwem niepowodzenia ϵ . To znaczy, mając dany układ S i dostęp do łaźni cieplnej E o temperaturze $T = 1/(k_B\beta)$, zadaniem jest deterministyczne wzbudzenie układu-baterii B , przygotowanej w stanie własnym energii E_0 , przez przerwę energetyczną W . Jeśli prawdopodobieństwo tego, że B na końcu protokołu ma energię $E_0 + W$, wynosi co najmniej $1 - \epsilon$, to mówimy o ekstrakcji ϵ -deterministycznej pracy W [17]. Optymalny błąd ϵ przy wykorzystaniu procesów termicznych (TP, z ang. *thermal processes*), tj. wszystkich procesów spełniających (P1)-(P2) ale niekoniecznie bezpamięciowych, można obliczyć za pomocą warunków termomajoryzacyjnych z pracy [17]. Jednak jeśli nasza kontrola ograniczona jest tylko do procesów typu MTP, to optymalny błąd $\epsilon_{\text{MTP}}(W)$ powinien być wyliczony za pomocą algorytmu z pracy [H14]. Jak pokazano na Rys. 8a, dostęp do pamięci dramatycznie zmniejsza minimalny osiągalny błąd dla danego W . Zwróćmy uwagę, że $\epsilon_{\text{MTP}}(W)$ pozostaje bardzo wysokie nawet w granicy $W \rightarrow 0$, co dowodzi, że konwersja nierównowagowych zasobów w deterministyczną pracę wymaga albo kontroli nad spektrum energetycznym



Rysunek 8: **(a) Ekstrakcja ϵ -deterministycznej pracy z układu dwupoziomowego.** Minimalny błąd ϵ jako funkcja pracy W wykonanej przez układ dwupoziomowy z przerwą energetyczną Δ i przygotowany w stanie termicznym o temperaturze $1/\beta_S$ mniejszej niż temperatura otoczenia $1/\beta_E$ (przyjęto $k_B = 1$). Oddziaływanie układu z otoczeniem modelowane jest przez procesy typu TP lub MTP. Wykorzystane parametry: $\beta_S\Delta = 2$ oraz $\beta_E\Delta = 1$. **(b) Optymalne chłodzenie układu czteropoziomowego.** Optymalna zmiana obsadzenia stanu podstawowego δp_0^{opt} dla czteropoziomowego układu kwantowego początkowo w równowadze z otoczeniem o temperaturze $1/\beta$ za pomocą jednej rundy protokołu HBAC, składającego się z unitarnej inwersji obsadzeń oraz optymalnego procesu typu TP lub MTP. Poziomy energetyczne układu są równo odległe, z najmniejszą przerwą energetyczną równą Δ .

układu (jak to zrobiono w pracach [46, 60]), albo musi polegać na efektach pamięci. W podobny sposób można znaleźć dowody na rolę pamięci w ulepszaniu wydajności procesów chłodzenia. Rozważmy układ początkowo w równowadze termodynamicznej z otoczeniem oraz zadanie ochłodzenia go poprzez maksymalizację obsadzenia stanu podstawowego za pomocą jednej rundy protokołu HBAC. W pierwszym kroku optymalnie jest unitarnie odwrócić obsadzenia (dla stanu termicznego obsadzenia zmniejszają się z rosnącą energią, po odwróceniu zachowują się odwrotnie); w drugim zaś kroku powinniśmy optymalnie sprząć układ z łaźnią, by zmaksymalizować obsadzenie stanu podstawowego. Optymalizację znowu można wykonać po wszystkich procesach typu TP lub MTP, a różnica w wydajności kwantyfikuje zwiększenie mocy chłodzenia dzięki efektom pamięci. Zilustrowano to na Rys. 8b dla czteropoziomowego układu z równo oddalonymi poziomami energetycznymi.

Co więcej, nie jesteśmy ograniczeni tylko do badania różnicy wydajności protokołów termodynamicznych z i bez efektów pamięci, ale możemy także interpolować pomiędzy tymi dwoma skrajnymi przypadkami. Problem ten wiąże się ze znanym w termodynamice tematem katalizy [73–75]. Kataliza to zjawisko, w którym pewna transformacja $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{q}$ jest możliwa tylko z pomocą dodatkowego układu $\mathbf{c}$ (katalizatora grającego rolę pamięci), który pod koniec protokołu musi wrócić do stanu początkowego nie będąc skorelowanym z układem, tj. $\mathbf{p} \otimes \mathbf{c} \mapsto \mathbf{q} \otimes \mathbf{c}$. Aby to zilustrować, rozważmy układ dwupoziomowy przygotowany początkowo w temperaturze dwa razy wyższej od temperatury otoczenia. Przy pomocy MTP bez katalizatora, układ może być schłodzony co najwyżej do temperatury otoczenia [76, 77]. Algorytm z pracy [H14] pokazuje, że już dwupoziomowy katalizator termiczny pozwala na schłodzenie badanego układu poniżej temperatury otoczenia, pokazując tym samym, że kataliza jest użyteczna nie tylko w abstrakcyjnych problemach teorii zasobów [73–75], ale także w kontekście markowskiej dynamiki opisującej standardowe modele termalizacji. Ponadto, inaczej niż w przypadku wcześniejszych podejść, algorytm zwraca konkretny zbiór operacji pozwalających na realizację protokołu. Rozwiązuje to jeden z głównych problemów, które dotychczas przeszkadzały w wykorzystaniu ogólnych wyników dotyczących katalizy do projektowania eksperymentalnych protokołów termodynamicznych.

Kompletny zbiór warunków na produkcję entropii. Wyniki prac [H14, H15] mogą być także wykorzystane by znacząco wzmocnić standardowy wynik dotyczący produkcji entropii,

$$\frac{d\Sigma(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} - \beta J(t) \geq 0, \quad (49)$$

gdzie $S(t) := -\text{Tr}(\rho(t) \log \rho(t))$ to entropia von Neumanna, $J := \text{Tr}(H d\rho(t)/dt)$ jest przepływem ciepła do układu, a $\rho(t)$ to stan układu oddziałującego z łaźnią cieplną w bezpamięciowy sposób. W szczególności, udowodniłem że dla dowolnej dobrze zachowującej się funkcji wypukłej $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, h -dywergencja zdefiniowana przez

$$\Sigma_h(t) = - \sum_{i=1}^d \gamma_i h \left(\frac{p_i(t)}{\gamma_i} \right), \quad (50)$$

musi monotonicznie rosnąć, $d\Sigma_h(t)/dt \geq 0$. Dla każdego wyboru h , powyższa nierówność skutkuje warunkiem na *produkcję uogólnionej entropii* (GEP, z ang. *generalized entropy production*). Wybierając $h(x) = x \log(x)$ otrzymujemy: $d\Sigma_d(t)/dt = dS_d(t)/dt - \beta J(t) \geq 0$, gdzie $S_d(t) = -\sum_i p_i(t) \log p_i(t)$ jest nazywane *entropią diagonalną* [78]. Odtwarza to wynik, który niedawno pojawił się w pracy [79], a także może być wykorzystane do wyprowadzenia standardowej nierówności na produkcję entropii ze wzoru (49). Dlatego też formalizm GEP implikuje standardowe wyniki dotyczące produkcji entropii. Wybierając $h(x) = \text{sgn}(\alpha) x^\alpha / (\alpha - 1)$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, otrzymujemy $d\Sigma_\alpha(t)/dt \geq 0$, gdzie $\Sigma_\alpha(t) = -S_\alpha(\mathbf{p}(t) \parallel \boldsymbol{\gamma})$ jest entropią względną Rényiego. Odtwarza to “drugie prawa” z pracy [73] w bardziej rygorystycznej postaci. W przeciwieństwie do warunków na punkty końcowe ewolucji (stan początkowy i końcowy) z pracy [73], więzy wyprowadzone tu mówią, że wszystkie Σ_α muszą monotonicznie rosnąć na całej trajektorii stanów $\mathbf{p}(t)$, przez które ewoluje układ. Gdy $\boldsymbol{\gamma}$ jest rozkładem jednorodnym (granica nieskończonej temperatury), powyższe warunki redukują się do wzrostu wszystkich entropii Rényiego [80]. Inną ważną klasę nierówności GEP można otrzymać przez wzięcie $h_q(x) = \text{sgn}(q)(1 - x^q)/(1 - q)$, co skutkuje w $d\Sigma_q^T(t)/dt \geq 0$, z $\Sigma_q^T(t) = -S_q^T(\mathbf{p}(t) \parallel \boldsymbol{\gamma})$ i $S_q^T(\mathbf{p} \parallel \boldsymbol{\gamma}) := \text{sgn}(q)(\sum_i p_i^q \gamma_i^{1-q} - 1)/(q - 1)$ będącymi entropiami względnymi Tsallisa. Entropie Tsallisa, dobrze znane w nieekstensywnej mechanice statycznej i teorii informacji [81–83], zostają odtworzone w przypadku granicy nieskończonej temperatury. Praca [H15] rozszerza zatem wyniki pracy [84] do dowolnych skończonych temperatur. Wreszcie, biorąc $h(x) = -\log x$ otrzymujemy $-d\mathcal{V}(t)/dt \geq 0$, z $\mathcal{V}(t) = -S(\boldsymbol{\gamma} \parallel \mathbf{p}(t))$ będącym ‘wakatem’, pełniącym główną rolę w ograniczeniach transformacji w bardzo niskich temperaturach, jak pokazano w pracy [85].

Wyprowadzone nierówności GEP zawierają w sobie bogactwo różnorodnych wyników jako część ujednoliconego formalizmu. Jednocześnie pojawia się pytanie: czy istnieje rodzina warunków entropowych, które implikują *wszystkie pozostałe*? Twierdząca odpowiedź na to pytanie została znaleziona w pracy [H14] i można ją interpretować jako rodzaj uogólnionego twierdzenia H Boltzmanna. Mianowicie, wszystkie nierówności GEP wynikają z monotonicznego wzrostu następujących funkcji

$$\Sigma_a(t) := - \sum_{i=1}^d \left| p_i(t) - a \frac{\gamma_i}{\gamma_d} \right|, \quad a \in [0, 1]. \quad (51)$$

Co więcej, jeśli istnieje trajektoria łącząca $\mathbf{p}(0)$ z $\mathbf{p}(t_f)$ i taka, że wszystkie Σ_a wzdłuż niej rosną, to istnieje operacja typu MTP transformująca $\mathbf{p}(0)$ w $\mathbf{p}(t_f)$. Zatem Σ_a nie tylko zapewnia kompletny zbiór nierówności, ale także gwarantuje istnienie fizycznej realizacji procesu, inaczej niż standardowy wynik dotyczący dodatniej produkcji entropii, który takiego istnienia nie gwarantuje.

4.4.2 Przewaga kwantowa dla procesów bezpamięciowych

Ewolucje stochastyczne kwantowo-zanurzalne. Podczas gdy artykuły [H14, H15] poświęcone były więzom pamięci w kontekście termodynamicznym, w pracy [H9] skupiłem się na więzach pamięci samych w sobie (tzn. na dynamice opisanej wzorem (33), ale niekoniecznie z termodynamicznymi własnościami (P1)-(P2)). W szczególności, porównałem moc klasycznych i kwantowych procesów bezpamięciowych pokazując, że te drugie są w stanie symulować dynamikę, która klasycznie wymaga pamięci. W ten sposób odkryłem nową przewagę kwantową: bezpamięciowe procesy kwantowe mają większą moc niż ich klasyczne odpowiedniki.

Przypomnijmy, że klasyczny stan układu d -poziomowego opisany jest przez wektor prawdopodobieństwa $\mathbf{p}$ opisujący obsadzenia stanów $\{1, \dots, d\}$. Klasyczny proces stochastyczny P opisany jest macierzą prawdopodobieństw przejść między stanami,

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_i P_{ij} = 1, \quad (52)$$

która to macierz opisuje ewolucję układu pomiędzy jednym stanem $\mathbf{p}$ a innym $P\mathbf{p}$. Macierz P , którą można uzyskać klasycznie bez użycia pamięci, nazywa się *zanurzalną*, tj. P jest zanurzalna jeśli można ją wygenerować ciągłym procesem markowskim [86]. To pojęcie można zrozumieć jako następujący problem kontroli dynamiki układu. Wprowadzając *generator* L jako macierz ze skończonymi elementami spełniającymi

$$L_{ij} \geq 0 \text{ for } i \neq j, \quad \sum_i L_{ij} = 0, \quad (53)$$

ciągła rodzina generatorów $L(t)$ generuje rodzinę macierzy stochastycznych $P(t)$ spełniającą

$$\frac{d}{dt}P(t) = L(t)P(t), \quad P(0) = \mathbb{1}. \quad (54)$$

Celem jest taka kontrola $L(t)$, która pozwoli na zrealizowanie zadanej macierzy stochastycznej P po pewnym czasie t_f jako $P = P(t_f)$ i, jeśli jest to możliwe dla jakiegoś wyboru $L(t)$, to P jest zanurzalna. Pytanie o to, które macierze P są zanurzalne jest wielkim otwartym problemem, który był obszernie badany przez dekady [86–91]. Pełna charakteryzacja nie wykracza poza macierze stochastyczne 2×2 i 3×3 , znane są jednak pewne warunki konieczne na zanurzalność. W szczególności, w pracy [90] udowodniono, że każda zanurzalna macierz stochastyczna P spełnia następujące nierówności:

$$\prod_i P_{ii} \geq \det P \geq 0. \quad (55)$$

Wiadomo też, że warunek $\det P \geq 0$ jest wystarczający w wymiarze $d = 2$ [88], a do tego, że istnieje wtedy wybór generatora L niezależnego od czasu.

W formalizmie kwantowym stan układu d -poziomowego opisany jest macierzą gęstości ρ o rozmiarze d , podczas gdy ogólna ewolucja stanu opisana jest kanałem kwantowym $\mathcal{E}$. Skupiając się na bazie obliczeniowej $\{|k\rangle\}_{k=1}^d$ założmy, że wejściowy stan $\rho_{\mathbf{p}} = \sum_k p_k |k\rangle\langle k|$ poddajemy działaniu kanału $\mathcal{E}$, a następnie mierzymy stan końcowy $\mathcal{E}(\rho_{\mathbf{p}})$ w bazie obliczeniowej. Wyniki pomiaru będą rozłożone według wektora prawdopodobieństwa $P\mathbf{p}$, gdzie

$$P_{ij} = \langle i | \mathcal{E}(|j\rangle\langle j|) | i \rangle. \quad (56)$$

W ten sposób przygotowanie $\rho_{\mathbf{p}}$, zaaplikowanie kanału $\mathcal{E}$ i pomiar w bazie obliczeniowej symulują działanie procesu stochastycznego P na stan klasyczny $\mathbf{p}$. W pracy [H9] macierz stochastyczną P nazwano *kwantowo-zanurzalną*, jeśli mogła być symulowana przez proces kwantowy jak w równaniu (56) z $\mathcal{E}$ będącym *markowskim kanałem kwantowym* [92], tj. kanałem, który wynika z markowskiego równania GKLS ze wzoru (33).

Przewaga w symulacjach. Relatywnie wprost można pokazać, że wszystkie klasycznie-zanurzalne macierze stochastyczne są także kwantowo-zanurzalne. Twierdzenie odwrotne jednak nie jest prawdziwe. Jak pokazałem w pracy [H9], istnieje wiele macierzy stochastycznych P , które mogą być generowane przez kwantowy, ale nie klasyczny, proces markowski. Najprostszym przykładem jest nietrywialna permutacja Π spełniająca

$$\det \Pi = \pm 1, \quad \prod_i \Pi_{ii} = 0. \quad (57)$$

Jasnym jest, że nierówność (55) jest złamana, a zatem Π nie jest zanurzalna. Ponieważ jednak każdy kanał unitarny $U(\cdot)U^\dagger$ jest markowski, a macierz permutacji jest macierzą unitarną, wniosek z tego taki, że każda permutacja Π jest kwantowo-zanurzalna. Wniosek ten także dowodzi, że żaden z dwóch warunków z równania (55) nie jest konieczny dla kwantowej zanurzalności. Bardziej ogólnie, większa klasa macierzy stochastycznych kwantowo-zanurzalnych dana jest przez zbiór macierzy *unistochastycznych* zdefiniowanych przez [93, 94]

$$P_{ij} = |\langle j | U | i \rangle|^2 \quad (58)$$

z dowolną macierzą unitarną U . Zbiór ten zawiera permutacje, ale także inne klasycznie niezanurzalne macierze stochastyczne. Jednym z przykładów jest dowolna macierz bistochastyczna 2×2 , ponieważ w wymiarze $d = 2$ każda macierz bistochastyczna jest również unistochastyczna, a w konsekwencji także

kwantowo-zanurzalna. W pracy [H9] wynik ten został jeszcze wzmocniony przez pokazanie, że każda macierz stochastyczna 2×2 jest kwantowo-zanurzalna. Co więcej, możemy wygenerować jeszcze większe rodziny macierzy kwantowo-zanurzalnych korzystając z wyniku pracy [H9] mówiącego, że zbiór macierzy kwantowo-zanurzalnych jest zamknięty ze względu na mnożenie, tj. jeśli P i Q są kwantowo-zanurzalne, to PQ także jest. Zatem, w dowolnym wymiarze d , możemy mnożyć np. klasycznie zanurzalne macierze z unistochastycznymi, i w wyniku otrzymywać macierze kwantowo-zanurzalne. Ponadto, podobna jest sytuacja z mnożeniem wielu macierzy 2×2 działających na różnych 2-wymiarowych podprzestrzeniach, a zatem iloczyny macierzy typu pinching [95] (znane także jako macierze faktoryzowalne [H11]) są kwantowo-zanurzalne. Podsumowując, zanurzanie kwantowe pozwala na uzyskanie wielu procesów stochastycznych, które z klasycznego punktu widzenia koniecznie wymagają pamięci. Jako szczególny przykład, rozważmy macierze cyrkulantne 3×3 zdefiniowane przez

$$P = \begin{bmatrix} 1 - a - b & a & b \\ b & 1 - a - b & a \\ a & b & 1 - a - b \end{bmatrix}. \quad (59)$$

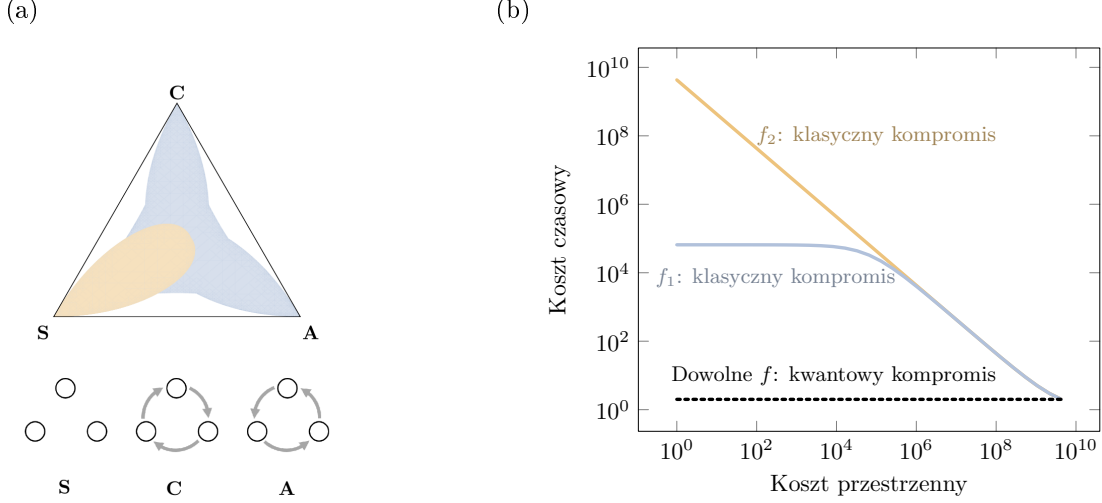
Dla macierzy tych znaleziono warunki wystarczające i zupełne na klasyczną zanurzalność [96], a zbiór spełniający te warunki zaznaczono na Rys. 9a jako pomarańczowy obszar. Z drugiej strony, jak pokazałem w pracy [H9], zbiór kwantowo-zanurzalnych macierzy cyrkulantnych zawiera nie tylko macierze klasycznie zanurzalne, ale także ich złożenia z dowolną macierzą unistochastyczną. W wyniku tego, zbiór macierzy osiągalnych kwantowo jest większy, co zaznaczono na Rys. 9a przy pomocy niebieskiego obszaru.

Przewaga w czasoprzestrzennym koszcie. Następnym krokiem w pracy [H9] było wyjście poza proste rozróżnienie na procesy stochastyczne, które można symulować z lub bez pamięci, i przyjęcie bardziej ilościowej postawy. Aby to osiągnąć, wykorzystano formalizm niedawno wprowadzony w pracy [97], który pozwala na skwantyfikowanie klasycznego kosztu czasoprzestrzennego danego procesu stochastycznego, tj. minimalną ilość pamięci i liczbę kroków czasowych potrzebnych, by klasycznie zaimplementować dany proces. Formalnie, niech P będzie niezanurzalną macierzą stochastyczną działającą na d tzw. *widocznych* stanów. Pytamy wtedy: ile dodatkowych stanów *pamięci* m jest potrzebnych, by zaimplementować P wykorzystując klasyczny proces markowski? Szukamy zatem zanurzalnej macierzy stochastycznej Q działającej na $d + m$ stanach i takiej, że jej ograniczenie do pierwszych d wierszy i kolumn jest identyczne z P . Jeśli macierz taką da się znaleźć, to mówimy, że Q *implementuje* P używając m stanów pamięci. Idąc dalej za pracą [97], definiujemy *koszt przestrzenny* macierzy stochastycznej P o rozmiarze d , oznaczony przez $C_{\text{space}}(P)$, jako minimalne m takie, że istnieje $(d + m) \times (d + m)$ zanurzalna macierz Q implementująca P . Kiedy znajdziemy już taką macierz Q implementującą P , rodzi się następne pytanie: ile kroków czasowych potrzeba, by zrealizować Q ? Pojęcie kroku czasowego ma uchwycić liczbę niezależnych operacji (generatorów), które są potrzebne, by osiągnąć Q . Używając formalizmu z pracy [97], macierz stochastyczną T nazywamy *jednokroową*, jeśli jest zanurzalna a generator $L(t)$, generujący T po czasie t_f zgodnie ze wzorem (54), może być wybrany tak, że zbiór niezerowych prawdopodobieństw przejść $P(t)$ jest taki sam dla wszystkich czasów $t \in (0, t_f)$. *Koszt czasowy* $C_{\text{time}}(P, m)$ macierzy stochastycznej P o rozmiarze d z pozwoleniem na m stanów pamięci zdefiniowany jest jako minimalna liczba τ jednokroowych macierzy stochastycznych $T^{(i)}$ o rozmiarze $(d + m)$ i takich, że $Q = T^{(\tau)} \dots T^{(1)}$ implementuje P . W pracy [H9] klasyczne pojęcia kosztów czasowego i przestrzennego zostały w naturalny sposób rozszerzone do domeny kwantowej, tj. zdefiniowano tam kwantowy koszt przestrzenny, $Q_{\text{space}}(P)$, oraz kwantowy koszt czasowy, $Q_{\text{time}}(P, m)$.

Centralnym problemem badanym w kontekście klasycznym jest znalezienie $C_{\text{space}}(P)$, a następnie scharakteryzowanie $C_{\text{time}}(P, m)$ dla $m \geq C_{\text{space}}(P)$. Głównym wynikiem pracy [97] było rozwiązanie tego problemu dla rodziny macierzy stochastycznych P_f o wartościach w $\{0, 1\}$, tj. reprezentowanych przez funkcję f na zbiorze stanów $\{1, \dots, d\}$. Będąc bardziej precyzyjnym, pokazano, że koszt czasowy P_f dany jest przez

$$C_{\text{time}}(P_f, m) = \left\lceil \frac{m + d + \max[c(f) - m, 0] - \text{fix}(f)}{m + d - |\text{img}(f)|} \right\rceil + b_f(m) \geq \left\lceil \frac{m + d - \text{fix}(f)}{m + d - |\text{img}(f)|} \right\rceil,$$

gdzie $\text{fix}(f)$ to liczba punktów stałych f , $|\text{img}(f)|$ jest wymiarem obrazu f , $c(f)$ jest liczbą cykli f , a $b_f(m) = 0$ lub 1. Dla przestrzeni stanów zadanej przez wszystkie ciągi bitów o długości s (czyli $d = 2^s$), powyższy wzór mówi nam, że jeśli $|\text{img}(f)|$ jest rzędu $O(d)$, to P_f jest kosztowna czasowo do zasymulowania przez



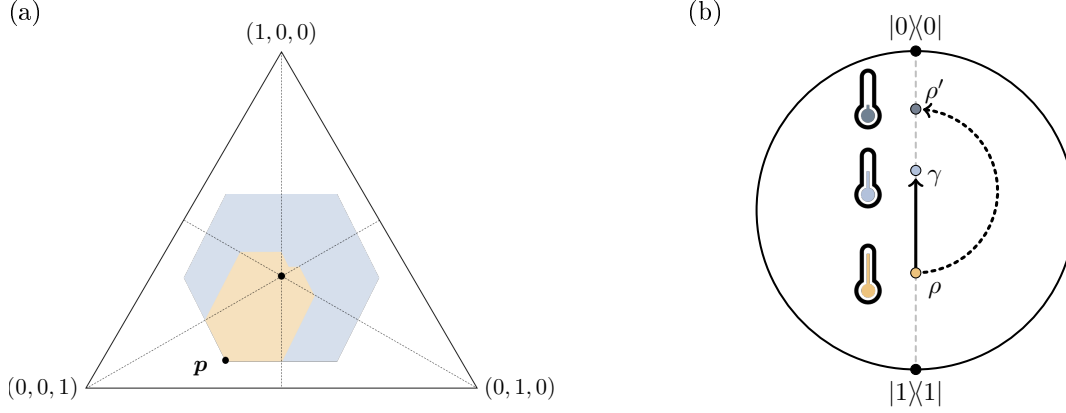
Rysunek 9: **(a) Zanurzalność macierzy cyrkulantnych 3×3 .** Wierzchołki trójkąta odpowiadają procesom deterministycznym (**S**: stój, **C**: rusz się zgodnie ze wskazówkami zegara, **A**: rusz się przeciwnie do wskazówek zegara) dla cząstki błądzącej losowo pomiędzy trzema stanami. Punkty wewnątrz trójkąta odpowiadają probabilistycznym mieszaninom (kombinacjom wypukłym) tych trzech deterministycznych procesów, np. środek trójkąta odpowiada maksymalnie zmieszanej dynamice (z **S**, **C** oraz **A** zdarzającymi się z prawdopodobieństwem $1/3$ każda). Pomarańczowy obszar zawiera wszystkie procesy stochastyczne, które mogą wynikać z ciągłej w czasie bezpamięciowej dynamiki klasycznej. Dla ciągłej w czasie bezpamięciowej dynamiki kwantowej obszar ten powiększa się do pozostałego niebieskiego obszaru. **(b) Klasyczne kontra kwantowe koszty czasoprzestrzenne.** Optymalny kompromis pomiędzy kosztem przestrzennym i czasowym zaimplementowania macierzy stochastycznej dla układu $s = 32$ bitów, tj. o wymiarze $d = 2^{32}$ (w skali podwójnie logarytmicznej). Ciągłe kolorowe linie odpowiadają optymalnemu kompromisowi dla klasycznego zaimplementowania przykładowych macierzy stochastycznych o wartościach w $\{0, 1\}$ i opisanych funkcjami $f_1(i) = i \oplus 1$ (dodawanie modulo d) oraz $f_2(i) = \min\{i + 2^{s/2}, 2^s - 1\}$, jak to zanalizowano w pracy [97]. Czarna przerywana linia odpowiada optymalnemu kompromisowi dla kwantowego zaimplementowania dowolnej macierzy stochastycznej o wartościach w $\{0, 1\}$, co jasno obrazuje kwantową przewagę.

dynamikę bezpamięciową, chyba że liczba punktów stałych także jest rzędu $O(d)$. Ponieważ jednak dla typowego f mamy $|\text{img}(f)| = O(d)$ oraz $\text{fix}(f) = O(1)$, to typowo $C_{\text{time}}(P_f, m) = O(2^s/m)$, tj. potrzeba wykładniczo wiele stanów pamięci by symulacja była wydajna ze względu na liczbę kroków czasowych. A także odwrotnie, potrzeba wykładniczo wiele kroków czasowych by symulacja była wydajna ze względu na liczbę stanów pamięci. W pracy [H9] zadałem analogiczne pytanie dotyczące kompromisu pomiędzy kosztem czasowym a przestrzennym w domenie kwantowej. Co wiele zaskakujące, udowodniłem że dla dowolnego $m \geq 0$ i dowolnej funkcji f mamy

$$Q_{\text{time}}(P_f, m) \leq 2. \quad (60)$$

Widzimy zatem, że można zaimplementować kwantowo każdą funkcję f wykorzystując zero stanów pamięci i tylko dwa kroki czasowe, w porównaniu do typowego klasycznego kosztu $C_{\text{time}}(P_{f_1}, m) \geq d/m$. Wynik ten, zobrazowany na Rys. 9b, jest ilościowym dowodem na moc superpozycji kwantowej do spełniania roli efektywnej pamięci.

Przewaga w kontroli. Na końcu pracy [H9] zademonstrowałem także, że zbiór klasycznych stanów osiągalnych z danego stanu początkowego za pomocą kwantowej dynamiki bezpamięciowej jest większy od zbioru stanów klasycznych osiągalnych z tego samego stanu początkowego za pomocą klasycznej dynamiki bezpamięciowej. Prowadzi to m.in. do potencjalnej przewagi w wydajności protokołów chłodzących. Będąc bardziej precyzyjnym, udowodniłem że kwantowa dynamika markowska z danym punktem stałym (np. stanem termicznym), w porównaniu do klasycznej dynamiki markowskiej z tym samym punktem stałym, pozwala na uzyskanie większego zbioru stanów końcowych z dowolnego stanu początkowego. Efekt ten jest najbardziej



Rysunek 10: **(a) Przewaga kwantowa dla jednorodnego punktu stałego z $d = 3$.** Zbiory stanów osiągalnych za pomocą klasycznej (mniejszy pomarańczowy obszar) i kwantowej (większy niebieski sześciokąt) bezpamięciowej dynamiki z jednorodnym punktem stałym dla układu o $d = 3$ poziomach i przykładowego stanu początkowego $\mathbf{p}$ (każdy punkt wewnątrz trójkąta odpowiada probabilistycznemu mieszaninom stanów bazowych). Niebieski sześciokąt pokrywa się ze zbiorem wszystkim stanów osiągalnych z $\mathbf{p}$ za pomocą klasycznej dynamiki o jednorodnym punkcie stałym i wykorzystującej dowolną ilość pamięci. **(b) Markowskie chłodzenie kubit.** Klasyczne procesy bezpamięciowe pozwalają na schłodzenie początkowego stanu ρ układu dwupoziomowego do stanu termicznego γ o temperaturze równej temperaturze otoczenia (trajektoria oznaczona ciągłą strzałką). Kwantowa dynamika bezpamięciowa z punktem stałym γ pozwala na schłodzenie układu poniżej tej temperatury, aż do stanu ρ' odpowiadającego najniższej temperaturze osiągalnej przez klasyczne procesy wykorzystujące efekty pamięci (trajektoria oznaczona przerywaną strzałką).

wyraźny w przypadku punktu stałego danego jednorodnym wektorem prawdopodobieństwa, gdyż wtedy każda transformacja dozwolona klasycznie z dowolną ilością pamięci może być zrealizowana bezpamięciowo w domenie kwantowej (zob. Rys. 10a). Dla ogólnych punktów stałych udowodniono analogiczny wynik dla układów dwupoziomowych, oraz uargumentowano, że zbiór osiągalnych stanów dla układów d -poziomowych w domenie kwantowej jest ściśle większy niż w domenie klasycznej. Ponieważ wiadomo, że efekty pamięci potęgują wydajność chłodzenia [76, 98], bezpośrednią konsekwencją wyników przedstawionych w pracy [H9] jest to, że kwantowo można bezpamięciowo oziębic układ dwupoziomowy poniżej temperatury otoczenia, co klasycznie jest niemożliwe (zob. Rys. 10b).

4.5 Wyniki dotyczące więzów symetrii

4.5.1 Optymalne procesy o symetrii względem translacji w czasie oraz symetrii rotacyjnej

Dynamika kowariantna względem translacji w czasie. W pracy [H2] skupiłem się na symetrii względem translacji w czasie, która charakteryzuje dynamikę nieczułą na wybór wyróżnionego punktu, względem którego mierzymy czas. Dynamika taka ogranicza możliwe transformacje koherencji kwantowej, która z tego powodu staje się wartościowym zasobem podczas przetwarzania informacji kwantowej [99, 100]. Jednym z głównych pytań w kontekście tej symetrii jest więc pytanie następujące: jaka jest minimalna dekoherencja kompatybilna z zadaną klasyczną dynamiką obsadzeń (np. z danym procesem relaksacji)? Najważniejszym technicznym wkładem pracy [H2] jest twierdzenie o minimalnej dekoherencji, które zwraca optymalną ewolucję koherencji dla danej ewolucji obsadzeń spośród wszystkich możliwych markowskich procesów symetrycznych ze względu na translację w czasie. Ewolucja stanów kwantowych poddanych takim procesom opisana jest przez równanie dynamiki z równania (33), z niezależnym od czasu Lindbladianem $\mathcal{L}$ (tj. zadanym przez wzór (35) ze stałymi szybkościami skoków r_i i operatorami skoków L_i), spełniającym własność kowariancji ze wzoru (37). Zwróćmy uwagę, że własność ta jest równoważna do stwierdzenia, że kanał $\mathcal{E}_t$ opisujący ewolucję,

$$\mathcal{E}_t(\rho) := e^{(-i\mathcal{H}+\mathcal{L})t}(\rho), \quad (61)$$

jest kowariantny ze względu na translacje w czasie:

$$\mathcal{E}_t \left(e^{-i\mathcal{H}t'}(\rho) \right) = e^{-i\mathcal{H}t'}(\mathcal{E}_t(\rho)), \quad (62)$$

gdzie $e^{-i\mathcal{H}t}(\rho) = e^{-iHt}\rho e^{iHt}$. W wyniku tejże kowariancji, ewolucja obsadzeń (diagonalnych elementów $|x\rangle\langle x|$ macierzy gęstości ρ) odpręga się od ewolucji koherencji (pozadiagonalnych elementów $|x\rangle\langle y|$), te drugie zaś mogą zostać podzielone na niezależnie ewoluujące mody [101]. Wprowadzając wektor obsadzeń $\mathbf{p}$ z elementami $p_x := \rho_{xx}$, ewolucja $\mathbf{p}(t)$ jest w pełni opisana za pomocą *macierzy szybkości przejść* L ,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = L\mathbf{p}, \quad (63)$$

gdzie elementy macierzowe L dane są przez

$$L_{x'|x} = \langle x' | \mathcal{L}(|x\rangle\langle x|) | x' \rangle. \quad (64)$$

Znaczenie symetrii uchwyconej równaniem (62) może początkowo wydawać się niejasne, ponieważ pomimo jej powszechnej obecności, w różnych dziedzinach fizyki nazywa się ją inaczej, a do tego zwykle jest ona ukryta w różnych przybliżeniach fizycznych. W optyce kwantowej symetria ze względu na translacje w czasie jest konsekwencją *przybliżenia wirującej fali* (RWA, z ang. *rotating-wave approximation*). Odpowiada to modyfikacjom hamiltonianu oddziaływania przez odrzucenie elementów szybko oscylujących w obrazie oddziaływania. Typowym przykładem jest hamiltonian Jaynesa-Cummingsa, który w najprostszej postaci dany jest przez $H_{JC} \propto (\sigma_+ + \sigma_-) \otimes (a + a^\dagger)$, gdzie $\sigma_\pm$ oznacza kubitowe operatory ekscytacji/de-ekscytacji, natomiast $a, a^\dagger$ to bozonowe kreatory anihilacji i kreacji. W tym wypadku przybliżenie polega na odrzuceniu wyrazów $\sigma_- \otimes a$ i $\sigma_+ \otimes a^\dagger$, co skutkuje równaniem ewolucji spełniającym wzór (62). Bardziej ogólnie, w teorii kwantowych układów otwartych, ewolucja spełniająca wzór (62) otrzymywana jest przez *przybliżenie wiekowe*, odrzucające człony Lindbladuanu, które łamią relację komutacji ze wzoru (37). W istocie jest to “bezpieczniejszy” sposób na zaimplementowanie RWA [102], który jest szeroko stosowany do modelowania wyników eksperymentów [21]. W metrologii kwantowej, dla zadania estymacji fazy ϕ operacji unitarnej U_ϕ generowanej przez Hamiltonian H , $U_\phi = e^{-iH\phi}$, równanie (62) identyfikuje zbiór kanałów kwantowych, które degradują dowolny metrologiczny zasób ρ [100]. Co więcej, w teorii kwantowej informacji równanie (62) opisuje kanały, które mogą zostać zaimplementowane przy braku dostępu do układu odniesienia dla czasu, lub w obecności reguły superwyboru dla liczby cząstek [25]. Alternatywna perspektywa dana jest przez teorię asymetrii względem grupy $U(1)$, która jest teorią zasobów, w której równanie (62) definiuje zbiór dostępnych operacji [24]. W istocie jest to teoria zasobów kwantowej koherencji względem bazy zdefiniowanej przez H [100]. Wreszcie, kowariancja ze względu na translacje w czasie może być także powiązana z globalną zasadą zachowania energii [24, 103], a także jest jedną z definiujących własności operacji termicznych [29].

Twierdzenie o minimalnej dekoherencji. Centralny wynik pracy [H2] dotyczy ograniczeń na optymalną ilość koherencji, którą można zachować w stanie kwantowym po czasie t , przy zadanej macierzy szybkości przejść L . Dla uproszczenia oznaczeń, elementy macierzowe macierzy gęstości ρ w bazie energii sparametryzujemy w następujący sposób: $\rho_{xy} = |\rho_{xy}| \vartheta_{xy}$, gdzie ϑ_{xy} jest czynnikiem fazowym, $|\vartheta_{xy}| = 1$. Potrzebujemy także zdefiniować współczynniki tłumienia $\gamma_{x'y'} := (|L_{x'|x'}| + |L_{y'|y'}|)/2$, współczynniki transportu $t_{y'|y}^{x'|x} := \sqrt{L_{x'|x} L_{y'|y}}$ oraz wprowadzimy symbol $\sum_{x,y}^{(\omega)}$ oznaczający sumę po elementach modu ω , tj. po x, y zadaną różnicą energii $E_x - E_y = \omega$. Oznaczmy teraz przez $\tilde{\rho}_{x'y'}(t)$ rozwiązanie równania

$$\frac{d\tilde{\rho}_{x'y'}}{dt} = -\gamma_{x'y'} \tilde{\rho}_{x'y'} + \sum_{\substack{x \neq x' \\ y \neq y'}}^{(\omega_{x'y'})} t_{y'|y}^{x'|x} \tilde{\rho}_{xy}, \quad (65)$$

z $\tilde{\rho}_{x'y'}(0) = |\rho_{x'y'}(0)|$. Wtedy, jeśli ewolucja ρ jest markowska i kowariantna ze względu na translacje w czasie oraz opisana macierzą szybkości przejść L , to

$$|\rho_{x'y'}(t)| \leq \tilde{\rho}_{x'y'}(t), \quad (66)$$

dla wszystkich $t \geq 0$. Co więcej, ograniczenie to może być wysycone przez wszystkie elementy modu ω jeśli dla wszystkich x', y', x, y spełniających $E_{x'} - E_{y'} = E_x - E_y = \omega$ mamy

$$\vartheta_{x'y'}(0)\vartheta_{xy}^*(0) = \vartheta_{x'x}(0)\vartheta_{y'y}^*(0). \quad (67)$$

Równanie (67) będziemy nazywać warunkiem *markowskiej zgodności faz* dla stanu początkowego. Co istotne, warunek ten jest spełniony dla wszystkich modów przez stany czyste, a także przez te z mieszanych, których amplitudy mają wspólną fazę (tj. $\vartheta_{xy} = \vartheta$ dla wszystkich x i y). Ponadto, warunek markowskiej zgodności faz jest także spełniony niezależnie od stanu początkowego dla modów składających się z pojedynczych elementów lub dwóch przekrywających się elementów, tj. ρ_{xy} i $\rho_{x'y'}$ z $x = y'$. Wreszcie, należy zaobserwować, że ewolucja $|\rho_{xy}|$ zależy jedynie od elementów $|\rho_{x'y'}|$ spełniających $E_{x'} - E_{y'} = E_x - E_y$, co odzwierciedla strukturę modową Lindbladianów symetrycznych ze względu na translacje w czasie. Z fizycznego punktu widzenia, powyższy wynik opisuje kombinację zjawisk zaniku i transportu, które odpowiadają dwóm członom w równaniu (65) wpływającym na ewolucję $\rho_{x'y'}$. Pierwszy człon opisuje szybkość zaniku koherencji proporcjonalną do samej ilości koherencji $\rho_{x'y'}$. Gdyby tylko ten człon był obecny, to otrzymalibyśmy znany proces wykładniczego zaniku koherencji (ze współczynnikiem zaniku $\gamma_{x'y'}$), spowodowany obecnością dekoherującego otoczenia. Dodatkowe wkłady do ewolucji $\rho_{x'y'}$ dane są przez człony transportu, przy czym tylko te koherencje ρ_{xy} , które wirują z tą samą częstotliwością co $\rho_{x'y'}$ (tj. należą do tego samego modu), mogą dać taki wkład (we wzorze odpowiada to ograniczonej sumie). Ta “reguła wyboru” narzucona jest przez symetrię dynamiki, człony transportu zaś także mają intuicyjną interpretację fizyczną. Mianowicie, $L_{x'|x}$ opisuje szybkość przejścia klasycznego procesu mapującego pomiędzy stanem x a x' , a więc $L_{x'|x}p_x(t)dt$ odpowiada przepływowi obsadzeń z x do x' w czasie pomiędzy t a $t + dt$. Natomiast transfer koherencji z ρ_{xy} do $\rho_{x'y'}$ obejmuje superpozycję *dwóch* klasycznych procesów: mapowania z x w x' oraz z y w y' . Widzimy zatem, że optymalny transport koherencji z ρ_{xy} w $\rho_{x'y'}$ dany jest przez średnią geometryczną szybkości przejść dla tych dwóch klasycznych procesów, tj. $\sqrt{L_{x'|x}L_{y'|y}}\rho_{xy}(t)dt$.

Zastosowania twierdzenia o minimalnej dekoherencji. Dobrze wiadomo, że ogólnym rozwiązaniem markowskiego równania dynamiki kowariantnej ze względu na translacje w czasie dla układu dwupoziomowego jest [21]

$$p(t) = \pi + (p(0) - \pi)e^{-t/T_1}, \quad |c(t)| = e^{-t/T_2}|c(0)|, \quad (68)$$

gdzie $p(t)$ to obsadzenie stanu podstawowego, $c(t)$ to koherencja między stanem podstawowym a wzbudzonym, π to stacjonarne obsadzenie stanu podstawowego, T_1 to czas relaksacji, a T_2 to czas dekoherencji. Co więcej, wiadomo że proces relaksacji obsadzeń (opisany przez T_1) oraz proces dekoherencji (opisany przez T_2) nie są niezależne i muszą spełniać $T_2 \leq 2T_1$. Relacja ta, razem z równaniem (68), łączy możliwe ewolucje koherencji z ewolucją obsadzeń (zob. Rys. 11a). Wykorzystując twierdzenie o minimalnej dekoherencji, wynik ten został w pracy [H2] uogólniony do d -poziomowych układów kwantowych z niezdegenerowanym spektrum Bohra, tj. opisanych przez Hamiltoniany, dla których wszystkie różnice energii pomiędzy dowolnymi dwoma poziomami są różne. Dla takich układów ewolucja pozadiagonalnych elementów macierzy gęstości dana jest przez

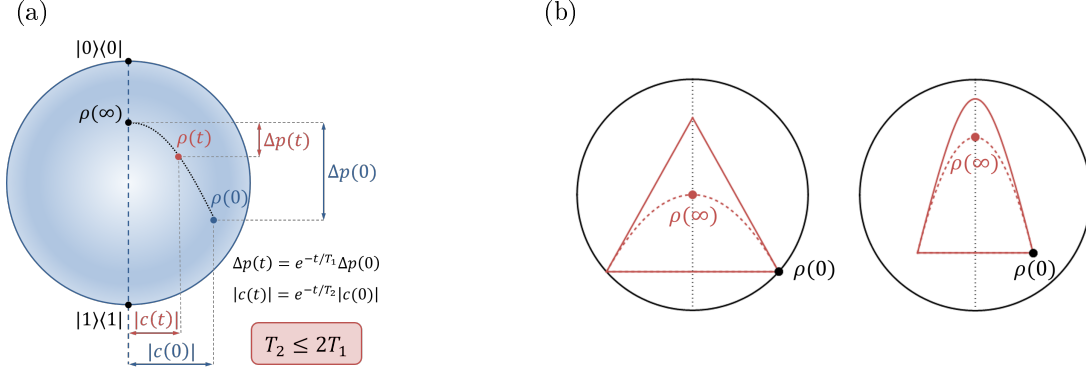
$$|\rho_{xy}(t)| = |\rho_{xy}(0)|e^{-t/T_2^{xy}}, \quad (69)$$

gdzie T_2^{xy} oznacza czas dekoherencji pomiędzy poziomami energetycznymi x i y . Ponadto, zakładając że dynamika obsadzeń ma unikalny punkt stacjonarny π (co czasem nazywane jest *dynamiką ergodyczną* [58]), ewolucja elementów diagonalnych dana jest przez

$$p(t) = \pi + \sum_{x=1}^{d-1} b_x e^{-t/T_1^x} e^{i \operatorname{Im}(\lambda_x)t} v_x, \quad (70)$$

gdzie T_1^x to uogólnione czasy relaksacji, v_x oznacza wektory własne L , λ_x odpowiadające im wartości własne, a b_x to stałe zdefiniowane przez warunki początkowe. Przy takich założeniach, w pracy [H2] udowodniono bezpośrednią relację pomiędzy czasami dekoherencji T_2^{xy} a czasami relaksacji T_1^x :

$$\langle T_2 \rangle_h \leq \frac{d}{d-1} \langle T_1 \rangle_h, \quad (71)$$



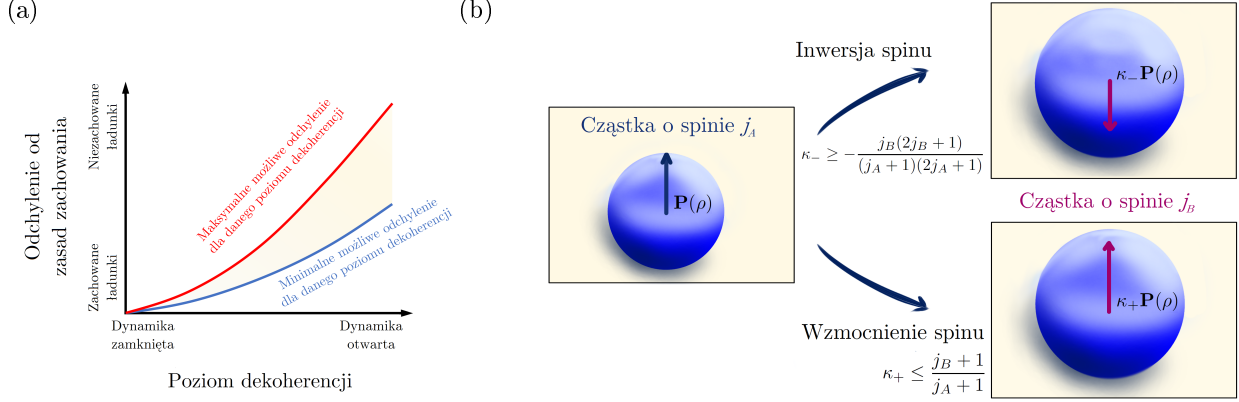
Rysunek 11: **(a) Czasy relaksacji i dekoherencji.** Ewolucja kubitowego stanu początkowego $\rho(0)$ w stronę stanu stacjonarnego $\rho(\infty)$ zobrazowana na sferze Blocha. Podczas ewolucji różnica pomiędzy aktualnym obsadzeniem stanu podstawowego a obsadzeniem stacjonarnym, $\Delta p(t) = |p(t) - \pi|$, musi się zmniejszać. Z powodu ograniczenia wiążącego procesy relaksacji i dekoherencji, dla dowolnego czasu stosunek pomiędzy aktualną i początkową ilością koherencji, $|c(t)|/|c(0)|$, jest ograniczony przez $\sqrt{\Delta p(t)/\Delta p(0)}$. **(b) Kubitowa dynamika kowariantna: markowskość kontra niemarkowskość.** Przerywane linie oznaczają maksymalne dozwolone zachowanie koherencji przez markowską dynamikę kowariantną z zadaniem punktem stałym $\rho(\infty)$; linie ciągłe oznaczają maksymalne zachowanie koherencji przez ogólną transformację termodynamiczną ze stanem termicznym danym przez $\rho(\infty)$. Po lewej: stan początkowy z $p(0) = 1/6$ i $c(0) = \sqrt{5}/6$, oraz $\rho(\infty)$ takim, że $\pi = (1/2, 1/2)$. Po prawej: stan początkowy z $p(0) = 1/4$ i $c(0) = 1/4$, oraz $\rho(\infty)$ takim, że $\pi = (3/4, 1/4)$.

gdzie $\langle \cdot \rangle_h$ oznacza średnią harmoniczną po wszystkich czasach dekoherencji T_2^{xy} i po wszystkich czasach relaksacji T_1^x . Co więcej, dla ogólnych układów kwantowych (niekoniecznie z niezdegenerowanym spektrum Bohra) pokazano, że jeśli dynamika obsadzeń ma unikalny punkt stały π z $\pi_x \neq 0$, to wszystkie koherencje dążą do zera gdy $t \rightarrow \infty$. Jest to bardzo silna przesłanka za tym, że zjawisko *zamrożonej koherencji* [104, 105] wymaga efektów niemarkowskich. Wreszcie, w pracy [H2] wprowadziłem też i zanalizowałem pojęcie świadków niemarkowskości bazujących na koherencji. Załóżmy, że znamy stan początkowy układu $\rho(0)$, jego stan końcowy $\rho(t)$ o określonym czasie $t > 0$, oraz punkt stały ewolucji $\rho(\infty)$. Jak pokazano to w pracy [H2], czasem taka wiedza jest wystarczająca, by wydedukować, czy ewolucja układu jest niemarkowska. Jest tak, ponieważ dla ewolucji markowskiej twierdzenie o minimalnej dekoherencji ogranicza zbiór dozwolonych stanów końcowych po czasie t . Jest to zobrazowane na Rys. 11b, gdzie zaobserwowanie stanu końcowego $\rho(t)$ poza obszarem ograniczonym przerywaną linią oznacza, że dynamika musiała być niemarkowska.

Symetrie a zasady zachowania. Twierdzenie Noether mówi nam, że dla każdej ciągłej symetrii zamkniętej dynamiki unitarnej istnieje odpowiadający jej zachowany ładunek [23, 106, 107]. Ogólną ewolucję stanu kwantowego, zarówno w relatywistycznej jak i nierelatywistycznej teorii kwantowej, opisuje jednak nie dynamika unitarna, a kanał kwantowy. To szersze pojęcie zawiera w sobie zarówno zamkniętą ewolucję unitarną, jak i dynamikę układów otwartych, ale pozwala także na bardziej ogólne operacje, takie jak przygotowanie stanu kwantowego, czy odrzucenie podukładu. Naturalnym zatem jest zapytać o status twierdzenia Noether dla tych kanałów kwantowych, które przestrzegają pewnej zasady symetrii. Dlatego też w pracy [H8] badałem, jaki jest maksymalny dozwolony rozdźwięk pomiędzy przestrzeganiem symetrii a zasadami zachowania. Ujmując to bardziej precyzyjnie, badałem kanały kwantowe $\mathcal{E}$ pomiędzy układami A i B , z więzami symetrii opisanymi przez grupę Liego G , tj.

$$\mathcal{E}(U_A(g)\rho_A U_A^\dagger(g)) = U_B(g)\mathcal{E}(\rho_A)U_B^\dagger(g) \quad (72)$$

dla wszystkich $g \in G$, gdzie $U(g)$ oznacza unitarną reprezentację grupy G na odpowiednim układzie kwantowym. Skupiłem się głównie na symetriach $U(1)$ i $SU(2)$, które związane są zasadami zachowania energii i momentu pędu. Pierwszym celem było wyprowadzenie ogólnych ograniczeń na możliwe odchylenia od zasady zachowania dla symetrycznej dynamiki. Opisuja one kompromis pomiędzy dozwolonym odchyleniem a



Rysunek 12: **(a) Wpływ otwierania dynamiki na twierdzenie Noether.** Jakościowy opis kompromisu pomiędzy odchyleniem od zasady zachowania a poziomem dekoherencji wywołanymi działaniem symetrycznego kanału kwantowego. Podczas gdy czerwone ograniczenie z góry istnieje dla wszystkich symetrii opisanych przez grupy Liego, ograniczenie dolne pojawia się dla układów kwantowych z dekompozycją na reprezentacje nieprzywiedlne bez krotności. **(b) Inwersja i wzmocnienie spinu.** Istnieją kanały kwantowe mogące w przybliżeniu odwrócić lub wzmocnić polaryzację układu spinowego jednocześnie dokładnie respektując symetrię obrotową $SU(2)$. Wartości $\kappa_{\pm}$ wyznaczają ostateczną granicę możliwości takich procesów i zależą tylko od wymiaru badanego układu spinowego.

odejściem od zamkniętej dynamiki unitarnej, co przedstawiono schematycznie na Rys. 12a. W celu skwantyfikowania jak blisko kanał $\mathcal{E}$ jest dynamiki unitarnej, użyto pojęcia *unitarności*, wprowadzonego w pracy [108]. Zdefiniowane jest ono jako średnia czystość wyjścia (ze średnią wziętą po wszystkich czystych stanach wejściowych) po odjęciu składowej identycznościowej, tj.

$$u(\mathcal{E}) := \frac{d_A}{d_A - 1} \int \text{Tr} \left(\mathcal{E} \left(\psi - \frac{\mathbb{1}_A}{d_A} \right)^2 \right) d\psi, \quad (73)$$

gdzie $u(\mathcal{E}) \leq 1$ z równością wtedy, i tylko wtedy, gdy $\mathcal{E}$ jest kanałem unitarnym. W celu skwantyfikowania odchylenia od zasad zachowania, w pracy [H8] wprowadziłem pojęcie *średniego całkowitego odchylenia* $\Delta(\mathcal{E})$ od zasad zachowania. Zdefiniowane jest ono jako średnia norma L_2 różnicy wartości oczekiwanych pomiędzy stanami $\psi = |\psi_A\rangle\langle\psi_A|$ a $\mathcal{E}(\psi)$ dla generatorów symetrii, $\{J_A^k\}_{k=1}^n$ i $\{J_B^k\}_{k=1}^n$, związanymi z zachowanymi ładunkami:

$$\Delta(\mathcal{E}) := \sum_{k=1}^n \int |\text{Tr}(\mathcal{E}(\psi)J_B^k - \psi J_A^k)|^2 d\psi, \quad (74)$$

gdzie całkowanie jest względem standardowej miary Haara na stanach czystych. W pracy [H8] pokazano, że dla dowolnej zwartej grupy Liego i symetrycznego kanału $\mathcal{E}$ przybliżającego symetryczny kanał unitarny, ładunki są w przybliżeniu zachowane. Innymi słowy, istnieje górne ograniczenie na odchylenie od zasady zachowania wyrażone przez unitarność:

$$\Delta(\mathcal{E}) \leq M(1 - u(\mathcal{E})) \quad (75)$$

dla pewnej stałej $M > 0$, która jest niezależna od $\mathcal{E}$ i zależy tylko od wymiaru układu i rodzaju generatorów symetrii. Co więcej, w pracy [H8] udowodniłem, że także dolne ograniczenie na odchylenie od zasad zachowania wyrażone przez unitarność istnieje wtedy, gdy układ kwantowy niesie reprezentację U_A grupy Liego G dla której $U_A \otimes U_A^*$ ma dekompozycję bez krotności. W szczególności ma to miejsce w przypadku cząstki spinowej o spinie j z generatorami symetrii danymi przez spinowe operatory momentu pędu generujące nieprzywiedlną reprezentację $SU(2)$. W wyniku tego, dla cząstki o spinie j zasada zachowania spinowego momentu pędu jest w przybliżeniu spełniona dla symetrycznego kanału kwantowego $\mathcal{E}$, który jest bliski bycia unitarnym, co

opisane jest przez następujące ograniczenia:

$$\frac{3\sqrt{2}j^{3/2}}{2j+1}(1-u(\mathcal{E})) \geq \sqrt{\Delta(\mathcal{E})} \geq \frac{\sqrt{2}j^{1/2}}{(2j+1)^2}(1-u(\mathcal{E})). \quad (76)$$

Optymalna inwersja i wzmocnienie spinu. W pracy [H8] pokazałem także, jak więzy symetrii $SU(2)$ uniemożliwiają wykonanie perfekcyjnej inwersji lub wzmocnienia spinu, oraz znalazłem optymalne dozwolone przybliżenia tych transformacji (zob. Rys. 12b). Obserwable spinowego momentu pędu $\mathbf{J}_A := (J_A^x, J_A^y, J_A^z)$ wzdłuż trzech osi kartezjańskiego układu współrzędnych generują obroty odpowiadające elementom $g \in SU(2)$, które działają na układ przez reprezentacje unitarne $U_A(g)$, opisujące działanie badanej symetrii. Kanał $\mathcal{E}$ jest symetryczny względem obrotów, lub *$SU(2)$ -kowariantny*, jeśli spełnia równanie (72) dla wszystkich stanów wejściowych ρ_A oraz $g \in SU(2)$. Obrotowa niezmienniczość gwarantuje teraz, że symetryczny kanał $\mathcal{E}$ działa na pojedyncze układy spinowe izotropowo. W wyniku tego, wektor polaryzacji spinowej $\mathbf{P}(\rho_A) := \text{Tr}(\mathbf{J}\rho_A)$ dla stanu początkowego ρ_A jest pod działaniem $\mathcal{E}$ zwyczajnie skalowany, tj.

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}(\rho_A)) = f(\mathcal{E})\mathbf{P}(\rho_A) \quad (77)$$

dla pojedynczego parametru $f(\mathcal{E})$, który jest niezależny od ρ_A i od kierunku. Naszym celem jest teraz znalezienie symetrycznego kanału kwantowego $\mathcal{S}_-$ ze współczynnikiem $f(\mathcal{S}_-)$ możliwie najbliższym -1 (wartość -1 może być osiągnięta tylko przez niefizyczną operację inwersji spinu). W pracy [H8] udowodniono, że kanałem symetrycznym optymalnie odwracającym polaryzację spinową jest ekstremalny punkt zbioru kanałów $SU(2)$ -kowariantnych z największym wymiarem $2j_A + 1$ otoczenia potrzebnym do jego implementacji, co skutkuje następującym współczynnikiem inwersji:

$$\kappa_- := f(\mathcal{S}_-) = -\frac{j_A}{j_A + 1} = -1 + O(1/j_A). \quad (78)$$

Uogólnia to wcześniejsze wyniki dotyczące optymalnego przybliżenia uniwersalnej bramki NOT przy uwzględnieniu więzów symetrii obrotowej, a także określa ostateczne ograniczenie, jakie teoria kwantowa nakłada na to szczególne zadanie inwersji spinu układu kwantowego. Zwróćmy uwagę, że im wyższa wymiarowość układu, tym wyższy maksymalny współczynnik odwrócenia spinu. W szczególności, dla optymalnego kanału $\mathcal{S}_-$ w granicy $j_A \rightarrow \infty$ mamy $f(\mathcal{S}_-) \rightarrow -1$. W podobny sposób możemy zapytać o maksymalne możliwe wzmocnienie spinu, tj. o symetryczny kanał kwantowy $\mathcal{S}_+$ ze współczynnikiem $f(\mathcal{S}_+)$, który jest największy z możliwych. Podczas gdy dla $j_A = j_B$ mamy zawsze $f(\mathcal{E}) \leq 1$, nie jest to prawdą gdy $j_B > j_A$, i w ten sposób polaryzacja spinowa może być wzmocniona przez symetryczną dynamikę otwartą. Ostateczne granice dla tego zadania zostały wyprowadzone w pracy [H8] i można je streścić następująco. Oznaczmy przez $\kappa_+ = \max_{\mathcal{E}} f(\mathcal{E})$, gdzie maksymalizacja jest po wypukłym zbiorze kanałów $SU(2)$ -kowariantnych pomiędzy częstką o spinie j_A a taką o spinie j_B . Maksymalny czynnik wzmocnienia spinu κ_+ jest wtedy dany przez

$$\kappa_+ = \frac{j_B}{j_A} \quad \text{for } j_A \geq j_B, \quad (79a)$$

$$\kappa_+ = \frac{j_B + 1}{j_A + 1} \quad \text{for } j_A < j_B. \quad (79b)$$

4.5.2 Optymalne kodowanie informacji w asymetrii

Kodowania w zasobach niszczonych przez G -twirling. W pracy [H13] analizowałem problem komunikacji, w którym nadawca S oraz odbiorca R połączeni są bezszumowym kanałem kwantowym, ale na możliwe kodowania S nałożone są więzy. Zakładamy mianowicie, że S nie ma możliwości przygotowania dowolnego stanu układu kwantowego, a zamiast tego ma dostęp do układu w danym stanie ρ , który działa jako nośnik informacji. W stanie tym S próbuje zakodować jedną z m wiadomości poprzez przetworzenie go kanałem kwantowym $\mathcal{E}_m$ należącym do ograniczonego zbioru *kodowań w zasobach niszczonych przez $\mathcal{G}$* , które spełniają

$$\mathcal{E}_m \circ \mathcal{G} = \mathcal{G}, \quad (80a)$$

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{E}_m = \mathcal{G}, \quad (80b)$$

Powyżej, $\mathcal{G}$ to kanał typu G -twirling, który uśrednia stan po pewnej podgrupie G unitarnych kanałów kwantowych,

$$\mathcal{G}(\rho) := \frac{1}{|G|} \sum_{U_g \in G} U_g \rho U_g^\dagger, \quad (81)$$

gdzie dla grup ciągłych powyższa suma powinna być zamieniona przez całkę $\int d\mu(U_g)$ względem miary Haara. Aby zrozumieć znaczenie takich więzów, zwróćmy uwagę, że kanał $\mathcal{G}$ jest operatorem rzutowym na przestrzeń stanów symetrycznych (tj. stanów niezmienniczych pod działaniem dowolnego elementu grupy symetrii), a zatem wymazuje on całą asymetrię w stanie, który przetwarza. Ponieważ działanie $\mathcal{G}$ na dowolny stan ρ sprawia, że jest on bezużyteczny z perspektywy S (ponieważ $\mathcal{G}(\rho)$ jest niezmiennicze pod działaniem $\mathcal{E}_m$ ze względu na równanie (80a)), a działanie $\mathcal{G}$ na zakodowany stan $\mathcal{E}_m(\rho)$ sprawia, że jest on bezużyteczny z perspektywy R (ponieważ dla każdego m zakodowany stan $\mathcal{E}_m(\rho)$ zostaje przetworzony na ustalony stan $\mathcal{G}(\rho)$ zgodnie z równaniem (80b)), kodowania $\mathcal{E}_m$ w zasobach niszczone przez $\mathcal{G}$ odpowiadają przesyłaniu informacji zakodowanej w zasobach asymetrii [24], tj. w stopniach swobody, które nie są niezmiennicze pod działaniem grupy symetrii. Co istotne, kanały unitarne $U_g(\cdot)U_g^\dagger$ należące do G (tzn. działania grupy symetrii na zbiór stanów kwantowych) spełniają warunki z równań (80a)-(80b).

Ogólny i trochę abstrakcyjny problem komunikacji opisany powyżej pozwala na badanie różnorodnych i istotnych problemów komunikacji z więzami. Gdy G jest pełną grupą unitarną, to $\mathcal{G}$ staje się całkowicie depolaryzującym kanałem, tj. $\mathcal{G}(\rho) = \mathbb{1}/d$ dla wszystkich ρ . Wtedy równanie (80b) jest spełnione automatycznie a równanie (80a) ogranicza kodowania do kanałów unitalnych. Fizycznie odpowiada to sytuacji, w której nadawca S nie ma możliwości zmniejszenia entropii nośnika informacji, przez co informacja zakodowana jest w zasobie czystości stanu [15]. Ponadto, jeśli G jest grupą unitarną podukładu S_1 dla wielocząstkowego układu $S_{1\dots n}$, kodowania zostają ograniczone do kanałów unitalnych działających lokalnie na S_1 . W ten sposób można badać kodowanie informacji nie tylko w zasobie lokalnej czystości, ale także w splątaniu, co pozwala na określenie przydatności danego stanu dla supergęstego kodowania [109]. Gdy G jest podgrupą wszystkich kanałów unitarnych diagonalnych w danej bazie $\{|k\rangle\}$ (a więc jest podgrupą generowaną przez komutujące macierze unitarne), $\mathcal{G}$ staje się całkowicie defazującym kanałem $\mathcal{D}$ względem tej bazy, tj. $\mathcal{D}(\rho) = \sum_k \langle k|\rho|k\rangle |k\rangle\langle k|$. Równania (80a)-(80b) ograniczają wtedy kodowania $\mathcal{E}_m$ do kanałów Schur-produktowych [110]. Ponieważ kanały takie nie zmieniają obsadzeń (diagonalnych elementów ρ w danej bazie), a tylko wpływają na koherencje (elementy pozadiagonalne), studiowanie komunikacji z takim węzłem pozwala odpowiedzieć na pytanie, ile klasycznych bitów można zakodować w kwantowej koherencji [43].

Optymalny współczynnik komunikacji. Głównym celem pracy [H13] było znalezienie optymalnych sposobów na zakodowanie wiadomości m , wybranej jednorodnie losowo ze zbioru $\mathcal{M} = \{1, \dots, M\}$, używając d -wymiarowego stanu kwantowego ρ i ograniczonego zbioru kanałów kwantowych opisanych równaniami (80a)-(80b) tak, by wiadomość mogła zostać później wiernie odtworzona ze średnim prawdopodobieństwem błędu ϵ . Szukamy zatem kodowania w postaci kanałów kwantowych $\{\mathcal{E}_m\}_{m \in \mathcal{M}}$, które są kodowaniami w zasobach niszczone przez $\mathcal{G}$; oraz dekodera określonego przez pomiar kwantowy opisany przez elementy POVM (z ang. *positive operator-valued measure*) $\{D_m\}_{m \in \mathcal{M}}$ takie, że

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \text{Tr}(\mathcal{E}_m(\rho) D_m) \geq 1 - \epsilon, \quad (82)$$

tj. średnie prawdopodobieństwo błędnego odcodowania wiadomości jest mniejsze niż ϵ . Zainteresowani jesteśmy maksymalną wartością M dla danego ρ i ϵ . Szczególnie interesuje nas przypadek, gdy mamy do czynienia z N niezależnymi i jednakowymi kopiami stanu, tj. gdy kodujemy w stanie $\rho^{\otimes N}$ używając kodowań w zasobach niszczone przez $\mathcal{G}^{\otimes N}$. Celem jest wtedy znalezienie optymalnego współczynnika kodowania informacji (w bitach na jeden zużyty stan zasobowy) w asymetrii stanów kwantowych,

$$R(\rho, N, \epsilon) := \sup \left\{ \frac{\log M}{N} \mid \text{równanie (82) jest spełnione} \right\}, \quad (83)$$

oraz, w szczególności, zrozumienie jego asymptotycznego zachowania gdy $N \rightarrow \infty$.

W pracy [H13] udowodniłem, że maksymalna liczba wiadomości $M(\rho, \epsilon)$, którą można zakodować w zasobach stanu kwantowego ρ niszczone przez kanał typu G -twirling $\mathcal{G}$ dla unitarnej grupy G i ze średnim

błędem odekodowania co najwyżej ϵ , jest ograniczona przez

$$\log M(\rho, \epsilon) \leq D_s^{\epsilon+\delta}(\rho\|\mathcal{G}(\rho)) + \log \frac{1}{\delta}, \quad (84a)$$

$$\log M(\rho, \epsilon) \geq D_s^{\epsilon-\delta}(\rho\|\mathcal{G}(\rho)) - \log \frac{2}{\delta}, \quad (84b)$$

dla wszystkich $\delta \in (0, \min\{\epsilon, 1 - \epsilon\})$, gdzie D_s^ϵ oznacza informacyjno-spektralną entropię względną daną przez [111]

$$D_s^\delta(\rho\|\sigma) := \sup \{K \mid \text{Tr}(\rho \Pi_{\rho \leq 2^K \sigma}) \leq \delta\}, \quad (85)$$

z $\Pi_{\rho \leq 2^K \sigma}$ oznaczającym ortogonalny rzut na podprzestrzeń generowaną przez podprzestrzeń własne $2^K \sigma - \rho$ z nieujemnymi wartościami własnymi. Co więcej, udowodniłem że optymalne $M(\rho, \epsilon)$ może być osiągnięte za pomocą unitarnych kodowań należących do G . Dowiodłem także, że optymalny współczynnik $R(\rho, N, \epsilon)$ dany jest przez następujące wyrażenie asymptotyczne drugiego rzędu:

$$R(\rho, N, \epsilon) \simeq D(\rho\|\mathcal{G}(\rho)) + \frac{\Phi^{-1}(\epsilon)}{\sqrt{N}} \sqrt{V(\rho\|\mathcal{G}(\rho))}, \quad (86)$$

gdzie Φ^{-1} oznacza funkcję odwrotną dystrybucyjną standardowego rozkładu normalnego Φ , $D(\cdot\|\cdot)$ to entropia względna, $V(\cdot\|\cdot)$ to wariancja entropii względnej, a $\simeq$ oznacza równość z dokładnością do wyrazów rzędu $o(1/\sqrt{N})$. Powyższy optymalny współczynnik komunikacji może także być uzyskany przy pomocy produktowych kodowań unitarnych należących do $G^{\times N}$.

Zastosowanie do supergęstego kodowania i bezpiecznej komunikacji. Jak już wspomniano powyżej, ogólne wyniki dotyczące optymalnego współczynnika komunikacji za pomocą kodowań w zasobach niszczonych przez $\mathcal{G}$ pozwalają na znalezienie optymalnych rozwiązań różnych problemów komunikacyjnych. Dwa ważne przykłady, które zostały omówione w pracy [H13], są następujące. Po pierwsze, rozważmy kodowanie w stanie ρ_{AB} układu dwucząstkowego AB (o lokalnych wymiarach d_A i d_B), korzystając z kodowań w zasobach niszczonych przez kanał G -twirling $\mathcal{G}$ po wszystkich kanałach unitarnych działających na A . Jak pokazano w pracy [H13], kodowania takie odpowiadają lokalnym kanałom unitalnym na układzie A . Korzystając z równania (86), możemy znaleźć liczbę w przybliżeniu ortogonalnych stanów globalnych układu AB , które można uzyskać ze stanu początkowego przetwarzając tylko lokalnie układ A . Innymi słowy, możemy studiować optymalny współczynnik unitalnego supergęstego kodowania. Bardziej szczegółowo, możemy pokazać, że produktowe kodowania unitarne na podukładzie A osiągają (z dokładnością do asymptotycznych wyrazów drugiego rzędu) ten sam optymalny współczynnik supergęstego kodowania $R_{\text{loc}}(\rho_{AB}, N, \epsilon)$ co kodowania unitalne na podukładzie A , i dany jest on przez

$$R_{\text{loc}}(\rho_{AB}, N, \epsilon) \simeq R_{\text{loc}}(\rho_{AB}) + \frac{\Phi^{-1}(\epsilon)}{\sqrt{N}} \sqrt{V(A|B)}, \quad (87a)$$

$$R_{\text{loc}}(\rho_{AB}) := \log d_A - S(A|B), \quad (87b)$$

gdzie $S(A|B) = -D(\rho_{AB}\|\mathbb{1}_A \otimes \rho_B) = S(\rho_{AB}) - S(\rho_B)$ to entropia względna, a $V(A|B) = V(\rho_{AB}\|\mathbb{1}_A \otimes \rho_B)$ to związana z nią wariancja [37].

Po drugie, kodowania w zasobach niszczonych przez $\mathcal{G}$ są związane ze schematem bezpiecznej komunikacji dla dekoherującego superoperatora $\mathcal{G}$ [112], który to schemat został pierwotnie opisany w pracy na temat kwantowych układów odniesienia [25]. W schemacie tym mamy do czynienia z trzema stronami: poza nadawcą S i odbiorcą R , występuje także strona podsłuchująca E . Dwie komunikujące się strony mają do dyspozycji prywatny (nieodostępny dla stron trzecich) układ odniesienia dla pewnych stopni swobody, tj. S i R mają wcześniej uzgodnione formy reprezentacji $U(g)$ dla danych klasycznych etykiet g . Jako przykład, rozważmy prywatny kartezjański układ odniesienia (np. dany przez trzy wzajemnie prostopadłe sztywne pręty określające kierunki x, y, z). Dany element grupy obrotów może być wtedy opisany klasyczną etykietą zawierającą trzy kąty Eulera względem osi definiujących układ odniesienia. Dlatego też, jeśli S przekaże R , że przygotował cząstkę o spinie $1/2$ skierowanym wzdłuż dodatniej osi z , a R chce ją obrócić tak, by wskazywała w odwrotnym kierunku, to wie dokładnie, którego $U(g)$ użyć. Jednak z punktu widzenia E , nie mającego dostępu do układu odniesienia, układ wygląda jak probabilistyczna mieszanka (wynikająca z braku wiedzy

o orientacji układu odniesienia) po wszystkich możliwych obrotach układu odniesienia. W ten sposób stan ρ opisywany jest przez E jako $\mathcal{G}(\rho)$, gdzie $\mathcal{G}$ to uśrednienie po elementach grupy $\text{SO}(3)$, a zatem dowolny stan początkowy cząstki o spinie $1/2$ wygląda dla E jak stan maksymalnie zmieszany. Oczywiście, w ogólnej sytuacji takie uśrednienie może zostać wykonane po dowolnej grupie G odpowiadającej prywatnemu układowi odniesienia pomiędzy S i R , do którego E nie ma dostępu. Podążając za definicją wprowadzoną w pracy [112], dla S i R istnieje bezpieczny schemat komunikacji stosujący prywatny układ odniesienia związany z grupą G , jeśli S może przygotować M ortogonalnych stanów σ_m takich, że $\mathcal{G}(\sigma_m) = \rho_0$ dla wszystkich m i pewnego ustalonego stanu ρ_0 . Oznacza to, że S może wysłać jedną z M perfekcyjnie rozróżnialnych wiadomości do R , podczas gdy dla strony podsłuchującej E wszystkie te wiadomości będą całkowicie nierozróżnialne, a więc komunikacja będzie bezpieczna. Poprzez równanie (80b), jasnym jest wtedy, że jeśli dla stanu ρ istnieje M kodowań w zasobach niszczonej przez $\mathcal{G}$, to S i R posiadają bezpieczny schemat komunikacji: S przygotowuje jeden ze stanów $\mathcal{E}_m(\rho)$, które są (prawie) doskonale rozróżnialne przez R , ale dla E wszystkie one są opisane przez $\mathcal{G}(\mathcal{E}_m(\rho)) = \mathcal{G}(\rho)$. Dlatego też każdy stan ρ określa bezpieczny schemat komunikacji $\log M$ bitów, a równanie (84a)-(84b) ogranicza z góry i z dołu wartość $\log M$ w reżimie pojedynczej rundy komunikacyjnej. Optymalizując informacyjno-spektralną entropię względną pomiędzy ρ i $\mathcal{G}(\rho)$ po wszystkich stanach ρ , możemy zatem znaleźć optymalny schemat bezpiecznej komunikacji.

4.6 Wyniki dotyczące więzów klasyczności

4.6.1 Minimalizacja nieodwracalności procesu losowego

Klasyczna i kwantowa losowość. Rozważmy wielopoziomowy układ fizyczny poddany pewnej nieznannej ewolucji. W celu jej scharakteryzowania, możemy najpierw zmierzyć układ, znajdując go w pewnym dobrze określonym stanie j , np. stanie własnym obserwacji A . Następnie pozwalamy układowi ewoluować przez czas τ i wykonujemy ten sam pomiar, tym razem znajdując go w stanie i . Powtarzając tę procedurę wielokrotnie i zbierając statystykę wyników pomiarów, możemy zrekonstruować macierz przejścia T , z elementami macierzowymi T_{ij} opisującymi prawdopodobieństwa przejść pomiędzy stanami j i i . Jeśli mamy do czynienia z prawdziwie losowym procesem klasycznym, powtórzenie go (np. przez pozwolenie na ewolucję układu przez czas 2τ zamiast τ) prowadzi do ewolucji opisanej macierzą przejścia T^2 . Na Rys. 13a jest to zobrazowane dla przykładowego układu dwupoziomowego. Jednak w fizyce kwantowej różne przejścia (ścieżki) T mogą ze sobą interferować, a co za tym idzie złożenie dwóch procesów w ogólności nie będzie opisane macierzą przejścia T^2 . W szczególności, taki złożony proces może stać się w pełni deterministyczny, prowadząc do całkowitego zaniku obserwowanej losowości (zob. Rys. 13b). Pytanie, którym zajmę się w pracy [H3], brzmi następująco: jak blisko procesu deterministycznego (a zatem i odwracalnego) może być proces losowy, zakładając że wywołuje on klasyczne przejścia losowe opisane przez macierz T ?

Koheryfikacja. Aby zbadać ten problem w sposób ilościowy, w pracy [H3] wprowadziłem koncept *koheryfikacji* klasycznego procesu losowego. Aby go formalnie zdefiniować, potrzeba najpierw przypomnieć kilka pojęć. Po pierwsze, dla każdego kanału kwantowego $\mathcal{E}$ można zdefiniować związany z nim stan Jamiołkowski [113], który jest wynikiem działania rozszerzonego kanału na stan maksymalnie splątany,

$$J_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{I})|\Omega\rangle\langle\Omega|, \quad (88)$$

gdzie $|\Omega\rangle = \sum_i |ii\rangle$ a $\mathcal{I}$ oznacza kanał identycznościowy. Warunek na to, by $\mathcal{E}$ było kanałem kwantowym (czyli całkowicie dodatnim i zachowującym ślad odwzorowaniem liniowym), jest równoważny następującym warunkom [113]

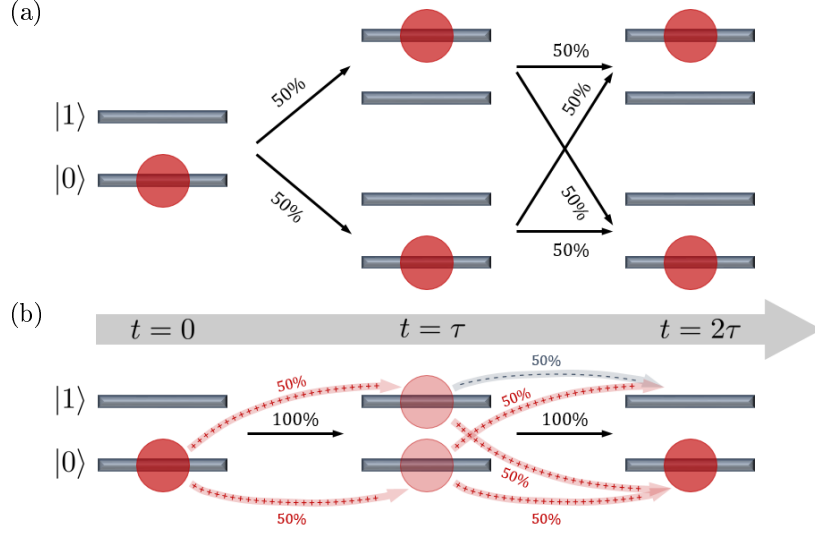
$$J_{\mathcal{E}} \geq 0, \quad \text{Tr}_1(J_{\mathcal{E}}) = \frac{\mathbb{1}}{d}. \quad (89)$$

Warunki te implikują, że diagonalne elementy (względem wyróżnionej bazy) stanu Jamiołkowskiego odpowiadają elementom macierzowym stochastycznej macierzy przejścia T o rozmiarze d ,

$$\langle ij|J_{\mathcal{E}}|ij\rangle = \frac{1}{d}T_{ij}, \quad (90)$$

gdzie T jest dokładnie klasycznym działaniem $\mathcal{E}$, tj. macierzą przejścia indukowaną przez $\mathcal{E}$ i opisującą zmianę obsadzeń w wyróżnionej bazie,

$$T_{ij} = \langle i|\mathcal{E}(|j\rangle\langle j|)|i\rangle. \quad (91)$$



Rysunek 13: **Losowość klasyczna kontra kwantowa.** Układ dwupoziomowy przygotowany początkowo w stanie $|0\rangle\langle 0|$. (a) Losowa ewolucja klasyczna pomiędzy czasem 0 i τ , transformująca układ pomiędzy stanami $|0\rangle\langle 0|$ i $|1\rangle\langle 1|$, i opisana macierzą przejścia T z $T_{ij} = 1/2$ dla wszystkich i, j . Stan końcowy po czasie τ jest maksymalnie zmieszany, $(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)/2$. Dalsza ewolucja między czasem τ i 2τ jest także opisana przez T , co prowadzi do całkowitej ewolucji opisanej przez T^2 i pozostawia układ w stanie maksymalnie zmieszanym. (b) Kwantowa ewolucja pomiędzy czasem 0 i τ opisana przez macierz unitarną U z $U_{11} = -1/\sqrt{2}$ i $U_{ij} = 1/\sqrt{2}$ w pozostałych wypadkach (zatem U jest znormalizowaną macierzą Hadamarda o rozmiarze 2). Stan końcowy po czasie τ dany jest przez $|+\rangle\langle +|$, gdzie $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Zwróćmy uwagę, że gdyby wykonano pomiar w momencie τ , zaobserwowano by macierz przejść T_{ij} jak w (a). Jednak, jeśli układ będzie ewoluował dalej pomiędzy czasami τ i 2τ zgodnie z U to, z powodu interferencji, stan końcowy układu w momencie 2τ będzie zadany przez $|0\rangle\langle 0|$, a więc całkowita ewolucja będzie opisana przez macierz identycznościową, $U^2 = \mathbb{1}$.

Dlatego też diagonalne stany Jamiołkowskiego (z jedynymi niezerowymi elementami na diagonalu) odpowiadają klasycznym procesom losowym opisanym przez macierze stochastyczne działające na wektorach prawdopodobieństwa o rozmiarze d . Mając daną macierz przejścia T , jej koheryfikacja jest dowolnym kanałem kwantowym $\mathcal{E}$, którego klasyczne działanie (diagonała $J_{\mathcal{E}}$) dane jest przez T . W szczególności, dla danego T , interesuje nas znalezienie optymalnie skoheryfikowanego kanału $\mathcal{E}^C$ takiego, że koherencja odpowiadającego mu stanu Jamiołkowskiego $J_{\mathcal{E}^C}$ jest jak największa (lub zmieszanie jest jak najmniejsze). Takie optymalnie skoheryfikowane kanały są odpowiedzią na główne pytanie zadane w pracy [H3], gdyż są kanałami możliwie najbliższymi kanałom unitarnych (czyli deterministycznych i odwracalnych), tym samym indukując klasyczne przejścia opisane macierzą stochastyczną T . By zmierzyć stopień zmieszania i koherencji, użyłem następujących standardowych miar: entropię koherencji kanału,

$$\mathcal{C}_e(\mathcal{E}) := S(\mathcal{D}(J_{\mathcal{E}})) - S(J_{\mathcal{E}}), \quad (92)$$

gdzie $S(\rho) := -\text{Tr}(\rho \log \rho)$ jest entropią von Neumanna a $\mathcal{D}$ dekoherującym superoperatorem (który zeruje wszystkie elementy pozadiagonalne macierzy gęstości); oraz 2-normę koherencji kanału,

$$\mathcal{C}_2(\mathcal{E}) := \Gamma(J_{\mathcal{E}}) - \Gamma(\mathcal{D}(J_{\mathcal{E}})), \quad (93)$$

gdzie $\Gamma(\rho) = \text{Tr}(\rho^2)$ oznacza czystość stanu ρ .

Ograniczenia optymalnej koheryfikacji. Po pierwsze, w pracy [H3] udowodniłem, że macierz stochastyczna T może zostać całkowicie skoheryfikowana (w tym sensie, że wynikowy kanał $\mathcal{E}^C$ jest odwracalny) wtedy, i tylko wtedy, gdy jest ona unistochastyczna, tzn. jeśli istnieje taka macierz unitarna U , że $T_{ij} = |U_{ij}|^2$.

Następnie, dla nieunistochastycznych T wykorzystałem techniki majoryzacyjne, by wyprowadzić następujące ograniczenia na koherencję i zmieszanie optymalnej koheryfikacji $\mathcal{E}^C$ macierzy stochastycznej T :

$$H\left(\frac{1}{d}\mathbf{T}\right) - H(\boldsymbol{\mu}^{\prec}(T)) \leq \mathcal{C}_e(\mathcal{E}^C) \leq H\left(\frac{1}{d}\mathbf{T}\right) - H(\boldsymbol{\mu}^{\succ}(T)), \quad (94a)$$

$$\boldsymbol{\mu}^{\prec}(T) \cdot \boldsymbol{\mu}^{\prec}(T) - \frac{1}{d^2}\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \leq \mathcal{C}_2(\mathcal{E}^C) \leq \boldsymbol{\mu}^{\succ}(T) \cdot \boldsymbol{\mu}^{\succ}(T) - \frac{1}{d^2}\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}. \quad (94b)$$

W powyższych wzorach $H(\mathbf{p}) := -\sum_i p_i \log p_i$ jest entropią Shannona, $\mathbf{T}$ jest wektorem długości d^2 ze składowymi zadanymi przez T_{ij} , natomiast wektory $\boldsymbol{\mu}^{\prec}(T)$ i $\boldsymbol{\mu}^{\succ}(T)$ zdefiniowane są następująco. Najpierw, dla każdego wiersza T zapisujemy sumę po kolumnach jako $\sum_j T_{ij} = n_i + a_i$, gdzie n_i to liczba całkowita oraz $a_i \in [0, 1)$. Wtedy, używając następujących wektorów,

$$\mathbf{s}^{(i)}(T) = \left[\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n_i \text{ times}}, a_i, 0, \dots, 0 \right], \quad (95)$$

$\boldsymbol{\mu}^{\succ}(T)$ zdefiniowany jest jako

$$\boldsymbol{\mu}^{\succ}(T) := \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \mathbf{s}^{(i)}(T). \quad (96)$$

Aby zdefiniować $\boldsymbol{\mu}^{\prec}(T)$, potrzeba najpierw wprowadzić wektory $\mathbf{r}^{(i)}$ zadane przez wiersze T ze składowymi ułożonymi malejąco,

$$\mathbf{r}^{(i)} = [T_{i1}, \dots, T_{id}]^{\downarrow}. \quad (97)$$

Wtedy $\boldsymbol{\mu}^{\prec}(T)$ zadany jest przez

$$\boldsymbol{\mu}^{\prec}(T) := \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \mathbf{r}^{(i)}. \quad (98)$$

Wzory (94a)-(94b) zapewniają ograniczenia na to, jak bardzo dany proces losowy opisany macierzą przejścia T może zostać skoheryfikowany, ale także pokazują, co najmniej na ile można skoheryfikować T . Ograniczenia górne (tj. prawe strony powyższych równań) trywializują się, gdy T jest macierzą bistochastyczną, ale problem ten rozwiązano w pracy [H3] poprzez wyprowadzenie bardziej zaawansowanych ograniczeń na czystość $\mathcal{E}^C$ (zob. Rys. 14a dla przykładu).

Optymalnie skoheryfikowane kanały kubitowe i kutritowe. W pracy [H3] badane były także bezpośrednio koheryfikacje macierzy przejścia dla małych wymiarów d . W szczególności, pokazałem że wyprowadzone ograniczenia górne, wzory (94a)-(94b), mogą być wysycone dla $d = 2$, a także znalazłem postać takich optymalnie skoheryfikowanych kanałów kwantowych $\mathcal{E}^C$. W tym wypadku działanie klasyczne zadane jest przez macierz przejścia T opisaną dwoma parametrami,

$$T = \begin{bmatrix} a & 1-b \\ 1-a & b \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} a & \tilde{b} \\ \tilde{a} & b \end{bmatrix}, \quad (99)$$

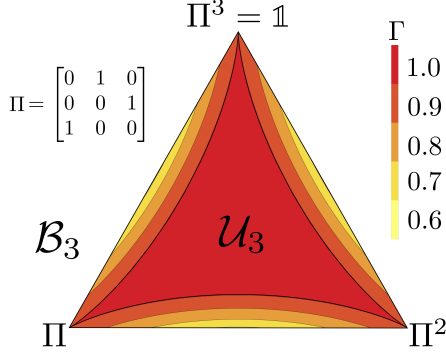
gdzie $\tilde{x} := 1 - x$. Skupimy się na przypadku $a \leq b$, gdyż wyniki dla przeciwnego przypadku, $a > b$, są analogiczne. Mianowicie, wystarczy tylko zamienić a na b we wszystkich wyrażeniach, oraz przetransformować wszystkie macierze X zamieniając X_{kl} na $X_{\tilde{k}\tilde{l}}$. Aby wyrazić operatory Krausa optymalnie skoheryfikowanego kanału $\mathcal{E}^C$, najpierw wprowadźmy następującą macierz unitarną:

$$U = \frac{1}{\sqrt{a+\tilde{b}}} \begin{bmatrix} \sqrt{a} & -\sqrt{\tilde{b}} \\ \sqrt{\tilde{b}} & \sqrt{a} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

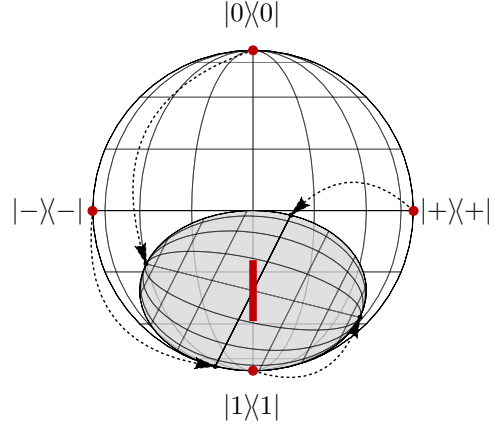
oraz kanał zaniku $\Psi(\cdot) = L_1(\cdot)L_1^\dagger + L_2(\cdot)L_2^\dagger$ z

$$L_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a+\tilde{b}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{b-a} & 0 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

(a)



(b)



Rysunek 14: (a) **Ograniczenie na czystość.** Ograniczenie z góry czystości Γ dla rodziny optymalnie skoheryfikowanych kanałów kutritowych z działaniem klasycznym zadany przez bistochastyczną macierz przejścia $T = \sum_{i=1}^3 q_i \Pi^i$, gdzie $\sum_i q_i = 1$ a Π jest cykliczną macierzą permutacji. Każda macierz unistochastyczna $T \in \mathcal{U}_3$ może zostać całkowicie skoheryfikowana, dlatego też wtedy $\Gamma = 1$. (b) **Działanie optymalnie skoheryfikowanego kanału kubitowego.** Obraz sfery Blocha pod działaniem $\mathcal{E}^C$ (z akcją klasyczną daną przez $a = \frac{1}{3}$ i $b = \frac{5}{6}$) reprezentowany jest przez szarą elipsoide. Gruba czerwona linia odpowiada działaniu klasycznego kanału T , a przerywane linie wskazują transformacje wyróżnionych punktów sfery.

Wtedy optymalnie skoheryfikowany kanał z klasycznym działaniem T dany jest przez $\mathcal{E}^C(\cdot) = K_1(\cdot)K_1^\dagger + K_2(\cdot)K_2^\dagger$ z

$$K_1 = L_1 U^\dagger = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{\tilde{b}} \\ -\sqrt{\frac{\tilde{b}}{a+b}} & \sqrt{\frac{a}{a+b}} \end{bmatrix}, \quad K_2 = L_2 U^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\tilde{a} - \frac{\tilde{b}}{a+b}} & \sqrt{b - \frac{a}{a+b}} \end{bmatrix}. \quad (102)$$

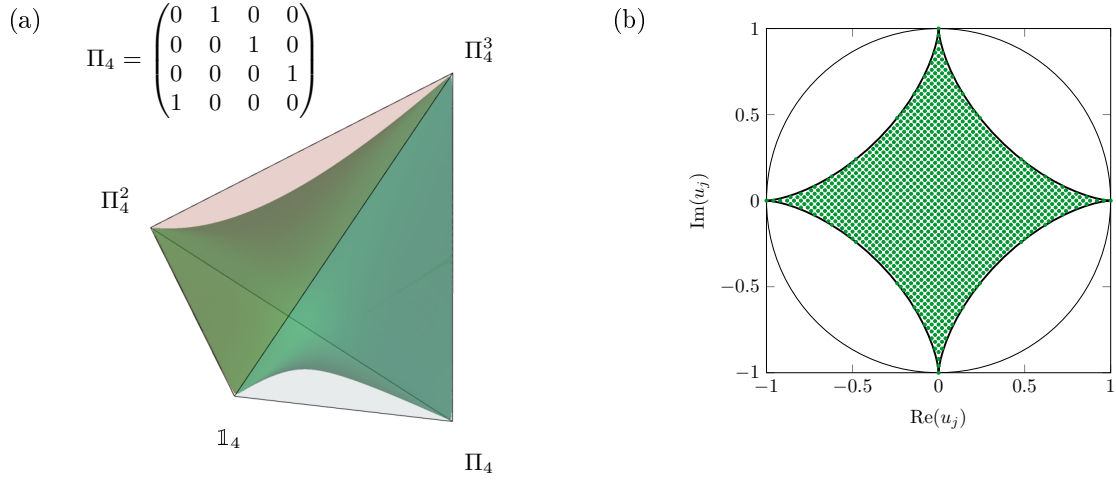
Działanie $\mathcal{E}^C$ na sferze Blocha dla pewnego konkretnego wyboru T zobrazowane jest na Rys. 14b. Wreszcie, w pracy [H3] pokazałem także, że macierze stochastyczne rozmiaru 3 należące do jednej z poniższych rodzin,

$$T \in \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{a} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (103)$$

także mogą być optymalnie skoheryfikowane (tzn. także wysycają wyprowadzone ograniczenia górne), oraz znalazłem dokładne formy tak optymalnie skoheryfikowanych kanałów

Struktura macierzy unistochastycznych. Jak zostało to omówione powyżej i w pracy [H3], badanie problemu unistochastyczności (tj. które macierze stochastyczne są unistochastyczne) może dać nam wgląd w naturę losowości, ponieważ unistochastyczne procesy losowe mogą wynikać z w pełni deterministycznej i odwracalnej dynamiki. Problem scharakteryzowania zbioru $\mathcal{U}_d$ macierzy unistochastycznych o rozmiarze d jest także związany z kwantyzacją klasycznych układów dynamicznych zdeterminowanych przez zadaną macierz bistochastyczną [114, 115]. Co więcej, unistochastyczność wiąże się także z zadaniem znalezienia wszystkich dyskretnych błędzeń losowych na grafie o d wierzchołkach [116]. Głównym celem pracy [H11] było pogłębienie naszego rozumienia struktury zbioru $\mathcal{U}_d$ poprzez wprowadzenie zbioru $\mathcal{L}_d$ macierzy łańcuskowych, który zawiera badany zbiór $\mathcal{U}_d$ i przybliża go z zewnątrz. Zbiór $\mathcal{L}_d$ składa się z tych bistochastycznych macierzy B , których elementy spełniają następujące warunki:

$$2 \max_j \sqrt{B_{jk} B_{jl}} \leq \sum_{j=1}^d \sqrt{B_{jk} B_{jl}}, \quad 2 \max_l \sqrt{B_{jl} B_{kl}} \leq \sum_{l=1}^d \sqrt{B_{jl} B_{kl}}, \quad (104)$$



Rysunek 15: **(a) Cyrkulantne macierze unistochastyczne o rozmiarze $d = 4$.** Zbiór macierzy cyrkulantnych 4×4 przedstawić można jako czworościan z wierzchołkami odpowiadającymi czterem cyrkulantnym macierzom permutacji Π_4^n , oraz punktami wewnątrz odpowiadającymi kombinacjom wypukłym tych ekstremalnych macierzy. Podzbiór macierzy cyrkulantnych, który dodatkowo spełnia warunki łańcuskowe (a więc, zgodnie z wynikami pracy [H11], zbiór cyrkulantnych macierzy unistochastycznych) przedstawiony jest jako niewypukły, zielony kształt wewnątrz czworościanu. **(b) Wartości własne podwójnie cyrkulantnych macierzy unistochastycznych.** Wartości własne podwójnie cyrkulantnych macierzy unistochastycznych 4×4 na płaszczyźnie zespolonej (zielone kropki), razem z astroidą, tj. 4-hypocykloidą. Wykreślony zbiór macierzy otrzymano dyskretyzując 4-wymiarowe wektory prawdopodobieństwa opisujące daną macierz cyrkulantną na siatce o rozmiarze 0.02 i sprawdzając, czy otrzymana macierz spełnia warunek łańcuskowy.

nazwa zaś odnosi się do faktu, że gdy powyższe nierówności są spełnione, to pewien zbiór odcinków o określonej długości można zamknąć w wielokąt (“łańcuszek”) na płaszczyźnie zespolonej. Następujące istotne własności zbioru $\mathcal{L}_d$ zostały udowodnione w pracy [H11]. Po pierwsze, zbiór macierzy łańcuskowych $\mathcal{L}_d$ jest zamknięty ze względu na mnożenie przez macierze faktoryzowalne i, w wyniku tego, każda macierz faktoryzowalna jest także łańcuskowa (przypomnijmy, że macierze faktoryzowalne to takie macierze, które można wyrazić jako iloczyn macierzy bistochastycznych działających nietrywialnie co najwyżej na dwóch poziomach [95]). Po drugie, zbiór macierzy łańcuskowych (a także zbiór macierzy faktoryzowalnych) jest gwiaździsty względem płaskiej macierzy van der Waerdena W_d ze wszystkimi elementami macierzowymi równymi $1/d$. Wreszcie, jeśli $B_1 \in \mathcal{L}_{d_1}$ i $B_2 \in \mathcal{L}_{d_2}$, to $B = B_1 \otimes B_2$ należy do $\mathcal{L}_{d_1 d_2}$. Te własności $\mathcal{L}_d$ nie tylko charakteryzują nadzbiór macierzy unistochastycznych $\mathcal{U}_d$, ale także w pełni opisują pewne małowymiarowe przypadki, gdyż wtedy oba te zbiory są sobie równe. Bardziej szczegółowo, wiadomo że $\mathcal{U}_3 = \mathcal{L}_3$ [94], a więc wyniki pracy [H11] oznaczają też, że zbiór unistochastycznych macierzy o rozmiarze 3 jest gwiaździsty względem płaskiej macierzy W_3 , a także zamknięty ze względu na mnożenie przez macierze faktoryzowalne. Co więcej, w pracy [H11] pokazano, że dla $d = 4$ zbiór cyrkulantnych macierzy unistochastycznych pokrywa się ze zbiorem cyrkulantnych macierzy łańcuskowych (przypomnijmy, że macierze cyrkulantne to macierze kwadratowe, w których wszystkie wiersze składają się z tych samych elementów, a każdy kolejny wiersz jest przesunięty o jeden element w prawo względem poprzedzającego go wiersza). Dlatego też zbiór cyrkulantnych macierzy unistochastycznych także jest zamknięty ze względu na mnożenie przez cyrkulantne macierze faktoryzowalne oraz gwiaździsty względem W_4 . Jego geometryczna struktura jest zobrazowana na Rys. 15a. Wreszcie, w pracy [H11] badałem także *podwójnie cyrkulantne* macierze unistochastyczne (tj. takie macierze unistochastyczne, które powstają z cyrkulantnej dynamiki unitarnej) i scharakteryzowałem ich widma. W szczególności udowodniłem, że wartości własne podwójnie cyrkulantnej macierzy B o rozmiarze d leżą wewnątrz jednostkowej d -hipocykloidy H_d na płaszczyźnie zespolonej, tj. wewnątrz gwiaździstego obszaru ograniczonego następującą krzywą parametryczną:

$$x(\theta) = \frac{d-1}{d} \cos \theta + \frac{1}{d} \cos((d-1)\theta), \quad y(\theta) = \frac{d-1}{d} \sin \theta - \frac{1}{d} \sin((d-1)\theta), \quad (105)$$

co zilustrowane jest na Rys. 15b. Co więcej, pokazałem że dla wymiarów $d \leq 4$, zbiory cyrkulantnych macierzy unistochastycznych pokrywają się ze zbiorami podwójnie cyrkulantnych macierzy unistochastycznych.

4.6.2 Strukturalne różnice pomiędzy losowością klasyczną a kwantową

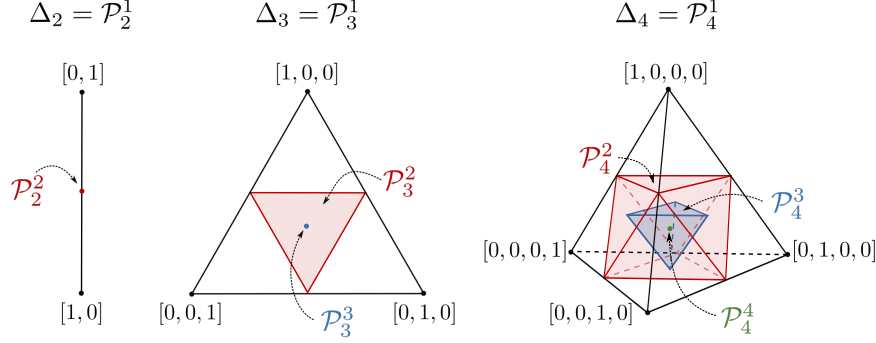
Klasycznie nierozróżnialne kanały i stany. Koncept koheryfikacji wprowadzony w artykule [H3] został wykorzystany w pracy [H7] do zbadania, o ile struktura kwantowej losowości jest bogatsza w porównaniu z losowością klasyczną. Bogactwo to wynika z faktu, że może istnieć wiele różnych kwantowych koheryfikacji danego klasycznego procesu opisanego macierzą przejścia T , pytaniem zatem jest, w jaki sposób odpowiednio to skwantyfikować? W pracy [H7], zająłem się tym problemem wprowadzając i badając następujące dwa pojęcia: *czynniki rozróżnialności* $M(T)$, dany przez maksymalną liczbę kwantowych kanałów mających to samo działanie klasyczne T i dających się perfekcyjnie rozróżnić w eksperymencie; oraz *ograniczony czynnik rozróżnialności* $\tilde{M}(T)$, dany przez maksymalną liczbę kwantowych kanałów mających to samo działanie klasyczne T i dających się perfekcyjnie rozróżnić w eksperymencie bez używania stanów splątanych. Badanie czynników rozróżnialności pozwala zliczyć różne sposoby przetwarzania informacji zakodowanej w kwantowej koherencji, ponieważ wszystkie koheryfikacje T są klasycznie nierozróżnialne (tj. klasyczne stopnie swobody transformują się tak samo, zgodnie z T), a więc rozróżnić je można jedynie poprzez efekt, jaki mają one na kwantowe stopnie swobody. Co więcej, w pracy [H7], analizowałem także różnice pomiędzy losowością klasyczną a kwantową przez rozszerzenie pojęcia koheryfikacji z kanałów do stanów: stan kwantowy ρ jest koheryfikacją klasycznego wektora prawdopodobieństwa $\mathbf{p}$, jeśli jego obsadzenia w wyróżnionej bazie są opisane przez $\mathbf{p}$ (tj. $\langle i | \rho | i \rangle = p_i$). Mówimy też, że wektor prawdopodobieństwa $\mathbf{p}$ o rozmiarze d należy do *obszaru M -rozróżnialności* $\mathcal{A}_d^M$ simpleksu prawdopodobieństwa Δ_d wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje M perfekcyjnie rozróżnialnych stanów kwantowych o tym samym klasycznym obrazie $\mathbf{p}$ (tj. klasycznie nierozróżnialnych).

Liczba różnych koheryfikacji stanów. Analiza w pracy [H7] rozpoczyna się od szukania warunków koniecznych na M -rozróżnialność stanów. Geometrycznie, problem ten jest równoważny ograniczeniu obszarów M -rozróżnialności $\mathcal{A}_d^M$ wewnątrz simpleksu prawdopodobieństwa Δ_d . Po pierwsze zwróćmy uwagę, że z definicji mamy $\mathcal{A}_d^l \subset \mathcal{A}_d^k$ dla $1 \leq k < l \leq d$, oraz $\mathcal{A}_d^1 = \Delta_d$. W celu znalezienia dalszych nietrywialnych warunków, potrzebny nam jest koncept permutohedronu [117]. Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, permutohedron $\mathcal{P}_d(\mathbf{x})$ jest otoczką wypukłą wszystkich permutacji $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{y} \in \mathcal{P}_d(\mathbf{x}) \iff \exists \boldsymbol{\lambda} : \mathbf{y} = \sum_k \lambda_k \Pi_k \mathbf{x}, \quad (106)$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest $d!$ -wymiarowym wektorem prawdopodobieństwa a $\{\Pi_k\}$ oznacza zbiór $d!$ macierzy permutacji działających na d -wymiarowych wektorach. Będziemy używać skróconej notacji $\mathcal{P}_d^M$, w celu oznaczenia permutohedronu dla $\mathbf{x}$ zadanego płaskim rozkładem z pierwszymi M elementami równymi $1/M$. Permutohedrony $\mathcal{P}_d^M$ tworzą zagnieżdżone wypukłe politopy (wielokomórki) w przestrzeni $\mathbb{R}^{d-1}$, spełniające $\mathcal{P}_d^{M+1} \subset \mathcal{P}_d^M$, $\mathcal{P}_d^1 = \Delta_d$ oraz $\mathcal{P}_d^d = \{\boldsymbol{\eta}\}$, z $\boldsymbol{\eta}$ oznaczającym rozkład jednorodny $[1/d, \dots, 1/d]$. Pierwsze kilka z nich zilustrowano na Rys. 16. W pracy [H7] udowodniłem, że obszary M -rozróżnialności $\mathcal{A}_d^M$ leżą wewnątrz permutohedronów $\mathcal{P}_d^M$, co nazwałem *ograniczeniem permutohedronowym*. Oznacza to, że warunkiem koniecznym na M -rozróżnialność zbioru stanów kwantowych $\{\rho^{(n)}\}_{n=1}^M$ z zadanym klasycznym obrazem $\mathbf{p}$ jest $\max_k p_k \leq 1/M$. Co więcej, udowodniłem że ten konieczny warunek na M -rozróżnialność jest także wystarczający dla $M = 2$ i $M = d$ (tj. $\mathcal{A}_d^2 = \mathcal{P}_d^2$ i $\mathcal{A}_d^d = \mathcal{P}_d^d$), ale nie jest wystarczający dla $M = d - 1$ oraz parzystych $d > 2$ (tj. $\mathcal{A}_d^{d-1} \neq \mathcal{P}_d^{d-1}$ dla parzystych $d > 2$). Następnie, pokazałem że dla wektorów prawdopodobieństwa leżących na granicy permutohedronu $\mathcal{P}_d^M$, M -rozróżnialność stanów mieszanych jest równoważna M -rozróżnialności stanów czystych, co znacząco upraszcza analizę problemu. Poza tym, udowodniłem także, że M -rozróżnialność zbioru stanów czystych $\{|\psi\rangle^{(n)}\}_{n=1}^M$ o zadanym klasycznym obrazie $\mathbf{p}$ jest równoważna z istnieniem macierzy unistochastycznej T z pierwszymi M kolumnami równymi $\mathbf{p}$, w ten sposób wiążąc badany problem ze znanym problemem unistochastyczności [93, 94]. Dla d będących liczbami pierwszymi pokazałem, że zawsze istnieje $d - 1$ perfekcyjnie rozróżnialnych stanów o klasycznym obrazie $\mathbf{p}$, jeśli tylko $\mathbf{p}$ jest wystarczająco blisko rozkładu jednorodnego, tj.

$$\exists \epsilon > 0 : \mathcal{B}(\boldsymbol{\eta}, \epsilon) \subseteq \mathcal{A}_d^{d-1}, \quad (107)$$



Rysunek 16: **Permutohedrony.** Wizualizacja permutohedronów $\mathcal{P}_d^M$ dla $2 \leq d \leq 4$ i $1 \leq M \leq d$. Permutohedron $\mathcal{P}_d^M$ ma $\binom{d}{M}$ wierzchołków zlokalizowanych na środkach $(M-1)$ -ścian simpleksu prawdopodobieństwa Δ_d .

gdzie $\mathcal{B}(\boldsymbol{\eta}, \epsilon)$ oznacza kulę o promieniu ϵ i środku w $\boldsymbol{\eta}$. Wreszcie, udowodniłem, że jeśli istnieje M perfekcyjnie rozróżnialnych stanów czystych o klasycznym obrazie $\boldsymbol{q}$ danym przez grubo-ziarnistą wersję $\boldsymbol{p}$, tj. $\boldsymbol{q} = G\boldsymbol{p}$ z G będącą stochastyczną macierzą z elementami ograniczonymi do $\{0, 1\}$, to istnieje także M perfekcyjnie rozróżnialnych stanów czystych o obrazie klasycznym $\boldsymbol{p}$.

Związek z zasadą nieoznaczoności czasu i energii. W pracy [H7] wykazany został silny związek pomiędzy problemem M -rozróżnialności stanów a zasadą nieoznaczoności czasu i energii. Żeby go zrozumieć przyjmijmy, że wyróżniona baza dana jest przez wektory własne Hamiltonianu H , $\{|E_k\rangle\}$, zatem $\boldsymbol{p}$ określa obsadzenia poziomów energetycznych, $p_k = \langle E_k | \rho | E_k \rangle$. Mimo iż obserwacja czasu nie istnieje w mechanice kwantowej, to jednak czas i energia w pewnym sensie są zmiennymi komplementarnymi, a zatem oczekuje się istnienia dla nich zasady nieoznaczoności. Mówiąc nieprecyzyjnie, powinna ona stanowić, że jeśli dany stan ρ ma dobrze określoną energię, to powinien być złym zegarem, tj. nie powinien się on zmieniać znacząco w czasie (w granicy gdy ρ jest stanem własnym energii, staje się on stanem stacjonarnym i w ogóle nie ewoluuje w czasie); a gdy stan ρ pozwala na rozróżnienie wielu różnych momentów w czasie z dużą dokładnością, to jego energia nie powinna być dokładnie zdefiniowana. Oczywiście istnieje wiele sposobów, na które można skwantyfikować zlokalizowanie energetycznego rozkładu ρ oraz jakość ρ jako zegara. Na przykład w najbardziej tradycyjnym sformułowaniu przez Mandelstama i Tamma [118], nieoznaczoność energii kwantyfikowana jest przez wariancję $\boldsymbol{p}$, a jakość pomiaru czasu dana jest przez minimalny czas potrzebny by ρ wyewoluowało do innego stanu rozróżnialnego (jasnym jest, że jeśli taki czas jest długi, to rozdzielczość czasowa jest mała, co z kolei oznacza słabą jakość ρ jako zegara). Alternatywnie, mając stan ρ o rozkładzie energii $\boldsymbol{p}$, jego jakość pomiaru czasu może być określona przez M , które mówi nam, ile różnych momentów w czasie może być jednoznacznie (tj. bez żadnej niepewności) odróżnionych przy pomocy ρ . Obszary M -rozróżnialności $\mathcal{A}_d^M$ są zatem geometryczną wizualizacją zasady nieoznaczoności czasu i energii: im bardziej zbliżamy się do centrum simpleksu prawdopodobieństwa (do rozkładu jednorodnego), tym bardziej niepewny jest wynik pomiaru energii, ale lepsza potencjalna jakość pomiaru czasu. Zastosowanie wyprowadzonego ograniczenia permutohedronowego daje nam zatem następujące stwierdzenie: stan, który może rozróżnić M różnych chwil w czasie, spełnia nierówność na min-entropię $H_\infty(\boldsymbol{p}) \geq \log M$, z $\boldsymbol{p}$ oznaczającym rozkład po stanach energetycznych. Zwróćmy uwagę, że wynik ten pokrywa się ze szczególną wersją niedawnego wyniku zaprezentowanego w pracy [119], gdzie autorzy studiowali entropowe sformułowania zasady nieoznaczoności czasu i energii. Dlatego też wszelkie usprawnienia ograniczenia permutohedronowego poprawiłyby także wyniki uzyskane w tamtej pracy.

Liczba różnych koheryfikacji kanałów. W kwestii czynników rozróżnialności w pracy [H7] uzyskano następujące wyniki. Po pierwsze udowodniono, że ograniczony czynnik rozróżnialności $\tilde{\mathcal{M}}(T)$ dla każdego unistochastycznego T przyjmuje maksymalną możliwą wartość, $\tilde{\mathcal{M}}(T) = d$. Analogiczny wynik otrzymano dla wszystkich cyrkulantnych macierzy stochastycznych T . Znalaziono także czynniki rozróżnialności dla macierzy identycznościowej i van den Waerdana, które są odpowiednio równe $\mathcal{M}(\mathbb{1}) = d$ i $\mathcal{M}(W) = d^2$, co

pokazuje, że bez ograniczenia czynniki rozróżnialności dla macierzy unistochastycznych mogą przyjmować ekstremalne dozwolone wartości. Dodatkowym wnioskiem z tego wyniku jest fakt, że maksymalna liczba perfekcyjnie rozróżnialnych uogólnionych kanałów defazujących $\mathcal{D}_C$, wprowadzonych w pracy [120] i zdefiniowanych poprzez macierz korelacji C jako

$$\langle i | \mathcal{D}_C(\rho) | j \rangle = \rho_{ij} C_{ij}, \quad (108)$$

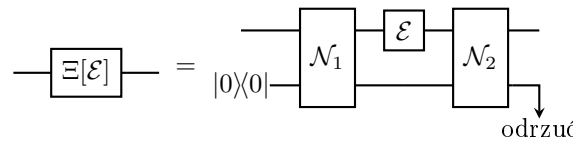
wynosi d . Co więcej, w pracy [H7] pokazano, że dla każdej bistochastycznej macierzy T mamy $\mathcal{M}(T) \geq 2$. Ograniczony czynnik rozróżnialności $\tilde{\mathcal{M}}(T)$ został także powiązany z obszarami rozróżnialności $\mathcal{A}_d^M$: jeśli wektor prawdopodobieństwa dany przez kolumnę T należy do $\mathcal{A}_d^M$, to $\tilde{\mathcal{M}}(T) \geq M$. Jeśli zaś elementy co najmniej jednej kolumny macierzy stochastycznej T spełniają uogólnioną nierówność trójkąta, to $\tilde{\mathcal{M}}(T) \geq 2$. Wreszcie, problem czynników rozróżnialności został całkowicie rozwiązany dla układu dwupoziomowego: $\tilde{\mathcal{M}}(T)$ dla T sparametryzowanego wzorem (99) wynosi

$$\tilde{\mathcal{M}}(T) = \begin{cases} 1 & : \text{for } \frac{1}{2} < |a - b| \leq 1, \\ 2 & : \text{for } 0 \leq |a - b| \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (109)$$

a tymczasem $\mathcal{M}(T)$ wynosi

$$\mathcal{M}(T) = \begin{cases} 2 & : \text{for } 0 < |a - b| \leq \frac{1}{2}, \\ 3 & : \text{for } a = b \text{ and } a \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, \\ 4 & : \text{for } a = b = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (110)$$

Superkanały defazujące. W pracy [H10] wprowadziłem i zbadałem klasę szumów, które pozostawiają niezmienną klasyczną akcję kanału $\mathcal{E}$ w wyróżnionej bazie, ale nietrywialnie wpływają na jego własności kwantowe. Zapewnia to jeszcze jedną perspektywę na strukturalne różnice między klasycznymi a kwantowymi procesami – podczas gdy te *defazujące superkanały* nie mają żadnego efektu na dynamikę klasyczną, posiadają jednak bogatą strukturę wpływającą na dynamikę koherencji. Matematycznym pojęciem pozwalającym na formalne uchwycenie ogólnego efektu szumu jest kwantowy superkanał [121], który jest liniową transformacją Ξ mapującą pomiędzy kanałami kwantowymi. Ma on standardową realizację fizyczną w postaci pre- i post-przetwarzania przez kanały $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ z wykorzystaniem pamięci:



$$\text{---} \boxed{\Xi[\mathcal{E}]} \text{---} = |0\rangle\langle 0| \text{---} \boxed{\mathcal{N}_1} \text{---} \boxed{\mathcal{E}} \text{---} \boxed{\mathcal{N}_2} \text{---} \text{odrzuć} \quad (111)$$

Superkanał Ξ nazywamy defazującym, jeśli nie zmienia on prawdopodobieństw przejść w wyróżnionej bazie:

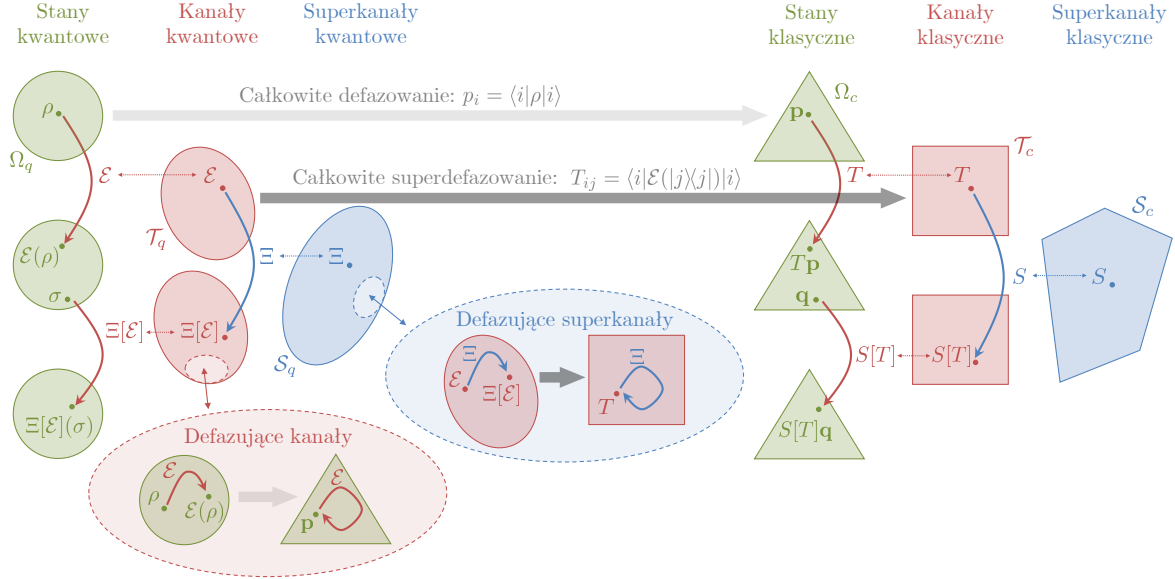
$$\forall \mathcal{E}, |i\rangle, |j\rangle : \quad \langle i | \Xi[\mathcal{E}] (|j\rangle\langle j|) | i \rangle = \langle i | \mathcal{E} (|j\rangle\langle j|) | i \rangle. \quad (112)$$

Koncept defazujących superkanałów oraz ich związek z kanałami defazującymi zilustrowany jest na Rys. 17.

W pracy [H10] defazujące superkanały zostały najpierw matematycznie scharakteryzowane przez ustalenie izomorfizmu pomiędzy ich zbiorem a szczególną rodziną Schur-produktowych superodwzorowań działających na stan Jamiołkowskiego $J(\mathcal{E})$ kanału $\mathcal{E}$. Mianowicie, udowodniono, że transformacja liniowa Ξ jest defazującym superkanałem wtedy, i tylko wtedy, jeśli transformuje stan Jamiołkowskiego w następujący sposób:

$$J(\Xi[\mathcal{E}]) = \sum_{ijkl} J(\mathcal{E})_{ij,kl} C_{ij,kl} |ij\rangle\langle kl| = J(\mathcal{E}) \circ C, \quad (113)$$

gdzie $\{|ij\rangle\}$ to wyróżniona baza, $\circ$ oznacza iloczyn Schura (iloczyn po współrzędnych) w tejże bazie, a C to macierz korelacji (dodatnia macierz ze wszystkimi elementami diagonalnymi równymi 1) o rozmiarze d^2 i



Rysunek 17: **Defazujące kanały i superkanały.** Zbiór stanów kwantowych Ω_q (macierze gęstości) jest rzutowany na zbiór stanów klasycznych Ω_c (wektory prawdopodobieństwa) przez całkowicie defazujący kanał, który usuwa wszystkie koherencje w wyróżnionej bazie, ale nie zmienia obsadzeń poziomów. Uogólnione kanały defazujące to te mapowania pomiędzy stanami kwantowymi, które zmieniają koherencje, jednocześnie nie zmieniając obsadzeń, tj. zostawiają klasyczny (kompletnie zdefazowany) obraz stanu bez zmian. Analogicznie, zbiór kanałów kwantowych $\mathcal{T}_q$ (mapy CPTP) jest rzutowany na zbiór kanałów klasycznych $\mathcal{T}_c$ (macierze stochastyczne) przez całkowicie defazujący superkanał, który usuwa wszelkie koherentne własności kanału, ale pozostawia bez zmian prawdopodobieństwa przejść w wyróżnionej bazie. Ogólne superkanały defazujące tworzą podzbiór superkanałów kwantowych $\mathcal{S}_q$ takich, że wpływają na koherentne własności kanałów, ale nie zmieniają ich prawdopodobieństw przejść, tj. zostawiają klasyczne (całkowicie superzdefazowane) działanie kanału bez zmian.

następującej postaci:

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{11} & \dots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{11} \end{bmatrix}, \quad (114)$$

gdzie C_{ij} są macierzami $d \times d$ a C_{11} jest macierzą korelacji. Znalazłem także fizyczną realizację ogólnego superkanału defazującego Ξ , jako unitarne pre- i post-przetwarzanie z dodatkowym układem o rozmiarze d^2 w następującej postaci:

$$\Xi_C[\mathcal{E}] = |0\rangle\langle 0| \text{---} \boxed{U} \text{---} \boxed{\mathcal{E}} \text{---} \boxed{V} \text{---} \text{odrzucić}, \quad (115)$$

gdzie

$$U(\cdot) = U(\cdot)U^\dagger, \quad U = \sum_{i=1}^d |i\rangle\langle i| \otimes U_i, \quad (116a)$$

$$V(\cdot) = V(\cdot)V^\dagger, \quad V = \sum_{i=1}^d |i\rangle\langle i| \otimes V_i, \quad (116b)$$

z $\{U_i\}, \{V_i\}$ będącymi dowolnymi macierzami unitarnymi rozmiaru d^2 . Związek między C a tymi macierzami unitarnymi dany jest przez

$$C_{ik,jl} = \langle 0 | U_l^\dagger V_j^\dagger V_i U_k | 0 \rangle. \quad (117)$$

Powyższa fizyczna realizacja została także bezpośrednio powiązana z pre- i post-przetwarzaniem z użyciem uogólnionych kanałów defazujących z pamięcią, a także wprost pokazano, że dla układów o wymiarze $d \geq 3$ ten efekt pamięci poszerza możliwy zbiór defazujących szumów. Co więcej, w pracy [H10] udowodniłem też, że moc generowania koherencji [122] ogólnego kanału kwantowego monotonicznie spada pod wpływem defazujących superkanałów. Wreszcie, zanalizowałem wpływ jaki defazujący szum może mieć na kanał kwantowy $\mathcal{E}$ poprzez zbadanie liczby $M(\mathcal{E}, \epsilon)$ ϵ -rozdzielalnych (tj. rozdzielalnych z prawdopodobieństwem $1 - \epsilon$) kanałów, do których $\mathcal{E}$ może być przetransformowane za pomocą superkanałów defazujących. Pokazałem, że liczba ta jest ograniczona z góry przez

$$M(\mathcal{E}, \epsilon) \leq 2^{C_{D_H^\epsilon}(\mathcal{E} \| \mathcal{E}_\Delta)}, \quad (118)$$

gdzie $\mathcal{E}_\Delta$ to klasyczna (całkowicie zdefazowana) wersja $\mathcal{E}$, a $C_{D_H^\epsilon}$ to kanałowa miara koherencji bazująca na kanałowej entropii względnej związanej z entropią względną testowania hipotez [123],

$$C_{D_H^\epsilon}(\mathcal{E}_1 \| \mathcal{E}_2) := \sup_{\rho^{AB}} D_H^\epsilon((\mathcal{E}_1^A \otimes \mathcal{I}^B)(\rho^{AB}) \| (\mathcal{E}_2^A \otimes \mathcal{I}^B)(\rho^{AB})), \quad (119)$$

z

$$D_H^\epsilon(\rho \| \sigma) := -\log \inf \{ \text{Tr}(Q\sigma) \mid 0 \leq Q \leq \mathbb{1}, \text{Tr}(Q\rho) \geq 1 - \epsilon \}. \quad (120)$$

Zaprezentowałem także komplementarne spojrzenie na ten problem, w którym koherencja kanału $\mathcal{E}$ może być widziana jako zasób pozwalający na rozróżnienie pomiędzy różnymi defazującymi superkanałami.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową

5.1 Aktywność naukowa w instytucjach badawczych

Podczas swojej kariery naukowej prowadziłem badania w 5 różnych ośrodkach akademickich, w tym w 2 zagranicznych, w Australii i Wielkiej Brytanii.

Badania wykonywane w instytucjach badawczych po otrzymaniu stopnia doktora:

1. **Uniwersytet Jagielloński, Polska** – Październik, 2019 – do teraz
10 opublikowanych prac: [H8–H15] oraz [KK14, KK15]
1 zaproszony wykład konferencyjny, 6 wykładów konferencyjnych oraz 8 wykładów seminaryjnych
2. **Uniwersytet Gdański, Polska** – Czerwiec, 2019 - Grudzień, 2019
3 opublikowane prace: [H8, H9, H13]
1 zaproszony wykład konferencyjny
3. **University of Sydney, Australia** – Styczeń, 2017 - Maj, 2019
8 opublikowanych prac: [H1–H8]
5 wykładów konferencyjnych oraz 8 wykładów seminaryjnych

Badania wykonywane w instytucjach badawczych przed otrzymaniem stopnia doktora:

4. **Imperial College London, Wielka Brytania** – Marzec, 2013 - Październik, 2016
9 opublikowanych prac: [KK5, KK7–KK12] oraz [H1, H2]
5 wykładów konferencyjnych oraz 7 wykładów seminaryjnych
5. **Politechnika Wrocławska, Polska** – Październik, 2009 - Lipiec 2012
5 opublikowanych prac: [KK1–KK3, KK5, KK7]
1 wykład konferencyjny oraz 2 wykłady seminaryjne

5.2 Artykuły spoza cyklu habilitacyjnego

Podczas swojej kariery naukowej opublikowałem 12 artykułów naukowych niezawartych w rozprawie habilitacyjnej.

Artykuły spoza cyklu habilitacyjnego opublikowane po otrzymaniu stopnia doktora:

1. [KK15] *Fast estimation of outcome probabilities for quantum circuits*
Hakop Pashayan, Oliver Reardon-Smith, Kamil Korzekwa, Stephen D. Bartlett
[PRX Quantum 3, 020361 \(2022\)](#) [[arXiv:2101.12223](#)]
Liczba stron: 29+13, Brak punktacji ministerialnej (czasopismo powstałe w 2020), Impact factor: 7.514
2. [KK14] *Work fluctuations due to partial thermalizations in two-level systems*
Maria Quadeer, Kamil Korzekwa, Marco Tomamichel
[Phys. Rev. E 103, 042141 \(2021\)](#) [[arXiv:2101.01330](#)]
Liczba stron: 16, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 2.296

Artykuły spoza cyklu habilitacyjnego opublikowane przed otrzymaniem stopnia doktora:

3. [KK12] *Classical noise and the structure of minimal uncertainty states*
Kamil Korzekwa, Matteo Lostaglio
[Phys. Rev. A 93, 062347 \(2016\)](#) [[arXiv:1602.01850](#)]
Liczba stron: 14, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
4. [KK11] *The extraction of work from quantum coherence*
Kamil Korzekwa, Matteo Lostaglio, Jonathan Oppenheim, David Jennings
[New J. Phys. 18, 023045 \(2016\)](#) [[arXiv:1506.07875](#)]
Liczba stron: 18, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 3.539
5. [KK10] *Quantum Coherence, Time-Translation Symmetry, and Thermodynamics*
Matteo Lostaglio, Kamil Korzekwa, David Jennings, Terry Rudolph
[Phys. Rev. X 5, 021001 \(2015\)](#) [[arXiv:1410.4572](#)]
Liczba stron: 11, Punktacja ministerialna: 200, Impact factor: 12.577
6. [KK9] *Operational constraints on state-dependent formulations of quantum error-disturbance trade-off relations*
Kamil Korzekwa, David Jennings, Terry Rudolph
[Phys. Rev. A 89, 052108 \(2014\)](#) [[arXiv:1311.5506](#)]
Liczba stron: 6, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
7. [KK8] *Quantum and classical entropic uncertainty relations*
Kamil Korzekwa, Matteo Lostaglio, David Jennings, Terry Rudolph
[Phys. Rev. A 89, 042122 \(2014\)](#) [[arXiv:1402.1143](#)]
Liczba stron: 9, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
8. [KK7] *Quantum-state transfer in spin chains via isolated resonance of terminal spins*
Kamil Korzekwa, Paweł Machnikowski, Paweł Horodecki
[Phys. Rev. A 89, 062301 \(2014\)](#) [[arXiv:1403.7359](#)]
Liczba stron: 6, Punktacja ministerialna: 100, Impact factor: 2.777
9. [KK5] *Spin dynamics in p-doped semiconductor nanostructures subject to a magnetic field tilted from the Voigt geometry*
K. Korzekwa, C. Gradl, M. Kugler, S. Furthmeier, M. Griesbeck, M. Hirmer, D. Schuh, W. Wegscheider, T. Kuhn, C. Schüller, T. Korn, P. Machnikowski
[Phys. Rev. B 88, 155303 \(2013\)](#) [[arXiv:1306.6363](#)]
Liczba stron: 8, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 3.575

10. [KK3] *Spin dynamics in two-dimensional electron and hole systems revealed by resonant spin amplification*
T. Korn, M. Griesbeck, M. Kugler, S. Furthmeier, C. Gradl, M. Hirmer, D. Schuh, W. Wegscheider, K. Korzekwa, P. Machnikowski, T. Kuhn, M.M. Glazov, E.Ya. Sherman, C. Schüller
[Proc. SPIE 8461, Spintronics V, 84610O \(2012\)](#)
Liczba stron: 12
11. [KK2] *Decoherence-assisted initialization of a resident hole spin polarization in a pp-doped semiconductor quantum well*
M. Kugler, K. Korzekwa, P. Machnikowski, C. Gradl, S. Furthmeier, M. Griesbeck, M. Hirmer, D. Schuh, W. Wegscheider, T. Kuhn, C. Schüller, T. Korn
[Phys. Rev. B 84, 085327 \(2011\) \[arXiv:1105.1338\]](#)
Liczba stron: 9, Punktacja ministerialna: 140, Impact factor: 3.575
12. [KK1] *Tunneling transfer protocol in a quantum dot chain immune to inhomogeneity*
Kamil Korzekwa, Paweł Machnikowski
[Acta Phys. Pol. A, 120, 859-861 \(2011\) \[arXiv:1108.5749\]](#)
Liczba stron: 3, Punktacja ministerialna: 40, Impact factor: 0.857

5.3 Współpraca krajowa i międzynarodowa

Podczas swojej kariery naukowej współpracowałem z wieloma naukowcami z 16 różnych jednostek naukowych, zarówno krajowych jak i zagranicznych. Poniższa lista zawiera wszystkie te instytucje i naukowców, z którymi współpraca zaowocowała co najmniej jednym wspólnym opublikowanym artykułem naukowym.

Współpraca naukowa po uzyskaniu stopnia doktora:

1. ICFO, The Barcelona Institute of Science and Technology, Barcelona, Hiszpania
 - Dr Matteo Lostaglio: [H2]
2. University of Technology Sydney, Sydney, Australia
 - Prof. Marco Tomamichel: [H4–H6]
 - Dr Maria Quadeer: [KK14]
3. University of Sydney, Sydney, Australia
 - Prof. Stephen Bartlett: [KK15]
 - Dr Christopher T. Chubb: [H4–H6]
4. Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
 - Prof. Karol Życzkowski: [H3, H7, H10, H11, H13]
 - Dr Stanisław Czachórski: [H3, H7]
 - Dr Roberto Salazar: [H10]
 - Dr Oliver Reardon-Smith: [KK15]
 - Mr Alexssandre de Oliveira Junior: [H12]
5. Polska Akademia Nauk
 - Prof. Zbigniew Puchała: [H3, H7, H10, H11, H13]
 - Dr Grzegorz Rajchel-Mieldzioć: [H11]
6. University of Oxford, Oxford, Wielka Brytania
 - Dr David Jennings: [H8]

- Dr Cristina Cirstoiu: [\[H8\]](#)
- 7. Delft University of Technology, Delft, Holandia
 - Dr Matteo Lostaglio: [\[H9\]](#)
- 8. Uniwersytet Gdański, Gdańsk, Polska
 - Prof. Paweł Horodecki: [\[H10\]](#)
 - Prof. Michał Horodecki: [\[H12\]](#)
 - Mr Tanmoy Biswas: [\[H12\]](#)
- 9. National University of Singapore, Singapur
 - Prof. Marco Tomamichel: [\[KK14\]](#) and [\[H13\]](#)
- 10. Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Kanada
 - Dr Hakop Pashayan: [\[KK15\]](#)
- 11. University of Amsterdam, Amsterdam, Holandia
 - Dr Matteo Lostaglio: [\[H14\]](#), [\[H15\]](#)
- 12a. Imperial College London, London, Wielka Brytania
 - Dr Antony Milne: [\[H2\]](#)

Współpraca naukowa przed uzyskaniem stopnia doktora:

- 12b. Imperial College London, London, Wielka Brytania
 - Prof. Terry Rudolph: [\[KK8–KK10\]](#)
 - Dr David Jennings: [\[KK8–KK11\]](#)
 - Dr Matteo Lostaglio: [\[KK8–KK12\]](#)
- 13. University College London, London, Wielka Brytania
 - Prof. Jonathan Oppenheim: [\[KK11\]](#)
- 14. Politechnika Gdańska, Gdańsk, Polska
 - Prof. Paweł Horodecki: [\[KK7\]](#)
- 15. Universität Regensburg, Regensburg, Niemcy
 - Prof. Tobias Korn: [\[KK2\]](#), [\[KK3\]](#), [\[KK5\]](#)
 - Dr Michael Kugler: [\[KK2\]](#), [\[KK3\]](#), [\[KK5\]](#)
- 16. Politechnika Wrocławska, Wrocław, Polska
 - Prof. Paweł Machnikowski: [\[KK1–KK3\]](#), [\[KK5\]](#), [\[KK7\]](#)

5.4 Wykłady na konferencjach i seminariach

Podczas swojej kariery naukowej wygłosiłem 44 wykłady konferencyjne i seminaryjne dotyczące swoich badań w jednostkach naukowych w 12 różnych krajach.

Wykłady po uzyskaniu stopnia doktora:

1. *Optimizing thermalizations*

- Wykład konferencyjny na Quantum Thermodynamics Conference 2022, Belfast, Wielka Brytania (2022)
- Wykład konferencyjny na 25th Annual Conference on Quantum Information Processing, Pasadena, USA (2022)

2. *Fundamental constraints of quantum thermodynamics in the Markovian regime*

- Zaproszony wykład konferencyjny na Quantum Optics X, Toruń, Poland (2021)
- Zaproszony wykład seminaryjny na UTS Centre for Quantum Software and Information Seminar, Sydney, Australia (2021)

3. *Fast estimation of outcome probabilities for quantum circuits*

- Zaproszony wykład seminaryjny na Terhal Group Seminar, QuTech, Delft, Holandia (2021)

4. *Quantum advantage in simulating stochastic processes*

- Wyróżniony wykład konferencyjny na Annual Ingarden session on Quantum Information, Sopot, Polska (2020)
- Wykład seminaryjny na Quantum Information & Chaos Seminar, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska (2020)
- Zaproszony wykład seminaryjny na The Quantum and Complexity Science Initiative Seminar, Nanyang Technological University, Singapur (2020)

5. *Encoding classical information in quantum resources*

- Wykład konferencyjny na CTP Quantum Information Days, Warszawa, Polska (2021)
- Wykład konferencyjny na Beyond IID in Information Theory 8, Palo Alto, USA (2020)
- Wykład konferencyjny na 15th Conference on the Theory of Quantum Computation, Communication and Cryptography, Riga, Łotwa (2020)
- Wykład seminaryjny na Quantum Information & Chaos Seminar, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska (2020)

6. *Classical simulations of quantum circuits*

- Zaproszony wykład seminaryjny na International Centre for Theory of Quantum Technologies Seminar, Uniwersytet Gdański, Gdańsk, Polska (2020)
- Wykład seminaryjny na Quantum Information & Chaos Seminar, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska (2020)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Krakow Quantum Informatics Seminar, Kraków, Polska (2020)

7. *Resource-theoretic approach to the thermodynamic arrow of time*

- Zaproszony wykład konferencyjny na Quantum Information Theory and Mathematical Physics Workshop, Budapest, Węgry (2019)

8. *Avoiding irreversibility: lossless interconversion of quantum resources*

- Zaproszony wykład konferencyjny na X Jubilee Symposium KCIK, Sopot, Polska (2019)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Quantum Information & Chaos seminar, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska (2018)
- Wykład konferencyjny na AIP Congress, Perth, Australia (2018)
- Wykład konferencyjny na Island Physics Conference, Magnetic Island, Australia (2018)

9. *Beyond the thermodynamic limit*

- Wykład konferencyjny na Asian Quantum Information Science Conference, Nagoya University, Japonia (2018)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Center for Theoretical Physics seminar, Polska Akademia Nauk, Polska (2017)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Quantum Information & Chaos seminar, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska (2017)
- Zaproszony wykład konferencyjny na Quantum Foundations and Beyond symposium, National Quantum Information Centre, Sopot, Polska (2017)
- Wykład seminaryjny na Quantum Science Group seminar, University of Sydney, Australia (2017)

10. *Coherifying quantum states and channels*

- Zaproszony wykład seminaryjny na Centre for Quantum Software and Information seminar, University of Technology Sydney, Sydney, Australia (2018)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Monash Quantum Information Science seminar, Monash University, Melbourne Australia (2018)
- Zaproszony wykład seminaryjny na QSciTech Research Group seminar, Macquarie University, Sydney, Australia (2018)

11. *On time evolution of coherences and populations*

- Zaproszony wykład seminaryjny na Quantum Information & Chaos seminar, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska (2016)

Wykłady przed uzyskaniem stopnia doktora:

12. *The extraction of work from quantum coherence*

- Wykład konferencyjny na Scientific meeting of PhD students, Politechnika Wrocławska, Polska (2016)

13. *Quantum information and thermodynamics: a resource-theoretic approach*

- Wykład seminaryjny na Quantum Optics and Laser Science Group seminar, Imperial College London, Wielka Brytania (2016)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Takahiro Sagawa's Group seminar, University of Tokyo, Japonia (2016)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Quantum Science Group seminar, University of Sydney, Australia (2016)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Coherence-Correlations-Complexity seminar, Politechnika Wrocławska, Polska (2015)

14. *Quantum Coherence, Time-Translation Symmetry, and Thermodynamics*

- Wykład konferencyjny na APS March Meeting, Baltimore, USA (2016)
- Wykład konferencyjny na 4th International Workshop on the Optical Properties of Nanostructures, Wrocław, Polska (2016)

- Zaproszony wykład seminaryjny na Quantum Information Theory seminar, ICFO Barcelona, Hiszpania (2016)
- Wykład konferencyjny na Symposium on Quantum Coherence, University of Ulm, Niemcy (2015)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Quantum Information Theory seminar, ETH Zurich, Szwajcaria (2015)
- Wykład konferencyjny na 7th Colleges of London Quantum Information Meeting, Imperial College London, Wielka Brytania (2014)

15. *Quantum state transfer via spin chains*

- Zaproszony wykład seminaryjny na Coherence-Correlations-Complexity seminar, Politechnika Wrocławska, Polska (2013)

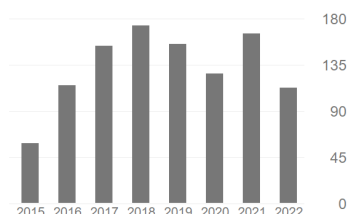
16. *Decoherence-driven mechanism for initialization of hole spins in a p-doped semiconductor quantum well*

- Wykład konferencyjny na 41st "Jaszowiec" International School & Conference on the Physics of Semiconductors, Krynica-Zdrój, Polska (2012)
- Zaproszony wykład seminaryjny na Optical Spectroscopy of Semiconductor Quantum Structures seminar, Universität Regensburg, Niemcy (2011)
- Wykład seminaryjny na Coherence-Correlations-Complexity seminar, Politechnika Wrocławska, Polska (2011)

5.5 Dane bibliometryczne

Google Scholar (21 Lipca 2022):

- Całkowita liczba cytowań: 1100
- H-index: 12
- Cytowania w poszczególnych latach:



Web of Science (21 Lipca 2022):

- Całkowita liczba cytowań: 722 (689 wyłączając autocytowania)
- H-index: 10

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

Nauczanie akademickie:

- **Asystent dydaktyczny, University of Sydney** – Styczeń, 2018 - Luty 2018
Krótka seria wykładów pt. *Quantum Spookiness* (kurs na kierunku Fizyka dla studentów 2-go roku studiów I-go stopnia)

- **Asystent dydaktyczny, Imperial College London** – Październik, 2014 - Grudzień 2014
Ćwiczenia do kursu *Mathematics: Functions* (kurs na kierunku Fizyka dla studentów 1-go roku studiów I-go stopnia)

Zaproszone wykłady:

- **Uniwersytet Wrocławski** – Listopad, 2016
Krótka seria wykładów pt. *Introduction to Quantum Information Theory* (dla doktorantów)

Opieka nad studentami:

- **Opiekun stażu studenckiego** – Sierpień, 2021 - Wrzesień, 2021
Student: Michał Piotrak
Uczelnia: Imperial College London
Projekt: *Optimal quantum protractor*
- **Promotor pomocniczy doktoratu** – Listopad, 2020 - do dziś
Doktorant: Tanmoy Biswas
Uczelnia: Uniwersytet Gdański
Rozprawa doktorska: *Finite-size effects in quantum thermodynamics*
- **Promotor pomocniczy doktoratu** – Marzec, 2020 - do dziś
Doktorant: Alexssandre de Oliveira Junior
Uczelnia: Uniwersytet Jagielloński
Rozprawa doktorska: *Geometric and information-theoretic aspects of quantum thermodynamics*
- **Promotor pracy licencjackiej** – Październik, 2020 - Czerwiec, 2022
Student: Piotr Przedwojski
Uczelnia: Uniwersytet Jagielloński
Praca licencjacka: *Asymmetrising quantum states and channels*
- **Promotor pomocniczy pracy magisterskiej** – Luty, 2017 - Październik, 2017
Student: Taiga Adair
Uczelnia: University of Sydney
Praca magisterska: *Measurement-Based Quantum Computation with a Foliated Colour Code*
- **Opiekun studenta studiów licencjackich** – Marzec, 2017 - Czerwiec, 2017
Student: Matthew Winnel
Uczelnia: University of Sydney
Projekt zaliczeniowy: *Exploring the thermodynamic arrow of time for low-dimensional quantum systems*
- **Promotor pomocniczy pracy magisterskiej** – Listopad, 2014 - Maj, 2015
Student: Sofia Qvarfort
Uczelnia: Imperial College London
Praca magisterska: *A Resource-Theoretical Approach to Time-Energy Measurements in Quantum Mechanics*

6.2 Osiągnięcia organizacyjne

- **Organizator cotygodniowych seminariów JQI arXiv Review** – Marzec, 2022 - Czerwiec, 2022
- **Współorganizator warsztatów JQI Team Gorce Workshop** – Lipiec, 2021
- **Organizator cotygodniowych seminariów JQI Team Meeting** – Luty, 2021 - Czerwiec, 2021
- **Recenzent i egzaminator doktoratu** – Wrzesień, 2020
Rozprawa doktorska: *The Structure and Manipulation of Resources in Quantum Information Theory*
Doktorant: Thomas Hebdige
Uniwersytet: Imperial College London, London, Wielka Brytania

- **Kierownik grupy badawczej Quantum Resources Group** – Październik, 2019 - do dziś
Przewodzenie badaniami grupy składającej się z 3 post-doców i 1 doktoranta
- **Ekspert oceniający granty dla Narodowego Centrum Nauki** – Marzec, 2018
Ocena zgłoszenia grantu *Preludium*.
- **Recenzent zgłoszeń konferencyjnych** – 2017 - do dziś
Recenzje dla:
 - Quantum Information Processing (4 recenzje)
 - Theory of Quantum Computation, Communication and Cryptography (4 recenzje)
 - IEEE Information Theory Workshop (1 recenzja)
- **Recenzent artykułów naukowych** – 2014 - do dziś
Recenzje dla:
 - Physical Review A (17 recenzji)
 - Physical Review E (1 recenzja)
 - Physical Review Letters (5 recenzji)
 - PRX Quantum (2 recenzje)
 - Nature Physics (1 recenzja)
 - Journal of Physics A (1 recenzja)
 - New Journal of Physics (1 recenzja)
 - Entropy (1 recenzja)
 - Quantum (8 recenzji)
 - IEEE Transactions on Information Theory (1 recenzja)

Wszystkie recenzje mogą być zweryfikowane na <https://publons.com/researcher/1425073/kamil-korzekwa>

- **Współorganizator QUICC Summer School** – August, 2013

6.3 Osiągnięcia popularyzujące naukę

- **Artykuł naukowy wyróżniony w *Physics Viewpoint*** – Lipiec, 2022
Wyniki z [H15] opisane dla szerszej publiczności w magazynie kierowanym przez American Physical Society i skupiającym się na ważnych wynikach opublikowanych w czasopismach z rodziny Physical Review
- **Opisany w australijskiej gazecie ogólnokrajowej *The Sydney Morning Herald*** – Grudzień, 2017
Artykuł promujący badania grupy naukowej Quantum Science Research Group na University of Sydney
- **Artykuł naukowy wyróżniony w *Physics Viewpoint*** – Listopad, 2015
Wyniki z [KK10] opisane dla szerszej publiczności w magazynie kierowanym przez American Physical Society i skupiającym się na ważnych wynikach opublikowanych w czasopismach z rodziny Physical Review
- **Zajęcia popularyzatorskie podczas *The Imperial Festival*** – Maj, 2014
- **Zajęcia popularyzatorskie podczas *The Amazing Quantum World show*** – Maj, 2013

7 Pozostałe osiągnięcia naukowe

7.1 Nagrody i stypendia

- Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców – Wrzesień, 2020
- Najlepszy absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Wrocławskiej – Lipiec, 2012
- Stypendium magisterskie i doktoranckie Engineering and Physical Sciences Research Council – Kwiecień, 2012
- Stypendium doktoranckie Scottish Universities Physics Alliance Prize – Kwiecień, 2012 (nieprzyjęte)
- Stypendium doktoranckie Diamentowy grant – Marzec, 2012 (nieprzyjęte)
- Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za znaczące osiągnięcia dla studentów – Październik, 2011 - Czerwiec, 2012
- Stypendium magisterskie Fundacji na Rzecz Nauki Polskiej w projekcie TEAM – Październik, 2010 - Czerwiec 2012

7.2 Wyróżnione artykuły

- Prezentacja wyników artykułów [H14, H15] nagrodzona jako najlepszy wykład konferencji Quantum Thermodynamics 2022.
- Artykuł [H15] wybrany przez redaktorów Physical Review Letters jako Editors' Suggestion oraz wybrany do Physics Viewpoint
- Artykuł [H14] wybrany przez redaktorów Physical Review A jako Editors' Suggestion
- Artykuł [H10] wybrany przez redaktorów Physical Review A jako Editors' Suggestion
- Artykuł [KK11] wybrany przez redaktorów New Journal of Physics jako Highlights of 2016
- Artykuł [KK10] wybrany na dziesięciolecie Physical Review X jako jeden z przełomowych artykułów, a także wybrany do Physics Viewpoint
- Artykuł [KK5] wybrany przez redaktorów Physical Review B jako Editors' Suggestion

Artykuły naukowe kandydata wchodzące do rozprawy habilitacyjnej

- [H1] K. Korzekwa, “Structure of the thermodynamic arrow of time in classical and quantum theories,” *Phys. Rev. A* **95**, 052318 (2017).
- [H2] M. Lostaglio, K. Korzekwa, and A. Milne, “Markovian evolution of quantum coherence under symmetric dynamics,” *Phys. Rev. A* **96**, 032109 (2017).
- [H3] K. Korzekwa, S. Czachórski, Z. Puchała, and K. Życzkowski, “Coherifying quantum channels,” *New J. Phys.* **20**, 043028 (2018).
- [H4] C. T. Chubb, M. Tomamichel, and K. Korzekwa, “Beyond the thermodynamic limit: finite-size corrections to state interconversion rates,” *Quantum* **2**, 108 (2018).
- [H5] C. T. Chubb, M. Tomamichel, and K. Korzekwa, “Moderate deviation analysis of majorization-based resource interconversion,” *Phys. Rev. A* **99**, 032332 (2019).
- [H6] K. Korzekwa, C. T. Chubb, and M. Tomamichel, “Avoiding irreversibility: Engineering resonant conversions of quantum resources,” *Phys. Rev. Lett.* **122**, 110403 (2019).
- [H7] K. Korzekwa, S. Czachórski, Z. Puchała, and K. Życzkowski, “Distinguishing classically indistinguishable states and channels,” *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 475303 (2019).
- [H8] C. Cirstoiu, K. Korzekwa, and D. Jennings, “Robustness of Noether’s principle: Maximal disconnects between conservation laws and symmetries in quantum theory,” *Phys. Rev. X* **10**, 041035 (2020).
- [H9] K. Korzekwa and M. Lostaglio, “Quantum advantage in simulating stochastic processes,” *Phys. Rev. X* **11**, 021019 (2021).
- [H10] Z. Puchała, K. Korzekwa, R. Salazar, P. Horodecki, and K. Życzkowski, “Dephasing superchannels,” *Phys. Rev. A* **104**, 052611 (2021).
- [H11] G. Rajchel-Mieldzioć, K. Korzekwa, Z. Puchała, and K. Życzkowski, “Algebraic and geometric structures inside the Birkhoff polytope,” *J. Math. Phys.* **63**, 012202 (2022).
- [H12] T. Biswas, A. Junior, M. Horodecki, and K. Korzekwa, “Fluctuation-dissipation relations for thermodynamic distillation processes,” *Phys. Rev. E* **105**, 054127 (2022).
- [H13] K. Korzekwa, Z. Puchała, M. Tomamichel, and K. Życzkowski, “Encoding classical information into quantum resources,” *IEEE Trans. Inf. Theory* **68**, 4518 (2022).
- [H14] M. Lostaglio and K. Korzekwa, “Continuous thermomajorization and a complete set of laws for Markovian thermal processes,” *Phys. Rev. A* **106**, 012426 (2022).
- [H15] K. Korzekwa and M. Lostaglio, “Optimizing thermalizations,” *Phys. Rev. Lett.* **129**, 040602 (2022)

Artykuły kandydata spoza cyklu habilitacyjnego

- [KK1] K. Korzekwa and P. Machnikowski, “Tunneling transfer protocol in a quantum dot chain immune to inhomogeneity,” *Acta Phys. Pol. A* **120**, 859–861 (2011).
- [KK2] M. Kugler, K. Korzekwa, P. Machnikowski, C. Gradl, S. Furthmeier, M. Griesbeck, M. Hirmer, D. Schuh, W. Wegscheider, T. Kuhn, *et al.*, “Decoherence-assisted initialization of a resident hole spin polarization in a p-doped semiconductor quantum well,” *Phys. Rev. B* **84**, 085327 (2011).
- [KK3] T. Korn, M. Griesbeck, M. Kugler, S. Furthmeier, C. Gradl, M. Hirmer, D. Schuh, W. Wegscheider, K. Korzekwa, P. Machnikowski, *et al.*, “Spin dynamics in two-dimensional electron and hole systems revealed by resonant spin amplification,” in *Spintronics V*, Vol. 8461 (International Society for Optics and Photonics, 2012) p. 84610O.

- [KK4] K. Korzekwa, *Magneto-optical Kerr effect and resonant spin amplification*, [Master's thesis](#), Wrocław University of Technology (2012).
- [KK5] K. Korzekwa, C. Gradl, M. Kugler, S. Furthmeier, M. Griesbeck, M. Hirmer, D. Schuh, W. Wegscheider, T. Kuhn, C. Schueller, *et al.*, “Spin dynamics in p-doped semiconductor nanostructures subject to a magnetic field tilted from the Voigt geometry,” [Phys. Rev. B](#) **88**, 155303 (2013).
- [KK6] K. Korzekwa, *Resource theory of asymmetry*, [Master's thesis](#), Imperial College London (2013).
- [KK7] K. Korzekwa, P. Machnikowski, and P. Horodecki, “Quantum-state transfer in spin chains via isolated resonance of terminal spins,” [Physical Review A](#) **89**, 062301 (2014).
- [KK8] K. Korzekwa, M. Lostaglio, D. Jennings, and T. Rudolph, “Quantum and classical entropic uncertainty relations,” [Phys. Rev. A](#) **89**, 042122 (2014).
- [KK9] K. Korzekwa, D. Jennings, and T. Rudolph, “Operational constraints on state-dependent formulations of quantum error-disturbance trade-off relations,” [Phys. Rev. A](#) **89**, 052108 (2014).
- [KK10] M. Lostaglio, K. Korzekwa, D. Jennings, and T. Rudolph, “Quantum coherence, time-translation symmetry, and thermodynamics,” [Phys. Rev. X](#) **5**, 021001 (2015).
- [KK11] K. Korzekwa, M. Lostaglio, J. Oppenheim, and D. Jennings, “The extraction of work from quantum coherence,” [New J. Phys.](#) **18**, 023045 (2016).
- [KK12] K. Korzekwa and M. Lostaglio, “Classical noise and the structure of minimum uncertainty states,” [Phys. Rev. A](#) **93**, 062347 (2016).
- [KK13] K. Korzekwa, *Coherence, thermodynamics and uncertainty relations*, [Ph.D. thesis](#), Imperial College London (2016).
- [KK14] M. Quadeer, K. Korzekwa, and M. Tomamichel, “Work fluctuations due to partial thermalizations in two-level systems,” [Phys. Rev. E](#) **103**, 042141 (2021).
- [KK15] H. Pashayan, O. Reardon-Smith, K. Korzekwa, and S. D. Bartlett, “Fast estimation of outcome probabilities for quantum circuits,” [PRX Quantum](#) **xxx**, xxx (2022)

Literatura

- [1] A. Eddington, *The nature of the physical world: The Gifford lectures 1927* (Cambridge University Press, 1930).
- [2] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, 2008).
- [3] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, [Rev. Mod. Phys.](#) **81**, 865 (2009).
- [4] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, and B. Schumacher, [Phys. Rev. A](#) **53**, 2046 (1996).
- [5] M. A. Nielsen, [Phys. Rev. Lett.](#) **83**, 436 (1999).
- [6] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, [Phys. Rev. Lett.](#) **70**, 1895 (1993).
- [7] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, [Phys. Rev. Lett.](#) **76**, 722 (1996).
- [8] J. C. Maxwell, *Theory of Heat* (Longmans, Green and Co., 1873).
- [9] L. Szilard, [Z. Phys.](#) **53**, 840 (1929).
- [10] R. Landauer, [IBM J. Res. Dev.](#) **5**, 183 (1961).

- [11] C. H. Bennett and G. Brassard, in *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, Vol. 175 (1984) p. 8.
- [12] A. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [13] P. W. Shor, in *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science* (IEEE, 1994) pp. 124–134.
- [14] L. K. Grover, in *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing* (1996) pp. 212–219.
- [15] M. Horodecki and J. Oppenheim, *Int. J. Mod. Phys. B* **27**, 1345019 (2013).
- [16] E. Chitambar and G. Gour, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 025001 (2019).
- [17] M. Horodecki and J. Oppenheim, *Nat. Commun.* **4**, 2059 (2013).
- [18] F. G. S. L. Brandão, M. Horodecki, J. Oppenheim, J. M. Renes, and R. W. Spekkens, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 250404 (2013).
- [19] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
- [20] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [21] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, 2002).
- [22] F. G. S. L. Brandão, M. Horodecki, N. H. Y. Ng, J. Oppenheim, and S. Wehner, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112**, 3275 (2015).
- [23] E. Noether, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **1918**, 235 (1918).
- [24] I. Marvian, *Symmetry, Asymmetry and Quantum Information*, *Ph.D. thesis*, University of Waterloo. (2012).
- [25] S. D. Bartlett, T. Rudolph, and R. W. Spekkens, *Rev. Mod. Phys.* **79**, 555 (2007).
- [26] J. Goold, M. Huber, A. Riera, L. del Rio, and P. Skrzypczyk, *J. Phys. A* **49**, 143001 (2016).
- [27] D. Janzing, P. Wocjan, R. Zeier, R. Geiss, and T. Beth, *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 2717 (2000).
- [28] J. Åberg, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 150402 (2014).
- [29] M. Lostaglio, D. Jennings, and T. Rudolph, *Nat. Commun.* **6**, 6383 (2015).
- [30] P. Ćwikliński, M. Studziński, M. Horodecki, and J. Oppenheim, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 210403 (2015).
- [31] R. Uzdin, A. Levy, and R. Kosloff, *Phys. Rev. X* **5**, 031044 (2015).
- [32] R. Alicki and M. Fannes, *Phys. Rev. E* **87**, 042123 (2013).
- [33] M. Perarnau-Llobet, K. V. Hovhannisyan, M. Huber, P. Skrzypczyk, N. Brunner, and A. Acín, *Phys. Rev. X* **5**, 041011 (2015).
- [34] J. B. Brask, G. Haack, N. Brunner, and M. Huber, *New J. Phys.* **17**, 113029 (2015).
- [35] A. Uhlmann, *Ann. Phys. (N. Y.)* **497**, 524 (1985).
- [36] H. Umegaki, *Kodai Math. Sem. Rep.* **14**, 59 (1962).
- [37] M. Tomamichel and M. Hayashi, *IEEE Trans. Inf. Theory* **59**, 7693 (2013).
- [38] K. Li, *Ann. Stat.* **42**, 171 (2014).

- [39] W. Kumagai and M. Hayashi, [IEEE Trans. Inf. Theory](#) **63**, 1829 (2017).
- [40] G. Vidal, D. Jonathan, and M. Nielsen, [Phys. Rev. A](#) **62**, 012304 (2000).
- [41] V. Strassen, in *Trans. Third Prague Conf. Inf. Theory* (Prague, 1962) pp. 689–723.
- [42] Y. Altug and A. B. Wagner, [IEEE Trans. Inf. Theory](#) **60**, 4417 (2014).
- [43] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. Plenio, [Phys. Rev. Lett.](#) **113**, 140401 (2014).
- [44] S. Du, Z. Bai, and Y. Guo, [Phys. Rev. A](#) **91**, 052120 (2015).
- [45] M. Hayashi, [IEEE Trans. Inf. Theory](#) **54**, 4619 (2008).
- [46] J. Åberg, [Nat. Commun.](#) **4**, 1925 (2013).
- [47] N. H. Y. Ng, M. P. Woods, and S. Wehner, [New J. Phys.](#) **19**, 113005 (2017).
- [48] R. Kubo, [Rep. Prog. Phys.](#) **29**, 255 (1966).
- [49] M. V. S. Bonança, [Phys. Rev. E](#) **78**, 031107 (2008).
- [50] A. Einstein, [Ann. Phys.](#) **324**, 371 (1906).
- [51] M. von Smoluchowski, [Ann. Phys.](#) **326**, 756 (1906).
- [52] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order* (Cambridge university press, 2002).
- [53] R. Kosloff, [Entropy](#) **15**, 2100 (2013).
- [54] R. Alicki and R. Kosloff, “Introduction to quantum thermodynamics: History and prospects,” in *Thermodynamics in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and New Directions*, edited by F. Binder, L. A. Correa, C. Gogolin, J. Anders, and G. Adesso (Springer International Publishing, Cham, 2018) pp. 1–33.
- [55] E. T. Campbell, B. M. Terhal, and C. Vuillot, [Nature](#) **549**, 172 (2017).
- [56] J. Klatzow, J. N. Becker, P. M. Ledingham, C. Weinzetl, K. T. Kaczmarek, D. J. Saunders, J. Nunn, I. A. Walmsley, R. Uzdin, and E. Poem, [Phys. Rev. Lett.](#) **122**, 110601 (2019).
- [57] E. B. Davies, [Commun. Math. Phys.](#) **39**, 91 (1974).
- [58] W. Roga, M. Fannes, and K. Życzkowski, [Rep. Math. Phys.](#) **66**, 311 (2010).
- [59] V. Scarani, M. Ziman, P. Štelmachovič, N. Gisin, and V. Bužek, [Phys. Rev. Lett.](#) **88**, 097905 (2002).
- [60] C. Perry, P. Źwikliński, J. Anders, M. Horodecki, and J. Oppenheim, [Phys. Rev. X](#) **8**, 041049 (2018).
- [61] E. Bäumer, M. Perarnau-Llobet, P. Kammerlander, H. Wilming, and R. Renner, [Quantum](#) **3**, 153 (2019).
- [62] H. J. Miller, M. Scandi, J. Anders, and M. Perarnau-Llobet, [Phys. Rev. Lett.](#) **123**, 230603 (2019).
- [63] K. Korzekwa, *Continuous thermomajorisation* (2021), github.com/KorzekwaKamil/continuous_thermomajorisation.
- [64] L. J. Schulman and U. V. Vazirani, in *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing* (ACM, 1999) pp. 322–329.
- [65] P. O. Boykin, T. Mor, V. Roychowdhury, F. Vatan, and R. Vrijen, [Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A](#) **99**, 3388 (2002).
- [66] N. A. Rodríguez-Briones and R. Laflamme, [Phys. Rev. Lett.](#) **116**, 170501 (2016).
- [67] S. Raeisi and M. Mosca, [Phys. Rev. Lett.](#) **114**, 100404 (2015).

- [68] N. A. Rodríguez-Briones, *Novel Heat-Bath Algorithmic Cooling methods*, Ph.D. thesis, University of Waterloo (2020).
- [69] L. J. Schulman, T. Mor, and Y. Weinstein, [Phys. Rev. Lett. **94**, 120501 \(2005\)](#).
- [70] N. A. Rodríguez-Briones, J. Li, X. Peng, T. Mor, Y. Weinstein, and R. Laflamme, [New J. Phys. **19**, 113047 \(2017\)](#).
- [71] J. G. Richens and L. Masanes, [Nat. Commun. **7**, 1 \(2016\)](#).
- [72] M. Perarnau-Llobet and R. Uzdin, [New J. Phys. **21**, 083023 \(2019\)](#).
- [73] F. G. S. L. Brandão, M. Horodecki, N. H. Y. Ng, J. Oppenheim, and S. Wehner, [Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **112**, 3275 \(2015\)](#).
- [74] N. H. Y. Ng, L. Mančinska, C. Cirstoiu, J. Eisert, and S. Wehner, [New J. Phys. **17**, 085004 \(2015\)](#).
- [75] P. Lipka-Bartosik and P. Skrzypczyk, [Phys. Rev. X **11**, 011061 \(2021\)](#).
- [76] Á. M. Alhambra, M. Lostaglio, and C. Perry, [Quantum **3**, 188 \(2019\)](#).
- [77] H. Wilming, R. Gallego, and J. Eisert, [Phys. Rev. E **93**, 042126 \(2016\)](#).
- [78] A. Polkovnikov, [Ann. Phys. **326**, 486 \(2011\)](#).
- [79] J. P. Santos, L. C. Céleri, G. T. Landi, and M. Paternostro, [npj Quantum Inf. **5**, 1 \(2019\)](#).
- [80] A. Renyi, in *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (1961) pp. 547–561.
- [81] C. Tsallis, [J. Stat. Phys. **52**, 479 \(1988\)](#).
- [82] S. Abe, [Phys. Lett. A **271**, 74 \(2000\)](#).
- [83] C. Tsallis, *Introduction to nonextensive statistical mechanics: approaching a complex world* (Springer Science & Business Media, 2009).
- [84] A. M. Mariz, [Phys. Lett. A **165**, 409 \(1992\)](#).
- [85] H. Wilming and R. Gallego, [Phys. Rev. X **7**, 041033 \(2017\)](#).
- [86] E. B. Davies, [Electron. J. Probab. **15**, 1474 \(2010\)](#).
- [87] G. Elfving, Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A2 **8**, 1 (1937).
- [88] J. F. C. Kingman, [Probab. Theory Relat. Fields **1**, 14 \(1962\)](#).
- [89] J. T. Runnenburg, [P. K. Ned. Akad. A Math **65**, 536 \(1962\)](#).
- [90] G. S. Goodman, [Probab. Theory Relat. Fields **16**, 165 \(1970\)](#).
- [91] P. Carette, [New York J. Math **1**, 129 \(1995\)](#).
- [92] M. M. Wolf, J. Eisert, T. S. Cubitt, and J. I. Cirac, [Phys. Rev. Lett. **101**, 150402 \(2008\)](#).
- [93] I. Bengtsson, [arXiv quant-ph/0403088 \(2004\)](#).
- [94] I. Bengtsson, Å. Ericsson, M. Kuś, W. Tadej, and K. Życzkowski, [Commun. Math. Phys. **259**, 307 \(2005\)](#).
- [95] Y.-T. Poon and N.-K. Tsing, [Linear Multilinear A. **21**, 253 \(1987\)](#).
- [96] P. Lencastre, F. Rauschel, T. Rogers, and P. G. Lind, [Phys. Rev. E **93**, 032135 \(2016\)](#).
- [97] D. H. Wolpert, A. Kolchinsky, and J. A. Owen, [Nat. Commun. **10**, 1 \(2019\)](#).

- [98] P. Taranto, F. Bakhshinezhad, P. Schüttelkopf, F. Clivaz, and M. Huber, *Phys. Rev. Appl.* **14**, 054005 (2020).
- [99] G. Gour and R. W. Spekkens, *New J. Phys.* **10**, 033023 (2008).
- [100] I. Marvian and R. W. Spekkens, *Phys. Rev. A* **94**, 052324 (2016).
- [101] I. Marvian and R. W. Spekkens, *Phys. Rev. A* **90**, 062110 (2014).
- [102] C. Fleming, N. I. Cummings, C. Anastopoulos, and B. L. Hu, *J. Phys. A* **43**, 405304 (2010).
- [103] M. Keyl and R. F. Werner, *J. Math. Phys.* **40**, 3283 (1999).
- [104] T. R. Bromley, M. Cianciaruso, and G. Adesso, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 210401 (2015).
- [105] I. A. Silva, A. M. Souza, T. R. Bromley, M. Cianciaruso, R. Marx, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, R. Lo Franco, S. J. Glaser, E. R. deAzevedo, D. O. Soares-Pinto, and G. Adesso, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 160402 (2016).
- [106] J. C. Baez and B. Fong, *J. Math. Phys.* **54**, 013301 (2013).
- [107] J. E. Gough, T. S. Ratiu, and O. G. Smolyanov, *J. Math. Phys.* **56**, 022108 (2015).
- [108] J. Wallman, C. Granade, R. Harper, and S. T. Flammia, *New J. Phys.* **17**, 113020 (2015).
- [109] C. H. Bennett and S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2881 (1992).
- [110] S.-H. Kye, *Linear Algebra Appl.* **216**, 239 (1995).
- [111] M. Hayashi and H. Nagaoka, *IEEE Trans. Inf. Theory* **49**, 1753 (2003).
- [112] S. D. Bartlett, T. Rudolph, and R. W. Spekkens, *Phys. Rev. A* **70**, 032307 (2004).
- [113] A. Jamiołkowski, *Rep. Math. Phys.* **3**, 275 (1972).
- [114] P. Pakoński, K. Życzkowski, and M. Kuś, *J. Phys. A* **34**, 9303 (2001).
- [115] P. Pakoński, G. Tanner, and K. Życzkowski, *J. Stat. Phys.* **111**, 1331 (2003).
- [116] A. Ambainis, *Int. J. Quantum Inf* **01**, 507 (2003).
- [117] A. Postnikov, *Int. Math. Res. Notices* **2009**, 1026 (2009).
- [118] L. Mandelstam and I. G. Tamm, in *Selected Papers* (Springer, 1991) pp. 115–123.
- [119] P. J. Coles, V. Katariya, S. Lloyd, I. Marvian, and M. M. Wilde, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 100401 (2019).
- [120] I. Devetak and P. W. Shor, *Commun. Math. Phys.* **256**, 287 (2005).
- [121] G. Chiribella, G. M. D’Ariano, and P. Perinotti, *EPL* **83**, 30004 (2008).
- [122] A. Mani and V. Karimipour, *Phys. Rev. A* **92**, 032331 (2015).
- [123] G. Gour, *IEEE Trans. Inf. Theory* **65**, 5880 (2019)