prof. dr hab. Agnieszka Kałamajska
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
adres E-mail: kalamajs@mimuw.edu.pl
Warszawa, 31 marca 2022

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym
pana doktora Arkadiusza Lewandowskiego

1 Wstępne informacje o habilitancie

Pan doktor Arkadiusz Lewandowski ukończył wyższe studia w roku 2009 na wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Stopień doktora nauk matematycznych uzyskał w roku 2013, także na Uniwersytecie Jagiellońskim, na podstawie rozprawy *"Separately holomorphic functions on crosses"*. Promotorem rozprawy doktorskiej był prof. dr. hab. Marek Jarnicki. Od 2013 roku do chwili obecnej pan Arkadiusz Lewandowski pracuje w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, przy czym w okresie 2013-2016 na stanowisku asystenta, natomiast od 2016 roku do chwili obecnej, na stanowisku adiunkta. Habilitant przebywał także na stażu postdoktorskim na Uniwersytecie w Iceland w latach 2014-2015.

Zainteresowania badawcze pana dr. Arkadiusza Lewandowskiego dotyczą analizy zespolonej, ściśle teorii obszarów pseudowypukłych i teorii deformacji takich obszarów. Badania na ten temat rozpoczęły się w latach 70-tych ubiegłego stulecia. Zainteresowanie tematyką wzrosło w ostatnich latach, począwszy od roku 2014.

Pan dr. Arkadiusz Lewandowski opublikował łącznie 14 prac, z czego siedem wchodzi w skład rozprawy habilitacyjnej, dwie zostały opublikowane przed doktoratem, a pozostałych pięć wchodzi w skład tak zwanego dorobku pobocznego. Prace włączone do rozprawy habilitacyjnej to prace publikowane w bardzo dobrych i dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym: Proceedings of the American Mathematical Society, Journal of Geometric Analysis, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Archiv der Mathematik. Wyniki były referowane na wielu konferencjach zagranicznych oraz podczas pobytów naukowach w ośrodkach zagranicznych.

Na co należy zwrócić uwagę, wszystkie wymienione artykuły są opublikowane samodzielnie, co świadczy o bardzo dużej samodzielności badawczej ich autora. Skutkiem ubocznym jest niemal brak cytowań bez samocytowań (indeks Hirsha wynosi 2). Równocześnie należy zauważyć, że prace są trudne od strony technicznej i wymagają bardzo dużej wiedzy teoretycznej.

Przejdę do bardziej szczegółowego omówienia dorobku habilitanta.

2 Omówienie i ocena rozprawy habilitacyjnej

Na rozprawę habilitacyjną *" Stabilność transformacji obszarów ściśle pseudowypukłych"* składa się siedem prac samodzielnych: [A1]-[A7] wymienionych w autoreferacie:

[A7] Exposing maps in strictly pseudoconvex domains with smooth dependence on parameters, Proc. Amer. Math. Soc. 149 (2021), no. 11, 4881–4889;

[A6] Splitting lemma for biholomorphic mappings with smooth dependence on parameters, J. Geom. Anal. 31 (2021), no. 6, 5783–5798;

[A5] Families of exposing maps in strictly pseudoconvex domains, J. Geom. Anal. 31 (2021), no. 1, 697–714;

[A4] Peak functions and boundary behaviour of holomorphically invariant distances and metrics on strictly pseudoconvex domains, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 21 (2020), 89–106.;

[A3] Strictly pseudoconvex domains and smoothly varying peak functions, J. Math. Anal. Appl. 473 (2019), no. 2, 1073–1080;

[A2] Parametrix for the localization of the Bergman metric on strictly pseudoconvex domains, Arch. Math. (Basel) 111 (2018), no. 5, 503–511.;

[A1] Families of strictly pseudoconvex domains and peak functions, J. Geom. Anal. 28 (2018), no. 3, 2466–2476.

Choć na ogół nie są to prace długie, są one napisane w sposób bardzo skondensowany, z wieloma odnośnikami do metod z innych prac.

Omówienie wyników rozprawy

Punktem centralnym omawianej tematyki jest obszar $G \subseteq \mathbf{C}^n$ z wyróżnionym punktem na brzegu, $\xi \in \partial G$, oraz powiązana grupa pojęć:

Punkty globalnej silnej wypukłości i przekształcenia eksponujące. Zakłada się, że brzeg G jest klasy C^2. Punkt ξ jest punktem globalnej wypukłości, jeśli ∂G jest silnie wypukły w punkcie ξ, oraz jedynym punktem wspólnym $\bar{G}$ z przestrzenią styczną $T_\xi(\partial G)$ jest $\{\xi\}$. Jeśli obszar G można wraz z pewnym otoczeniem przekształcić holomorficznie w obszar $h(G)$, dla którego $h(\xi)$ jest punktem globalnej wypukłości, to takie odwzorowanie h nazywamy eksponencjalnym.

Punkty szczytowe i funkcje szczytowe. Mówimy, że ξ jest punktem szczytowym $\mathcal{O}(\bar{G})$ (zbioru funkcji holomorficznych w otoczeniu $\bar{G}$), jeśli istnieje funkcja $f \in \mathcal{O}(\bar{G})$, którą nazwiemy funkcją szczytową w punkcie ξ taka, że $f(\xi) = 1$, $f(\bar{G}) \setminus \{\xi\}) \subseteq \mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

Problemem ogólnie otwartym jest problem istnienia odwzorowań ekspotenujących i szczytowych w zadaniej klasie. Wiadomo z prac K. Diedericha, J.E. Fornaessa i E.F. Wolda z 2014 roku, że gdy G jest obszarem pseudowypukłym z brzegiem klasy C^2, to dla każdego punktu $\xi \in \partial G$ istnieje odwzorowanie eksponujące. Wiadomo ponadto z pracy I. Grahama z 1975 roku, że każdy punkt $\xi \in \partial G$ jest punktem szczytowym, oraz istnieje funkcja ciągła $f : \hat{G} \times \partial G \to \mathbf{C}$, gdzie $\hat{G}$ jest pewnym otoczeniem G taka, że dla każdego $\xi \in \partial G$ funkcja $f(\cdot, \xi)$ jest szczytowa w punkcie ξ.

Autor rozprawy ustosunkował się do następującego problemu sformułowanego w roku 2016 przez F. Denga, Q. Guana i L. Zhanga:

Problem 4.5. Niech $\rho : \mathbf{D} \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$ będzie funkcją plurisubharmoniczną klasy C^k, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$. Załóżmy, że dla każdego $t \in \mathbf{D}$ obcięta funkcja $\rho|_{\{t\} \times \mathbf{C}^n}$ jest ściśle plurisubharmoniczna i globalnie definiująca dla obszaru ściśle pseudowypukłego $G_t := \{w \in \mathbf{C}^n : \rho(t, w) < 0\}$. Czy istnieją C^{k-2}- gładkie rodziny:

(A) $(h_{t,\xi})_{t \in \mathbf{D}, \xi \in \partial G_t}$- odwzorowań eksponujących dla G_t w punktach $\xi \in \partial G_t$?

(B) $(f_{t,\xi})_{t \in \mathbf{D}, \xi \in \partial G_t}$- funkcji szczytowych dla G_t w punktach $\xi \in \partial G_t$?

Przejdę do bardziej szczegółowego omówienia prac.

Prace [A5]-[A7]. Te prace odniosły się do Problemu (A). Habilitant skonstruował rodzinę $(h_{t,\xi})_{t \in \mathbf{D}, \xi \in \partial G_t}$ odwzorowań eksponujących dla G_t w punktach $\xi \in \partial G_t$, które są klasy $C^{(k-1)/2}$ ze względu na wszytskie zmienne. Wynik najogólniejszy został otrzymany w Twierdzeniu 4.10 w pracy [A7], natomiast wynik w wersji dla $k = 2$ był otrzymany w pracy [A5].

W przedstawionych konstrukcjach pan dr. Lewandowski powoływał się w różnych fazach dowodów na metody z innych prac. Na przykład, istotnym narzędziem prowadzącym do wyniku najogólniejszego z pracy [A7] jest pewien wariant lematu F. Forsteriča z 2003 roku o rozkładzie odwzorowań biholomorficznych bliskich identyczności z gładką zależnością od parametrów, otrzymany w artykuje [A6]. Zastosowane zostały również metody z pracy R. Ugoliniego z 2017 roku, metody F. Denga, J. E. Fornassa i E. Wolda z 2018 roku, oraz wyniki pracy S.R. Bella z 2016 roku. W pracy [A5], do rozwiązania Problemu (A) w wersji dla $k = 2$ (Twierdzenia 1.3, głównego twierdzenia w publikacji) połączone zostały techniki z prac F. Denga, J.E. Fornasa oraz E.F. Wolda z 2018 roku, oraz techniki z pracy K. Diedericha, J.E. Fornasa oraz E.F. Wolda z 2014 roku. W pracy [A6] autor odwoływał się do metod z pracy Forstneriča z 2003 roku, oraz L. Simona z 2019 roku, lecz metody wymagały istotnej modyfikacji.

Stosowane metody, to metody wielowymiarowej analizy zespolonej (na przykład znajomości subtelnych technik dla rozwiązania $\bar{\partial}$ problemu z zależnością od parametrów z pracy X. Gonga i K-T Kima z 2018 roku), geometrii różniczkowej (stosowane są na przykłąd kompleksy Koszela) i algebraicznej (np. twierdzenie Oka-Cartana), topologii, aparat analizy funkcjonalnej (na przykład twierdzenie o funkcji uwikłanej w przestrzeniach Banacha, analiza w przestrzeniach funkcyjne).

Wyniki nie wykorzystują założenia subharmoniczności funkcji ρ z problemu oryginalnego 4.5.

Zwraca uwagę bardzo dobra znajomość najnowszej literatury, pozwalająca wykorzystać istniejące już metody i zmodyfikować je do potrzeb postawionych pytań. Analiza wymaga ogromnej precyzji od strony technicznej. Prace napisane są w sposób bardzo zwarty, z bardzo dużą ilością odniesień do wyników i technik z prac innych autorów.

Prace [A1]-[A4] zajmują się analizą Problemu (B), przy czym prace [A1], oraz [A3] odnoszą się bezpośrednio do rozwiązania problemu, natomiast [A2] i [A4] do zastosowań wyników z prac [A1], [A3]. Opiszę pokrótce te dwie grupy prac.

Prace **[A1]** i **[A3]**. Rozważmy dwie sytuacje, przy czym sytuacja druga stanowi uogólnienie pierwszej.

Sytuacja 4.15. (z pracy [A1]): $\{G_t\}_{t\in T}$ jest rodziną wspólnie ograniczonych obszarów ściśle pseudowypukłych z brzegami klasy C^2, $(T, d(\cdot))$ jest zwartą przestrzenią metryczną, $U \subset\subset \mathbf{C}^n$ jest obszarem takim, że

(i) $\cup_{t\in T}\partial G_t \subset\subset U$,

(ii) dla każdego $t \in T$ istnieje funkcja definiująca G_t, $r_t \in C^2(U)$, dla której forma Levy'ego jest dodatnio określona na $U \times (\mathbf{C}^n \setminus \{0\})$,

(iii) odwzorowanie $T \ni t \mapsto r_t \in C^2(U)$ jest jednostajnie ciągłe.

Sytuacja 4.17. (bez założenia pseudowypukłości): $\{G_t\}_{t\in T}$ jest rodziną obszarów ograniczonych z brzegami klasy C^2, $k \geq 2$, $(T, d(\cdot))$ jest zwartą przestrzenią metryczną, $U \subset\subset \mathbf{C}^n$ jest obszarem takim, że

(i) $\cup_{t\in T}\partial G_t \subset\subset U$,

(ii) dla każdego $t \in T$ istnieje funkcja definiująca G_t, $r_t \in C^2(U)$ taka, że odwzorowanie $T \ni t \mapsto r_t \in C^2(U)$ jest jednostajnie ciągłe.

Głównym wynikiem pracy **[A1]** jest następujące twierdzenie, które w wersji skróconej można sformułować następująco.

Twierdzenie 4.18._([A1], sformułowanie uproszczone) W sytuacji 4.15, istnieją (nad)obszary $\hat{G}_t \supset G_t$, oraz funkcje $f_{t,\xi} \in \mathcal{O}(\hat{G}_t)$, gdzie $\xi \in \partial G_t$ takie, że_

_(i) $f_{t,\xi}(\cdot)$ jest funkcją szczytową dla G_t w punkcie ξ,_

(ii) i (iii) $f_{t,\xi}(\cdot)$ spełniają pewne jednostajne oszacowania.

Ponadto (nad)obszary $\hat{G}_t$, oraz funkcje $f_{t,\xi}(\cdot)$ można wybrać tak, że fukcja $(t, \xi, z) \mapsto f_{t,\xi}(z)$ jest ciągła względem swoich parametrów.

W pracy częściowo rozwiązany został Problem (B) dla $k = 2$, wraz z niezależnymi od t jednostajnymi oszacowaniami (i) i (ii), pominiętymi w opisie. Metody bazują na rozwinięciach Taylorowskich drugiego rzędu dla funkcji definiującej obszar pseudowypukły, wykorzystane są oszacowania dla występujących tam wielomianów Levy'ego, pewne klasyczne metody konstrukcji i oszacowań, lecz także wykorzystana jest bardzo ciekawa metoda, odwołująca się do rozwiązania $\bar{\partial}$ problemu z parametrem $t \in T$: $\bar{\partial}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \bar{\partial}v_t$, gdzie α jest 1-formą, w klasie form o gładkich współczynnikach, z analizą zateżności od t.

Konstrukcje są trudne od strony technicznej i pomysłowe.

W pracy **[A3]** rozwiązany został Problem (B) dla dowolnego $k \geq 2$. Pełną odpowiedź dostarcza wykazane tam Twierdzenie 1.2, które wykorzystaje udoskonalone metody z pracy [A1] z bardziej subtelnymi metodami. W szczególności, w dowodzie ogólnej C^{k-2} gładkości funkcji szczytowych wykorzystany został inny operator rozwiązujący problem $\bar{\partial}$, znaleziony w roku 2018 przez X. Gonga i K. T. Kima.

Zauważyłam pewne niejasności w autoreferacie. Twierdzenie 4.18 w autoreferacie to Twierdzenie 1.3 z pracy [A1], natomiast Twierdzenie 4.20 to Twierdzenie 1.2 z pracy [A3].

Sformułowania obu twierdzeń odnoszą się bezpośrednio do Sytuacji 4.15, gdzie mamy do czynienia z obszarami ściśle pseudowypukłymi a ich brzegi są klasy tylko C^2. Nie zauważyłam w oryginalnych pracach ani autoreferacie przy opisie prac [A1] i [A3] odniesień do Sytuacji 4.17. Ponadto w Problemie 4.5 zakłada się, że brzeg G_t jest klasy C^k a nie C^2, jak w Sytuacji 4.17. Rozumiem, że chodziło o zauważenie, że faktycznie dowody wymagają jedynie Sytuacji 4.17, lecz i tutaj wymagane jest moim zdaniem silniejsze założenie regularności brzegów. Z sytuacją 4.17 spotykamy się natomiast w później opisanym Stwierdzeniu 4.27 (nazwanym "Propozycją") w dalszej części autoreferatu.

W pracy [A4] przedstawione zostały zastosowania wyników z pracy [A1]. Jest to Twierdzenie 1.7 w pracy, które orzeka, że przy założeniach jak w Sytuacji 4.15, mając dane $(\xi_t, w_t) \in \partial G_t \times B(\xi_t, \rho)$, $\rho < R$ dla dosatecznie małego R, i dla dowolnej funkcji holomorficznej f_t określonej na $G_t \cap B(\xi_t, R)$ istnieją funkcje $\tilde{f}_t$ - holomorficzmne na całym G_t, pokrywające się z funkcją f_t w punkcie w_t wraz z pochodnymi do rzędu 1, "dowolnie blisko f_t" (zależnie od doboru R), oraz z dobrymi oszacowaniami norm supremum. Twierdzenie to ma także wariant dla skończenie wielu punktów w_t, co jest wersją Twierdzenia Grahama - Kerzmana z 1975 roku.

Okazuje się, że zamiast zgodności funkcji i pochodnych dla skończenie wielu punktów $w_t \in G_t \cap B(\xi_t, \rho)$ można dopuścić zgodność we wszystkich punktach $G_t \cap B(\xi_t, \rho)$, jednak normy supremum trzeba zastąpić przez L^2 normy na odpoweidnich obiektach. Zostało to wykazane w Twierdzeniu 1.4 w pracy [A2]. W przypadku gdy T jest zbiorem jednopunktowym, jest to twierdzenie K. Diedericha z 1970 roku. Twierdzenie 1.3 z pracy [A1] oraz Twierdzenie 1.7 z pracy [A4] można zastosować do dowodu stabilności własności lokalizacji dla pseudometryk Caratheodory'ego - Reiffena, oraz Kobayashiego - Roydena, co zostało wykazane w pracy [A4]. Wyniki wzmacniają także pewne jednostajne oszacowania dla pseudometryki Kobayasihiego z pracy F. Fostneriča i J. P. Rosay'a z 1987 roku.

Ponadto w pracy [A2] wyniki zostały zastosowane do rezultatów o stabiloności własności lokalizacji dla metryki Bergmana. Jak wynika z prac K. Diedericha z lat 70-tych ubiegłego stulecia, wyniki mogą znaleźć dalsze zastosowania dla badania stabilności zachowania pochodnych jądra Bergmana przy brzegu, przy deformacji obszarów pseudowypukłych.

3 Ocena pozostałego dorobku Habilitanta

Pozostałe osiągnięcia habilitanta dotyczą następujących zagadnień:

- transformacji obszarów pseudowypukłych (praca [O7] w autoreferacie, jest to rozwinięcie idei z pracy [A6]);
- możliowść aproksymacji funkcji ciągłych na zbiorze E i holomorficznych we wnętrzu E przez funkcje całkowite (praca [O6] w autoreferacie),
- analiza ciągłości systemów holomorficznie kontraktywnych względem ciągów obszarów zbieżnych w metryce Hausdorffa (praca [O5] w autoreferacie),

- badania nad zagadnieniem rozszerzenia funkcji holomorficznych na pewnych obiektach typu "krzyż" (praca [04] z tematyki doktoratu, nie włączona do rozprawy doktorskiej). Wyniki unifikują i uogólniają wcześniejsze wyniki autorów: O. Alebyane'a i A. Zehiari, M. Jarnickiego i P. Pfuga, oraz J. Siciaka. Prowadzone badania zdają się być bardzo perspektywiczne, ze względu na nowatorskość problematyki podjętej w doktoracie.

Jest to problematyka bardzo ciekawa i głęboka, a wyniki uważam za interesujące.
Co jednak zwraca uwagę, to brak współpracy na poziomie pisania artykułów w dorobku pobocznym, co nie powinno mieć miejsca.

4 Pozostałe informacje

Większość prac wchodzących w skład rozprawy powstała w ramach realizacji grantu NCN Sonata, którego kierownikiem był habilitant.

Nie mam zastrzeżeń do aktywności naukowej, popularyzatorskiej i organizacyjnej w środowisku matematycznym oraz do aktywności dydaktycznej habilitanta. Pan dr. Lewandowski uczestniczył w grantach, jest aktywny na konferencjach, odbył wiele wizyt naukowych i staży w znanych zagranicznych ośrodkach.

5 Konkluzja

Biorąc pod uwagę cenne osiągnięcia naukowe uzyskane w rozprawie habilitacyjnej, oraz te uzyskane poza rozprawą uważam, że pan doktor Arkadiusz Lewandowski w pełni spełnia wymagania stawiane w ustawie o stopniach i tytułach naukowych.

Dlatego z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie doktora Arkadiusza Lewandowskiego do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Z wyrazami szacunku,

A. Kałamajska

Agnieszka Kałamajska