

Autoreferat

PRZYCZYNOWOŚĆ W TEORII KWANTOWEJ I JEJ UOGÓLNIENIACH

MICHAŁ ECKSTEIN



Instytut Fizyki Teoretycznej
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński

Kraków, 23 lutego 2023

*Dotyczy osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r.
"Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z póź. zm.).*

Spis treści

1	Dane osobowe	3
2	Dyplomy i stopnie naukowe	3
3	Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych	3
3.1	Zatrudnienie etatowe	3
3.2	Umowy cywilno–prawne	3
4	Opis głównego osiągnięcia naukowego	4
4.1	Wstęp	5
4.1.1	Pojęcie przyczynowości we współczesnych teoriach fizycznych	5
4.1.2	Kwantowa czasoprzestrzeń i kwantowa grawitacja	6
4.1.3	Zasada „no-signallingu” i uogólnienia teorii kwantowej	8
4.1.4	Przegląd wkładu habilitanta w zagadnienie przyczynowości	9
4.2	Struktura przyczynowa w kwantowych czasoprzestrzeniach [H1–H5]	10
4.2.1	Przyczynowość w przestrzeni stanów [H1]	12
4.2.2	Przyczynowość w czasoprzestrzeniach prawie przemiennej [H2]	15
4.2.3	Czasoprzestrzeń dwupłatowa [H3]	20
4.2.4	Geometria nieprzemieniana a Zitterbewegung [H4]	23
4.2.5	Kwantowe czasoprzestrzenie – operacyjny punkt widzenia [H5]	27
4.3	Relatywistyczna przyczynowość w teoriach probabilistycznych [H6–H9]	29
4.3.1	Struktura przyczynowa dla miar probabilistycznych [H6]	30
4.3.2	Przyczynowa ewolucja pakietów falowych [H7]	34
4.3.3	Operacyjna przyczynowość w relatywistycznej czasoprzestrzeni [H8]	41
4.3.4	Wielocząstkowa struktura przyczynowa [H9]	48
5	Inne osiągnięcia naukowe	54
5.1	Inne publikacje naukowe	54
5.2	Skrótowy opis pozostałych tematów badawczych	56
5.2.1	Ścisłe rozwiązania równań Einsteina opisujące podwójne czarne dziury [O2–O4]	56
5.2.2	Ślady operatorów ciepła, działanie spektralne i wymiar spektralny [O1, O7, O8, O10]	57
5.2.3	C^* -algebry, K -teoria i grupoidy [O5, O6]	58
5.2.4	Krzywizna przestrzeni nieprzemiennej [O9]	58
5.2.5	Kwantowe czarne dziury [O11, O13, O16]	58
5.2.6	Testy mechaniki kwantowej w fizyce cząstek [O14, O23]	59
5.2.7	Kwantowy optymalny transport [O15, O20, O22]	59
5.2.8	Filozoficzne podstawy fizyki [O12, O21]	60

5.3	Współpraca międzynarodowa	60
5.3.1	Lista współpracowników naukowych	60
5.3.2	Prezentacje na konferencjach naukowych i seminariach	62
6	Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne oraz popularyzujące naukę	64
6.1	Osiągnięcia promotorskie i dydaktyczne	64
6.2	Popularyzacja nauki	64
6.2.1	Artykuły popularnonaukowe	64
6.2.2	Wykłady popularnonaukowe	65
6.2.3	Audycje radiowe i podcasty	66
6.2.4	Inna działalność popularyzatorska	66
7	Wybrane nagrody i wyróżnienia	67

1 Dane osobowe

Imię i nazwisko: Michał Jerzy Eckstein
Data i miejsce urodzenia: 23 sierpnia 1986, Kraków, Polska
Adres e-mail: michal.eckstein@uj.edu.pl; michal@eckstein.pl

2 Dyplomy i stopnie naukowe

- 9.2014 – doktorat z matematyki, rozprawa: „Spectral action — beyond the almost commutative geometry”, promotor: Andrzej Sitarz, dyplom z wyróżnieniem, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński.
- 6.2010 – magisterium z fizyki teoretycznej, rozprawa: „Anomalies in noncommutative geometry”, promotor: Andrzej Sitarz, dyplom z wyróżnieniem, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński.

3 Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych

3.1 Zatrudnienie etatowe

- 10.2020 – teraz, asystent badawczy w Zakładzie Optyki Atomowej, Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński.
- 10.2017 – 09.2020, adiunkt badawczy w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Gdański.
- 10.2014 – 09.2017, asystent badawczy w Zakładzie Teorii Pola, Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński.

3.2 Umowy cywilno–prawne

- 9.2022 – teraz, umowa o dzieło w ramach projektu Maestro “Przyczynowość relatywistyczna a przetwarzanie informacji” (Maestro NCN UMO-2021/42/A/ST2/0035, kierownik: Paweł Horodecki), Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych, Uniwersytet Gdański.
- 3.2017 – 1.2018, umowa o dzieło w ramach projektu “Quantum phenomena: Between the whole and the parts” (John Templeton Foundation grant ID 56033, kierownicy: Michał Horodecki i Paweł Horodecki), Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska.

4 Opis głównego osiągnięcia naukowego

Moim głównym osiągnięciem, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy, jest cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych poświęcony problemowi przyczynowości relatywistycznej w teorii kwantowej oraz pewnej klasie jej uogólnień.

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych

- [H1] Nicolas Franco and Michał Eckstein. [An algebraic formulation of causality for noncommutative geometry](#). *Classical and Quantum Gravity*, **30**(13):135007, 2013.
- [H2] Nicolas Franco and Michał Eckstein. [Exploring the causal structures of almost commutative geometries](#). *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **10**:010, 2014. Special Issue on Noncommutative Geometry and Quantum Groups in honor of Marc A. Rieffel.
- [H3] Nicolas Franco and Michał Eckstein. [Causality in noncommutative two-sheeted spacetimes](#). *Journal of Geometry and Physics*, **96**:42–58, 2015.
- [H4] Michał Eckstein, Nicolas Franco, and Tomasz Miller. [Noncommutative geometry of Zitterbewegung](#). *Physical Review D*, **95**:061701(R), 2017.
- [H5] Michał Eckstein. [The Geometry of Noncommutative Spacetimes](#). *Universe*, **3**(1):25, 2017.
- [H6] Michał Eckstein and Tomasz Miller. [Causality for nonlocal phenomena](#). *Annales Henri Poincaré*, **18**:3049–3096, 2017.
- [H7] Michał Eckstein and Tomasz Miller. [Causal evolution of wave packets](#). *Physical Review A*, **95**:032106, 2017.
- [H8] Michał Eckstein, Paweł Horodecki, Tomasz Miller, and Ryszard Horodecki. [Operational causality in spacetime](#). *Physical Review A*, **101**:042128, 2020.
- [H9] Tomasz Miller, Michał Eckstein, Paweł Horodecki, and Ryszard Horodecki. [Generally covariant \$N\$ -particle dynamics](#). *Journal of Geometry and Physics*, **160**:103990, 2021.

4.1 Wstęp

4.1.1 Pojęcie przyczynowości we współczesnych teoriach fizycznych

Pojęcie *przyczynowości* odgrywa centralną rolę w dyskursie naukowym. Poszukiwanie efektywnych przyczyn postrzeganych zjawisk, będące pierwotnie celem filozofii przyrody, stało się stopniowo domeną fizyki. Aż do XX wieku panowało przekonanie, że nie istnieją żadne fundamentalne ograniczenia dla naszego dążenia do rozwikływania przyczynowych łańcuchów zdarzeń.

Pierwsza rewolucja została wywołana przez teorię względności Einsteina i następujące liczne dowody empiryczne, że skończona prędkość światła w próżni jest w istocie prędkością graniczną, z którą mogą rozprzestrzeniać się wszystkie fizyczne sygnały. Ogólna teoria względności postuluje, iż Wszechświat ma strukturę gładkiej rozmaitości z metryką lorentzowską. Ta ostatnia indukuje strukturę przyczynową, czyli pewną relację binarną, na zbiorze zdarzeń – czyli punktów rozmaitości Wszechświata. Lokalnie, relacja przyczynowa jest porządkiem częściowym, ale globalnie jest tak wtedy i tylko wtedy gdy Wszechświat nie zawiera zamkniętych krzywych przyczynowych. Badania relatywistycznej struktury przyczynowej dały początek „lorentzowskiej teorii przyczynowości” [181]. Jedną z jej najbardziej frapujących konsekwencji jest generyczne istnienie nieprzedłużalnych (w przeszłość lub w przyszłość) krzywych przyczynowych [132, 196]. Implikuje to przerwanie przyczynowego łańcucha zdarzeń w osobliwościach czasoprzestrzennych, co stanowi jedną z głównych zagadek fizyki teoretycznej.

Drugim przewrotem w fizyce XX wieku było odkrycie teorii kwantów, która poddała w wątpliwość głęboko zakorzenioną deterministyczną wizję nauki. Istnienie zmiennych komplementarnych, takich jak położenie i pęd cząstki, implikuje fundamentalne zasady nieoznaczoności. Wyznaczają one nieprzekraczalne granice dokładności pewnych pomiarów, a tym samym ograniczają *a priori* naszą wiedzę o układach fizycznych. W odróżnieniu od teorii klasycznej, mechanika kwantowa implikuje, że własności cząstek nie istnieją w sposób niezależny od aktu pomiaru. Klasyczne zdarzenie powstaje dopiero na skutek interakcji cząstki z urządzeniem pomiarowym [128]. Ponadto, wyniki pomiaru układu kwantowego są „ontycznie” losowe – to znaczy, że nie ma we Wszechświecie żadnych zdarzeń, które mogłyby je spowodować. Kwantowa losowość wydaje się podważać same podstawy fizyki, gdyż oznacza ona, że teoria kwantowa nie jest w stanie przewidzieć zdarzeń z pewnością [97]. Z drugiej strony, kwantowa losowość może być wykorzystywana do zadań związanych z przetwarzaniem informacji [21], w szczególności do kryptografii [120].

Pojęcia przyczynowości stosowane w kontekście (ogólnej) teorii względności i mechaniki kwantowej są zupełnie różne. Pierwsze z nich opiera się na fakcie, że pewne zdarzenia nie mogły wpłynąć na inne zdarzenia, podczas gdy drugie odnosi się do fundamentalnego braku przyczyny efektywnej wyników poszczególnych pomiarów. Również struktury matematyczne stojące za tymi dwoma pojęciami są bardzo odmienne: geometria lorentzowska z jednej strony i algebry operatorów z drugiej.

Ta dychotomia stała się przyczyną poważnych kontrowersji, zapoczątkowanych przez słynną debatę Bohra z Einsteinem [38, 97]. Nielokalność i kolaps funkcji falowej w złożonych układach kwantowych wydawały się kolidować z relatywistyczną zasadą lokalności i postulatem braku natychmiastowego „działania na odległość”. Paradoks EPR został rozwiązany dzięki zrozumieniu, że choć zjawiska kwantowe są rzeczywiście nielocalne, to ta własność nie pozwala na żadną nadświatłą komunikację. Jest to w istocie bezpośrednia konsekwencja liniowości formalizmu kwantowego [86, 255].

W międzyczasie teoria kwantowa została zunifikowana ze szczególną teorią względności w ramach kwantowej teorii pola. Ta ostatnia okazała się niezwykle dokładnym opisem zjawisk przyrodniczych, dającym formalne podstawy dla Modelu Standardowego cząstek elementarnych. W ramach kwantowej teorii pola ograniczenia nałożone przez relatywistyczną przyczynowość są realizowane przez wymaganie aby obserwabla związane z przestrzennie rozdzielonymi regionami czasoprzestrzeni komutowały [128, 253].

Pomimo ogromnego sukcesu kwantowej teorii pola w modelowaniu zjawisk przyrodniczych, jej matematyczne podstawy nadal są źródłem problemów. Jej moc predykcyjna opiera się na rozwinięciach perturbacyjnych, uzupełnionych przez wyrafinowane schematy renormalizacji. Jednak szczegóły teorii nieperturbacyjnej są w dużej mierze nieznane i nie jest nawet jasne, czy taka teoria może zostać skonstruowana. W istocie, nie znamy obecnie żadnej nietrywialnej oddziałującej kwantowej teorii pola w 3+1 wymiarach czasoprzestrzennych, która spełniałaby jakikolwiek standardowy zestaw aksjomatów [149].

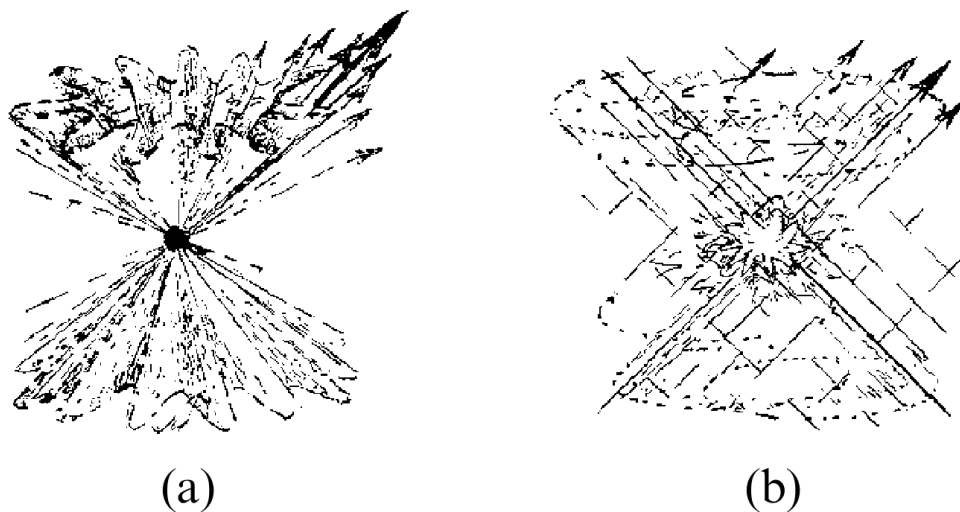
Niezgodność pomiędzy relatywistycznymi i kwantowymi postulatami implikuje, że nasze obecne rozumienie przyczynowości oparte na klasycznej strukturze relatywistycznej musi zostać zmodyfikowane, zarówno od strony formalnej, jak i pojęciowej. Taka modyfikacja może pochodzić albo z „kwantyzacji” klasycznej czasoprzestrzeni i/lub grawitacji, albo z modyfikacji podstawowych zasad samej mechaniki kwantowej lub, co wydaje się całkiem prawdopodobne, jakiejś kombinacji obu tych podejść. Naruszenie klasycznej einsteinowskiej przyczynowości prowadzi do paradoksów logicznych, a tym samym ujawnia wewnętrzną niespójność przyjętego modelu teoretycznego. W konsekwencji, opracowanie nowej ścisłej struktury przyczynowej może stanowić istotny drogowskaz na drodze do spójnej teorii unifikującej fizykę kwantową i grawitacyjną.

4.1.2 Kwantowa czasoprzestrzeń i kwantowa grawitacja

Koncepcja skwantowanej czasoprzestrzeni była rozważana już przez W. Heisenberga (zob. [3]), jako możliwy sposób na zapewnienie naturalnej regularyzacji dla kwantowej elektrodynamiki. Pierwszy konkretny model, oparty na nieprzemiennej algebrze „współrzędnych” czasoprzestrzennych, został skonstruowany przez H. Snydera w 1947 roku [224]. Takie podejście można umotywować poprzez rozważenie fizycznego procesu pomiaru na bardzo krótkich skalach odległości [143]. Po stronie matematycznej prowadzi to do modeli opartych na *geometrii przemiennej* [68, 164] i *grupach kwantowych* [93, 165, 256].

Problem kwantowania czasoprzestrzeni jest ściśle związany, choć nie równoważny, z zagadnieniem kwantowania pola grawitacyjnego. Obecnie istnieje cała gama podejść do kwantowej grawitacji (zob. np. [172, 191]), które zapoczątkowały postęp w wielu dziedzinach matematyki, w szczególności w geometrii różniczkowej, teorii węzłów, teorii grup i algebrach operatorowych. Po stronie empirycznej, nowa dziedzina fenomenologii kwantowej grawitacji [6] daje nadzieję na sprawdzenie czy któryś spośród schematów kwantowania grawitacji jest poprawny. Na dzień dzisiejszy, niektóre z modeli oparte na zmodyfikowanych relacjach dyspersyjnych [7] i ziarnistości czasoprzestrzeni zostały sfalsyfikowane na podstawie wyników obserwacji astrofizycznych [1, 204, 235]. Nie jest jednak jasne, które ze znanych podejść do kwantowej grawitacji (o ile którekolwiek) okaże się poprawnym opisem zjawisk w skali Plancka.

Oczywiście, kwantyzacja czasoprzestrzeni i/lub pola grawitacyjnego wymusza modyfikację standardowej relatywistycznej struktury przyczynowej. Przeważa pogląd, iż kwantyzacja pola metrycznego lub samej czasoprzestrzeni powoduje „rozmycie” struktury przyczynowej (por. np. [43, 129]) — zob. Rys. 1 (a). Stwarza to głębokie problemy koncepcyjne dla standardowej kwantowej teorii pola, w szczególności w kontekście aksjomatu „mikroprzyczynowości” (zob. np. [11, 123, 225]). Zupełnie inny obraz wyłania się ze (skwantowanej) teorii twistorów [199, 201], w której struktura przyczynowa jest sztywna, ale samo pojęcie zdarzenia czasoprzestrzennego staje się nieostre - zob. Rys. 1(b).



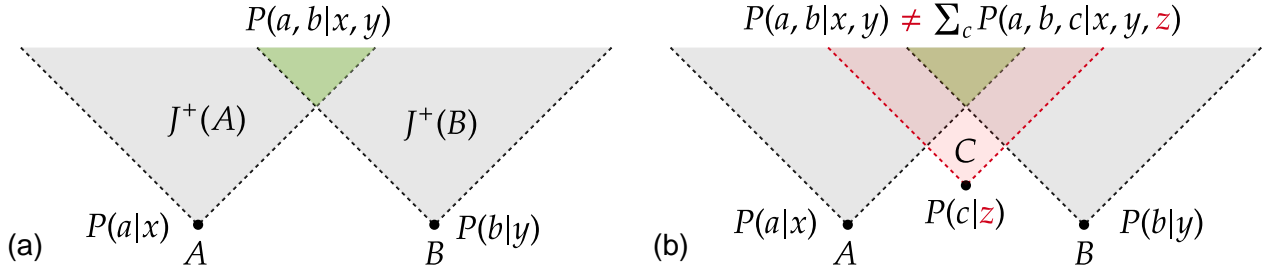
Rysunek 1: (R. Penrose [199, Rys. 33.7]) Dwie wizje struktury przyczynowej w hipotetycznej kwantowej teorii grawitacji: (a) Przeważający punkt widzenia na skwantowaną czasoprzestrzeń głosi, że metryka czasoprzestrzeni, a więc i struktura przyczynowa, staje się rozmyta w konsekwencji pewnej fundamentalnej czasoprzestrzennej relacji nieoznaczoności. (b) Alternatywna perspektywa mówi, iż hipotetyczne nieoznaczoności kwantowej grawitacji wpłynęłyby na samo pojęcie zdarzenia, przy jednoczesnym zachowaniu jakiejś struktury stożka przyczynowego.

4.1.3 Zasada „no-signallingu” i uogólnienia teorii kwantowej

Większość teorii kwantowej grawitacji zakłada — jak sama nazwa wskazuje — że podstawowe zasady mechaniki kwantowej są uniwersalnie prawdziwe, podczas gdy struktura relatywistycznej czasoprzestrzeni wymaga modyfikacji. Można, zamiast tego, zachować klasyczny relatywistyczny model czasoprzestrzeni i zrezygnować z niektórych podstawowych zasad kwantowych. W tym kontekście rozważa się modele *kolapsu funkcji falowej* [15], mające na celu wyjaśnienie przejścia między kwantowym mikroświatem a klasycznym makroświatem. Modele takie zwykle wiążą się z nieliniową modyfikacją równania Schrödingera, która wywołuje spontaniczny kolaps funkcji falowej obiektów mezoskopowych. Jednakże N. Gisin udowodnił [119], że deterministyczna nieliniowa kwantowa dynamika umożliwiałaby nadświetlny przesył informacji poprzez pomiary projektywne. Problem ten można obejść wprowadzając element stochastyczny, który zapobiega łamaniu przyczynowości [14], lub też poprzez modyfikację statycznej struktury teorii kwantów [78, 219].

Niemożność nadświetlnej komunikacji, wymuszona przez relatywistyczną strukturę przyczynową, znana jest również jako *zasada no-signallingu*. Wzięła ona swój początek w słynnym *teście Bella* [44], w którym dwie oddzielone od siebie w przestrzeni strony dokonują lokalnego pomiaru na dwóch skorelowanych systemach fizycznych — zob. Rys. 2(a). Uzyskane prawdopodobieństwa par wyników, warunkowane parami ustawień pomiarów, pozwalają określić siłę korelacji. Słynna nierówność Bella–CHSH [18, 63] podaje ograniczenie, $S \leq 2$, na pewną miarę korelacji, osiągalną w każdym lokalnym realistycznym (tj. „klasycznym”) modelu. Z drugiej strony, mechanika kwantowa pozwala na uzyskanie $S \leq 2\sqrt{2}$ poprzez wykorzystanie stanów splątanych [18, 62]. Wartość ta znajduje się jednak poniżej algebraicznego maksimum dla wielkości S , które jest równe 4.

W 1994 roku S. Popescu i D. Rohrlich pokazali [207], że istnieje teoria (tzw. *PR-boxy* lub *boxy no-signallingowe*), w której granica $S = 4$ jest osiągalna, a mimo to zasada no-signallingu jest nadal spełniona. W ogólniejszym przypadku, obejmującym wiele stron i większą liczbę możliwych ustawień i wyników pomiarów, istnieje całe multum teorii probabilistycznych zgodnych z zasadą no-signallingu, a jednocześnie dopuszczających korelacje silniejsze niż kwantowe — zob. np. [2, 141, 185, 186]. W jednej z ostatnich prac P. Horodecki i R. Ramanathan pokazali [141], iż standardowe trójstronne ograniczenia typu „no-signalling” są wystarczające, ale nie konieczne, dla zapewnienia niemożności operacyjnego nadświetlnego transferu informacji. W ogólności, korelacje pomiędzy dwoma odległymi od siebie stronami mogą zmieniać się nielokalnie, ale lokalne statystyki detekcji każdej ze stron muszą być zachowane. Horodecki i Ramanathan udowodnili, że istnieją czasoprzestrzenne konfiguracje trzech stron, w których Charlie może wpływać nielokalnie na korelacje pomiędzy wynikami pomiarów Alicji i Boba (zob. Rys. 2(b)), a mimo to relatywistyczna struktura przyczynowa pomiędzy wszystkimi zdarzeniami związanymi z pomiarami jest zachowana.



Rysunek 2: Diagramy czasoprzestrzenne dla eksperymentów typu Bella. **(a)** Dwie przestrzennie-rozdzielone strony, Alicja (A) i Bob (B) dokonują pomiarów na dwóch skorelowanych cząstkach, wybierając ustawienia detektorów i uzyskując wyniki (x, a) oraz (y, b) , odpowiednio. Zasada no-signallingu mówi, że lokalna statystyka detekcji Alicji nie może zależeć od ustawień Boba i odwrotnie. Łączna statystyka detekcji, dostępna w przecięciu stożków przyszłości Alicji i Boba, $J^+(A) \cap J^+(B)$, ujawnia korelacje pomiędzy mierzonymi cząstkami. **(b)** W ogólniejszym scenariuszu z pracy [141] (por. także [127]) trzecia strona, Charlie (C), oddzielona przestrzennie zarówno od Alicji jak i od Boba, może wpływać nielokalnie — poprzez wybór swoich ustawień pomiarowych — na korelacje pomiędzy cząstkami Alicji i Boba, ale nie na ich lokalne statystyki detekcji. Zasada no-signallingu nie jest łamana, ponieważ obszar czasoprzestrzeni, w którym Alicja i Bob mogą porównać wspólną statystykę zawiera się w stożku przyszłości interwencji Charliego, $J^+(A) \cap J^+(B) \subset J^+(C)$.

4.1.4 Przegląd wkładu habilitanta w zagadnienie przyczynowości

Głównym celem cyklu artykułów naukowych wymienionych w Sekcji 4 było zbadanie, przy użyciu nowatorskich ścisłych koncepcji matematycznych, możliwych struktur przyczynowych poza sztywnym paradygmatem relatywistycznym oraz kwantowym. Badania te należą do szeroko pojętej dziedziny fizyki matematycznej.

Moim pierwszym kluczowym wynikiem w dziedzinie przyczynowości, ustanowionym we współpracy z Nicolasem Franco w [H1], był dowód, że kwantowe przestrzenie — modelowane przez przestrzenie stanów czystych nieprzemiennej C^* -algebr — można wyposażyć w relację porządku przyczynowego indukowaną przez strukturę trójek spektralnych Connesa [68]. Zapewnia to ścisłą implementację pojęcia przyczynowości opisanego na Rys. 1(b). W kolejnych dwóch artykułach [H2, H3] obliczyliśmy explicite strukturę przyczynową dla dwóch „prawie przemiennej” czasoprzestrzeni, które pojawiają się naturalnie w zastosowaniach geometrii nieprzemiennej w fizyce cząstek [242] i kosmologii [166]. W [H4] pokazaliśmy, że prawie przemienne geometria dwupłatowej czasoprzestrzeni [H3] rzuca nowe światło na zjawisko *Zitterbewegung* dla masywnych fermionów Diraca, umacniając jego geometryczną interpretację [42, 66, 198] w duchu oscylacji chiralnych [32]. Jak wyjaśniono w pracy [H4], warunki przyczynowości uzyskane w [H3] mogą być postrzegane jako „kwantowe ograniczenie prędkości” (por. [96]) i testowane w symulatorach kwantowych. Co więcej, zaproponowana „nieprzemienne-geometryczna” struk-

tura przyczynowa sugeruje nową zasadę konstruowania kwantowych teorii pól cechowania [H5].

Nasze wyniki są powszechnie uznawane za cenny wkład do lorentzowskiej geometrii nieprzemiennej (zob. m.in. [25, 26, 34, 36, 79, 81, 84, 85, 168, 169, 227, 238, 245]). Struktura przyczynowa wprowadzona w [H1] była badana dla płaszczyzn Moyala [51, 107] oraz kwantowej czasoprzestrzeni κ -Minkowskiego [108]. Wyniki dotyczące dwupłatowej czasoprzestrzeni [H3], wraz z ich fizycznym zastosowaniem [H4], zainspirowały badania nad relacjami dyspersji [251] oraz zastosowaniami semiriemannowskiej geometrii nieprzemiennej w fizyce cząstek [33]. Ponadto, praca [H1] stanowiła ważny krok na drodze do algebraicznej charakteryzacji odległości lorentzowskiej, która pojawiła się jako hipoteza w pracy G.N. Parfionowa i R.R. Zapatrina z 2000 roku [192] i została ostatecznie udowodniona w 2018 roku przez E. Minguzziego [179, 180]. Ponadto, praca [H1] wywarła wpływ na prace z zakresu ogólnej teorii przyczynowości [47, 181].

Ogólne pojęcie struktury przyczynowej zaproponowane w pracy [H1] może być również zastosowane dla stanów mieszanych na algebrze funkcji na rozmaitości czasoprzestrzennej, które odpowiadają borelowskim miarom probabilistycznym na klasycznej czasoprzestrzeni. To zagadnienie naukowe stało się tematem pracy doktorskiej Tomasza Millera z dziedziny matematyki, w której pełniłem rolę promotora pomocniczego. Razem stworzyliśmy matematyczne podstawy teorii przyczynowości dla miar probabilistycznych [H6], odkrywając głębokie związki pomiędzy geometrią czasoprzestrzenną a teorią optymalnego transportu. Zastosowaliśmy opracowaną teorię do badania przyczynowości w mechanice falowej [H7] rzucając nowe światło na twierdzenie Hegerfeldta [133, 134]. Następnie, we współpracy z Pawłem i Ryszardem Horodeckimi, zaproponowaliśmy [H8], bazując na formalizmie miarowym z pracy [H6], system aksjomatów realizujących zasadę „dynamicznego no-signallingu”. Ma ona zastosowanie nie tylko do przypadku mechaniki kwantowej, ale stanowi narzędzie do sprawdzania zgodności relatywistycznej struktury przyczynowej z dowolną — wykraczającą poza kwanty — teorią probabilistyczną. Ponadto, w pracy [H9] przedstawiliśmy rozszerzenie formalizmu z prac [H6] oraz [173] obejmujące miary „wielocząstkowe” i zastosowaliśmy je m.in. do wykazania zgodności równania wielofotonowego [223] z przyczynowością relatywistyczną.

Nasze wyniki dotyczące struktury przyczynowej dla miar probabilistycznych wpłynęły na badania w dziedzinie nisko-regularnej geometrii czasoprzestrzeni [39–41, 48, 49, 153, 170, 183, 232]. W szczególności, pojęcie odległości Lorentza–Wassersteina wprowadzone w [H6] odgrywa kluczową rolę w badaniach równań Einsteina i twierdzeń o osobliwościach na syntetycznych przestrzeniach lorentzowskich [48, 49, 183]. Ponadto, zostało ono użyte przez R. McCanna do wykazania głębokiego związku pomiędzy silnym warunkiem energetycznym w ogólnej teorii względności a boltzmanowskim pojęciem entropii [170].

4.2 Struktura przyczynowa w kwantowych czasoprzestrzeniach [H1–H5]

Jedno z podejść do opisu kwantowej czasoprzestrzeni oparte jest na geometrii nieprzemiennej Alaina Connesa [68]. Jej podstawowymi obiektami są *trójki spektralne* $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ składające się z: gęstej $*$ -podalgebry \mathcal{A} pewnej C^* -algebry, przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , na której \mathcal{A} jest wiernie reprezentowana oraz samosprężonego operatora \mathcal{D} działającego na \mathcal{H} , związanych ze sobą

odpowiednimi aksjomatami. Archetypowy przykład trójki spektralnej [69] bazuje na zwartej rozmaitości riemannowskiej \mathcal{M} doposażonej we wiązkę spinorową \mathcal{S} , dla której $\mathcal{A} = C^\infty(\mathcal{M})$, $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ oraz $\mathcal{D} = \mathcal{D} - i\gamma^\mu \nabla_\mu^{\mathcal{S}}$. Stąd, trójki spektralne mogą być postrzegane jako daleko idące uogólnienie pojęcia rozmaitości różniczkowej.

Oryginalne sformułowanie Connesa było przeznaczone do modelowania zwartych przestrzeni o sygnaturze euklidesowej. Istnieje w literaturze szereg propozycji lorentzowskiej lub, ogólniej, *pseudoriemannowskiej trójki spektralnej* [27, 84, 105, 194, 230, 238, 239]. Wspólnym ich mianownikiem jest użycie przestrzeni Krejna [37], która jest przestrzenią wektorową \mathcal{K} wyposażoną w nieokreślony iloczyn skalarny [ang. indefinite inner product] (\cdot, \cdot) oraz (niejednoznaczny) rozkład $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ na ortogonalne przestrzenie Hilberta $(\mathcal{K}^+, (\cdot, \cdot))$ oraz $(\mathcal{K}^-, -(\cdot, \cdot))$. Z każdym takim rozkładem związany jest *operator fundamentalnej symetrii*, $\mathcal{J} := \text{id}_{\mathcal{K}^+} \oplus (-\text{id}_{\mathcal{K}^-})$, który zmienia \mathcal{K} w przestrzeń Hilberta $(\mathcal{K}, (\cdot, \mathcal{J}\cdot))$. Jest to naturalna struktura dla przestrzeni cięć wiązki spinorowej nad rozmaitościami pseudoriemannowskimi [16]. W szczególności, na n -wymiarowej spinowej rozmaitości lorentzowskiej (\mathcal{M}, g) przestrzeń $\Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ wyposażona jest w lorentzowsko niezmienniczy nieokreślony iloczyn skalarny

$$(\psi, \phi) := \int_{\mathcal{M}} \overline{\psi(x)} \phi(x) \sqrt{|g(x)|} d^n x, \quad \text{gdzie } \overline{\psi} = i\psi^\dagger \gamma^0. \quad (1)$$

Strukturę przestrzeni Hilberta otrzymujemy przez przyjęcie iloczynu dodatnio określonego

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int_{\mathcal{M}} \psi(x)^\dagger \phi(x) \sqrt{|g(x)|} d^n x. \quad (2)$$

Stąd widzimy, że $\mathcal{J} = i\gamma^0$, stosując konwencje $(-, +, +, \dots)$ dla sygnatury, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ oraz $(\gamma^0)^\dagger = -\gamma^0$, $(\gamma^k)^\dagger = \gamma^k$ dla $k \geq 1$. Ogólniej, operator fundamentalnej symetrii może być postrzegany jako uogólniony obrót Wicka [16, 26, 79, 230].

Dodatkowa komplikacja techniczna wynika z faktu, iż typowa czasoprzestrzeń jest tylko lokalnie zwarta. W istocie, znany jest fakt, że każda zwarta rozmaitość lorentzowska musi zawierać zamknięte krzywe przyczynowe [115]. Fakt ten wymusza użycie *nieunitalnych trójek spektralnych* [111, 209, 210].

Prace [H1–H5], jak również [O17, O18], wnoszą wkład w badanie pseudoriemannowskich trójek spektralnych z punktu widzenia przyczynowości. „Minimalistyczna” definicja lorentzowskiej trójki spektralnej, która pozwala na badanie struktur przyczynowych jest następująca:

Definicja 1 (zob. [O17]). Lorentzowska trójka spektralna $(\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{D})$ składa się z algebry z involucją \mathcal{A} , przestrzeni Krejna \mathcal{K} oraz operatora \mathcal{D} gęsto określonego na \mathcal{K} , takich że:

1. \mathcal{A} jest gęstą $*$ -podalgebrą pewnej C^* -algebry $\overline{\mathcal{A}}$.
2. Istnieje wierna reprezentacja elementów \mathcal{A} jako operatorów ograniczonych na \mathcal{K} .
3. Operator $i\mathcal{D}$ jest symetryczny względem nieokreślonego iloczynu skalarnego na \mathcal{K} .
4. Dla każdego $a \in \mathcal{A}$ operator $[\mathcal{D}, a]$ rozszerza się do operatora ograniczonego na \mathcal{K} .
5. Operator fundamentalnej symetrii, $\mathcal{J} := \text{id}_{\mathcal{K}^+} \oplus (-\text{id}_{\mathcal{K}^-})$, komutuje z elementami algebry \mathcal{A} i koduje sygnaturę lorentzowską.

Ostatni, cokolwiek nieściśły, warunek ma na celu rozróżnienie prawdziwego przypadku lorentzowskiego od bardziej ogólnego pseudoriemannowskiego. Konkretna propozycja takiego operatora \mathcal{J} została przedstawiona przez Franco w pracy [105], zob. również [H2, H3] oraz [O18], podczas gdy inne podejścia były również badane [27, 84, 194, 238, 239].

4.2.1 Przyczynowość w przestrzeni stanów [H1]

Podstawowy problem konceptualny dotyczący pojęcia przyczynowości w kontekście przestrzeni kwantowych jest związany z dziedziną relacji przyczynowej. Relatywistyczna struktura przyczynowa jest binarną relacją pomiędzy zdarzeniami, czyli punktami czasoprzestrzennej rozmaitości. W kwantowej czasoprzestrzeni nie ma jednak „punktów” [163, 220]. Z drugiej strony, podejście oparte na trójkach spektralnych oferuje pewne ich naturalne odpowiedniki indukowane przez strukturę C^* -algebraiczną. W istocie, dzięki dualności Gelfanda [112], dla każdej przemiennej C^* -algebry \mathcal{A} istnieje lokalnie zwarta przestrzeń Hausdorffa X taka, że $\mathcal{A} \simeq C_0(X)$ i istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy punktami X i stanami czystymi na algebrze \mathcal{A} . Fakt ten sugeruje, że można traktować przestrzeń stanów czystych, $P(\mathcal{A})$, nieprzemiennej C^* -algebry \mathcal{A} jako „punkty” *nieprzemiennej czasoprzestrzeni* — por. Definicja 10. Alternatywnie można wykorzystać przestrzenie ideałów maksymalnych lub reprezentacji nieprzywiedlnych \mathcal{A} , które są homeomorficzne z przestrzenią $P(\mathcal{A})$ dla algebr przemiennej [220]. Wybór stanów czystych jako nieprzemiennych odpowiedników punktów może być również uzasadniony operacyjnie — zob. Sekcja 4.2.5.

Centralnym wynikiem artykułu [H1] mojego współautorstwa jest wykazanie, że struktura lorentzowskiej trójki spektralnej $(\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{D})$ indukuje sztywną strukturę przyczynową na nieprzemiennej czasoprzestrzeni $P(\mathcal{A})$. Konstrukcja przebiega w następujący sposób:

Najpierw wzbogaciliśmy poprzednie definicje lorentzowskiej trójki spektralnej [105, 194, 230, 239, 244] poprzez rozważenie preferowanej unityzacji, \mathcal{A}_1 , pierwotnej nieunitalnej algebry \mathcal{A} . Jest to motywowane faktem, iż funkcja przyczynowa, tj. funkcja na czasoprzestrzeni \mathcal{M} nierosnąca wzdłuż każdej skierowanej w przyszłość krzywej przyczynowej [182, 184], może być stała, a funkcje stałe nie należą do nieunitalnej C^* -algebry $C_0(\mathcal{M})$ związanej z niezwartą rozmaitością \mathcal{M} . W konsekwencji trzeba rozważyć jakąś unityzację algebry $C_0(\mathcal{M})$, np. $C_b(\mathcal{M})$ — C^* -algebrę funkcji ograniczonych na \mathcal{M} , której spektrum stanowi kompaktifikacja Čecha–Stone’a $\beta\mathcal{M}$ (zob. [252]).

Następnie zdefiniowaliśmy pojęcie *stożka przyczynowego* [Def. 4 w H1], tj. stożka \mathcal{C} elementów \mathcal{A}_1 , spełniającego następujące dwa warunki:

$$\forall a \in \mathcal{C}, \phi \in \mathcal{K} \quad (\phi, [\mathcal{D}, a]\phi) \leq 0 \quad (3)$$

$$\text{oraz} \quad \overline{\text{span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})} = \overline{\mathcal{A}_1}, \quad (4)$$

gdzie symbol $\overline{\mathcal{A}}$ oznacza C^* -uzupełnienie algebry \mathcal{A} .

Ta definicja została zainspirowana pojęciami „causal cone” zaproponowanym przez V. Morettiego w pracy [184] oraz „isocone” autorstwa F. Besnarda [24]. Istotą naszej propozycji było powiązanie tego ostatniego, poprzez warunek (3), ze strukturą lorentzowskiej trójki spektralnej.

Stożek przyczynowy indukuje relację binarną na przestrzeni $S(\mathcal{A}_1)$ *wszystkich* (czystych oraz mieszanych) stanów na algebrze \mathcal{A}_1 , więc *a fortiori* na przestrzeni $P(\mathcal{A}_1)$.

Definicja 2 (zob. [Def. 5 w H1]). *Niech \mathcal{C} będzie stożkiem przyczynowym. Dla każdego dwóch stanów $\chi, \xi \in S(\mathcal{A}_1)$ definiujemy*

$$\chi \preceq \xi, \quad \text{gdy} \quad \forall a \in \mathcal{C} \quad \chi(a) \leq \xi(a). \quad (5)$$

Tak zdefiniowana relacja jest porządkiem częściowym [Prop. 6 w H1]. Własności zwrotności i przechodności są automatyczne, natomiast antysymetria wynika z warunku (4).

Główną motywacją do nazwania relacji \preceq *strukturą przyczynową*, a także głównym technicznym wynikiem artykułu [H1], jest następujące „twierdzenie o rekonstrukcji” [Thm. 7 w H1]:

Twierdzenie 3. *Niech $(\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{D})$ będzie przemienną lorentzowską trójką spektralną skonstruowaną z globalnie hiperbolicznej czasoprzestrzeni \mathcal{M} i niech \mathcal{A}_1 będzie odpowiednią unityzacją \mathcal{A} . Definiujemy*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}_1) := \{\chi \in P(\mathcal{A}_1) : \mathcal{A} \not\subset \ker \chi\} \subset S(\mathcal{A}_1). \quad (6)$$

Wtedy, $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1) = P(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M}$, a porządek częściowy \preceq na $S(\mathcal{A}_1)$ zawężony do $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$ odpowiada standardowej relacji przyczynowej na \mathcal{M} .

Dowód tego twierdzenia składa się z trzech części:

Najpierw [Prop. 8 w H1] pokazaliśmy, że punkty w $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1)$ są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości ze zdarzeniami z \mathcal{M} . Wynika to z twierdzenia Hahna–Banacha dającego równość $\mathcal{M}(\mathcal{A}_1) = P(\mathcal{A})$ oraz standardowej dualności Gelfanda dającej homeomorfizm $P(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M}$.

Następnie [Prop. 10 w H1] udowodniliśmy, że zbiór wszystkich gładkich funkcji przyczynowych na \mathcal{M} całkowicie określa strukturę przyczynową na \mathcal{M} . To jest topologiczna część dowodu, którą można uzyskać z ogólnych rozważań dot. „dualnej” charakteryzacji częściowych porządków na przestrzeniach topologicznych [24, 177, 178].

Wreszcie [Thm. 11 w H1] pokazaliśmy, iż funkcja $a \in \mathcal{A}_1$ jest przyczynowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek (3). Wynik ten stanowi pierwszą w pełni algebraiczną charakteryzację funkcji przyczynowych, którą można uogólnić na przestrzenie nieprzemienne (por. poprzednie próby [184]).

Definicja 2 indukuje naturalne pojęcia [Def. 12 w H1] *przyczynowej przyszłości i przeszłości* danego stanu $\chi \in S(\mathcal{A}_1)$,

$$J^+(\chi) = \{\xi \in S(\mathcal{A}_1) : \chi \preceq \xi\}, \quad J^-(\chi) = \{\xi \in S(\mathcal{A}_1) : \xi \preceq \chi\}, \quad (7)$$

wraz z *chronologiczną przyszłością i przeszłością*,

$$I^\pm(\chi) = S(\mathcal{A}_1) \setminus \overline{(S(\mathcal{A}_1) \setminus J^\pm(\chi))}, \quad (8)$$

gdzie \overline{X} oznacza słabe-* domknięcie X . Można pokazać [Prop. 14 w H1], że zbiory $J^\pm(\chi)$ są domknięte w słabej-* topologii $S(\mathcal{A}_1)$, tak jak ma to miejsce w przypadku standardowych

przyczynowych przyszłości/przeszłości, $J^\pm(p)$ dla $p \in \mathcal{M}$, w czasoprzestrzeniach przyczynowo prostych [*ang.* causally simple] (zob. [182]). Ponadto, porządek chronologiczny [Def. 16 w H1] dany wzorem (8) redukuje się do standardowej relacji chronologicznej w przypadku rozmaitości [Prop. 17 w H1].

Algebraiczny wzór na odległość lorentzowską Wprowadzone pojęcie przyczynowości w przestrzeni stanów, a w szczególności warunek (3), zainspirowała czysto algebraiczne sformułowanie odległości lorentzowskiej (por. ze standardową definicją czasoprzestrzenną, np. [17]).

W 1989 roku A. Connes pokazał [67], że odległość geodezyjna na (zwartej) spinowej rozmaitości riemannowskiej (\mathcal{M}, g) dopuszcza „dualną”, czysto algebraiczną, charakteryzację. Używając języka trójek spektralnych można ją wyrazić w postaci, która pozwala na jej zastosowanie również w przestrzeniach stanów nieprzemiennej C^* -algebry i jest znana pod nazwą *odległości Connesa* [*ang.* Connes’ distance formula] [68]:

$$d(\chi, \xi) = \sup_{a \in \mathcal{A}} \{ |\chi(a) - \xi(a)| : \|\mathcal{D}, a\| \leq 1 \}, \quad \text{dla każdego } \chi, \xi \in S(\mathcal{A}). \quad (9)$$

W 2000 roku G.N. Parfionow i R.R. Zapatrin wysunęli hipotezę [192] głoszącą, że wzór (9) może być uogólniony na przypadek lorentzowski. Jednak takie uogólnienie napotkało na dwie poważne przeszkody: Po pierwsze, potrzebne jest sformułowanie używające nieokreślonego iloczynu skalarnego zamiast standardowej normy operatorowej w wyrażeniu $\|\mathcal{D}, a\|$. Po drugie, lorentzowska odległość nie jest zazwyczaj ani gładka, ani ograniczona, a zatem nie współgra ze strukturą C^* -algebry. Pierwszy w tych problemów został rozwiązany w naszej pracy [H1]. Konkretnie, przedstawiliśmy następującą definicję (zob. [Def. 20 w H1] i jej udoskonalenie autorstwa Franco [106]):

$$\tilde{d}(\chi, \xi) := \inf_{a \in \mathcal{A}} \{ \max\{0, \chi(a) - \xi(a)\} : \forall \phi \in \mathcal{K}, (\phi, ([\mathcal{D}, a] + \mathbb{I}) \phi) \leq 0 \}, \quad (10)$$

gdzie $\mathbb{I} = i\gamma$ jeśli trójka spektralna jest parzysta, tj. dopuszcza \mathbb{Z}_2 -gradację γ , lub $\mathbb{I} = \pm 1$ w przeciwnym wypadku. Wykazaliśmy [Prop. 21 w H1], że funkcja \tilde{d} spełnia wszystkie własności odległości lorentzowskiej (zob. Sek. 4.3.1). Co więcej, pokazaliśmy [Prop. 22 i 23 w H1], że stanowi ona górne ograniczenie dla standardowej odległości lorentzowskiej na rozmaitościach globalnie hiperbolicznych i jest równa tej ostatniej w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Drugi z problemów został niedawno rozwiązany przez E. Minguzziego [47, 179, 180] za pomocą za pomocą „funkcji stromych” [*ang.* steep functions], wieńcząc tym samym program czysto algebraicznego sformułowania odległości lorentzowskiej. W tym kontekście, wzór (10) wprowadzony w pracy [H1] zapewnia algebraiczną charakteryzację funkcji stromych [106].

Opis wkładu autorskiego:

Oryginalne pojęcia przyczynowości w przestrzeni stanów i stożka przyczynowego zostały wprowadzone przez N. Franco w prepryncie [104] z grudnia 2012 roku. Zawierał on Twierdzenie 3 o rekonstrukcji w formie hipotezy, wraz z dowodem dla czasoprzestrzeni Minkowskiego. Moim głównym wkładem do naszej wspólnej pracy [H1] był kompletny dowód tego twierdzenia. Konkretnie, udowodniłem algebraiczną charakteryzację funkcji przyczynowych [Thm. 11 w H1] z pomocą metod rachunku spinowego i kombinatoryki [Lem. 24, 25 i 26 w H1]. Wspólnie opracowaliśmy algebraiczną wersję wzoru na odległość lorentzowską i udowodniliśmy jej podstawowe własności. Również wspólnie napisaliśmy ostateczną wersję artykułu i opracowaliśmy zmiany zasugerowane przez recenzentów.

4.2.2 Przyczynowość w czasoprzestrzeniach prawie przemiennej [H2]

Szczególnie ważną klasę kwantowych przestrzeni w ujęciu Connesa stanowią *przestrzenie prawie przemienne* [147]. Powstają one jako swoiste przestrzenie iloczynowe geometrii różności oraz *skończonych trójek spektralnych* opartych na algebrach macierzowych [157]. Konkretnie,

$$\mathcal{A} \subset C_0(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}_F, \quad \mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, \mathcal{S}) \otimes \mathcal{H}_F, \quad \mathcal{D} = \mathcal{D} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes \mathcal{D}_F, \quad (11)$$

gdzie γ^5 jest \mathbb{Z}_2 -gradacją przestrzeni $L^2(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ nad parzysto-wymiarową różnością \mathcal{M} . Podobny wzór ma zastosowanie w przypadku nieparzystych wymiarów [102].

Geometrie prawie przemienne umożliwiają zastosowanie teorii trójek spektralnych w fizyce cząstek [53, 242] i kosmologii [166]. Naturalne jest więc badanie struktury przyczynowej w przestrzeni stanów w przypadku prawie przemiennej. Wspólnie z N. Franco zainicjowaliśmy takie badania w artykule [H2].

Pierwsza istotna obserwacja [Prop. 1 w H2] dotyczy przestrzeni stanów C^* -algebry postaci $\mathcal{A} = C_0(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}_F$, z pewną algebrą macierzową \mathcal{A}_F . Ponieważ $C_0(\mathcal{M})$ jest przemienne, znany wynik w teorii C^* -algebr [151, Thm. 11.3.7] implikuje, że $P(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M} \times P(\mathcal{A}_F)$. Ten fakt umożliwia interpretację prawie przemiennej czasoprzestrzeni w duchu teorii Kaluzy–Kleina. Istotna różnica koncepcyjna polega jednak na tym, że przestrzeń $P(\mathcal{A}_F)$ nie posiada żadnych ukrytych wymiarów, lecz jest 0-wymiarowa (ściślej, 0-sumowalna) [242]. W konsekwencji, $P(\mathcal{A}_F)$ należy interpretować jako przestrzeń wewnętrzną, która może być wyposażona w geometryczną strukturę indukowaną przez skończoną trójkę spektralną $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, \mathcal{D}_F)$.

Głównym wynikiem pracy [H2] jest wykazanie, że tak rozumiane czasoprzestrzenie prawie przemienne mają wysoce nietrywialną strukturę przyczynową, łączącą standardową strukturę przyczynową na \mathcal{M} z geometrią wewnętrzną przestrzeni $P(\mathcal{A}_F)$. Artykuł zawiera kilka ogólnych wyników oraz szczegółową analizę modelu opartego na algebrze $\mathcal{A}_F = M_2(\mathbb{C})$.

Wpierw pokazaliśmy [Thm. 1 w H2] jak skonstruować prawie przemienne lorentzowską trójkę spektralną, mając daną parzysto-wymiarową czasoprzestrzeń globalnie hiperboliczną \mathcal{M} oraz

skończoną trójkę spektralną $(\mathcal{A}_F, \mathcal{H}_F, \mathcal{D}_F)$. Kluczową obserwacją jest to, że operator fundamentalnej symetrii \mathcal{J} powinien mieć postać produktową, $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\mathcal{M}} \otimes \mathbf{1}$. Taka konstrukcja została po raz pierwszy zarysowana w [12], zob. też [79, 84, 238]. Przedyskutowaliśmy również zagadnienie preferowanej unityzacji \mathcal{A}_1 . Stożek przyczynowy, zdefiniowany przez warunki (3) i (4), w ogólności zależy od wybranej unityzacji \mathcal{A}_1 podstawowej algebry \mathcal{A} . Żeby ominąć ten problem przedstawiliśmy w pracy [H2] procedurę konstruowania algebry \mathcal{A}_1 , która automatycznie daje maksymalny stożek przyczynowy \mathcal{C} .

Struktura przyczynowa czasoprzestrzeni prawie przemiennej ma dwie ważne własności ogólne [Prop. 2 i 3 w H2] zawarte w poniższym stwierdzeniu¹.

Stwierdzenie 4. *Niech $(\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{D})$ będzie parzystą prawie przemienią lorentzowską trójką spektralną, U – operatorem unitarnym na \mathcal{H}_F , zaś Ω – dodatnią gładką ograniczoną funkcją na \mathcal{M} . Niech teraz $\mathcal{D}_U = \mathcal{D}_{\mathcal{M}} \otimes \mathbf{1} + \gamma^5 \otimes U\mathcal{D}_F U^*$, $\mathcal{D}_\Omega = \Omega\mathcal{D}\Omega$ i niech $\preceq, \preceq_U, \preceq_\Omega$ będą relacjami przyczynowymi określonymi odpowiednio przez $\mathcal{D}, \mathcal{D}_U, \mathcal{D}_\Omega$ poprzez wzór (3). Wtedy, dla dowolnych $\chi, \xi \in S(\mathcal{A}_1)$,*

$$\chi \preceq \xi \iff \chi_U \preceq_U \xi_U, \quad \text{gdzie} \quad \chi_U(a) = \chi((\mathbf{1} \otimes U) a (\mathbf{1} \otimes U^*)), \quad (12)$$

$$\chi \preceq \xi \iff \chi \preceq_\Omega \xi. \quad (13)$$

Z pierwszej równoważności (12) wynika, że unitarną transformację operatora \mathcal{D}_F determinującego geometrię wewnętrzną można równoważnie uwzględnić poprzez odpowiedni obrót bazy w przestrzeni wewnętrznej. Fakt ten pozwala w szczególności na pracę w bazie, w której \mathcal{D}_F jest diagonalny.

Druga równoważność (13) ujmuje fakt, iż struktura przyczynowa jest konforemnie niezmienna. Zauważmy jednak, że konforemne przeskalowanie przez funkcję Ω na \mathcal{M} wpływa również na skończoną część operatora Diraca, $\mathcal{D}_F \rightsquigarrow \Omega^2 \mathcal{D}_F$ (por. Tw. 8).

Najprostszy przykład skończonej trójki spektralnej oparty jest na algebrze macierzy zespolonych 2×2 ,

$$\mathcal{A}_F = M_2(\mathbb{C}), \quad \mathcal{H}_F = \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{D}_F = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

W ogólności \mathcal{D}_F może być dowolną macierzą hermitowską 2×2 , ale dzięki wzorowi (12) wystarczy rozpatrywać przypadek diagonalny. W pracy [H2] rozważaliśmy \mathcal{M} jako dwuwymiarową czasoprzestrzeń Minkowskiego, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,1}$, wraz z algebrą funkcji Schwartza, $\mathcal{A}_{\mathcal{M}} = \mathcal{S}(\mathcal{M})$. Ogólna procedura wyboru odpowiedniej unityzacji opisana w [Sec. 2 w H2] daje

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \text{span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}) & \mathcal{S}(\mathcal{M}) \\ \mathcal{S}(\mathcal{M}) & \text{span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}) \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ jest zbiorem wszystkich gładkich ograniczonych funkcji przyczynowych na \mathcal{M} , których wszystkie pochodne są ograniczone.

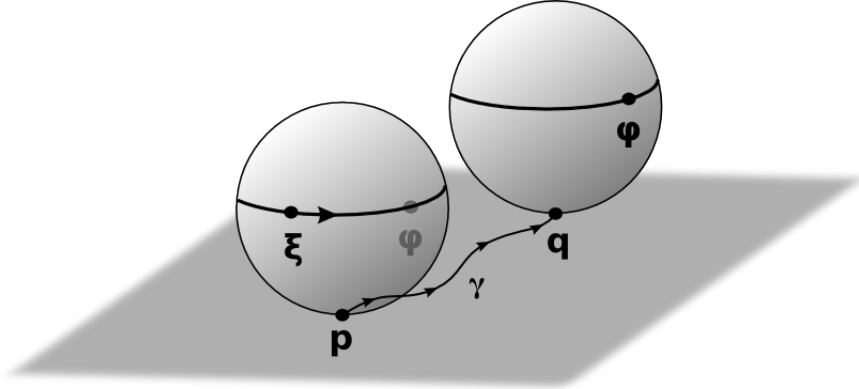
¹Ścisłe rzecz ujmując, wzór (12) został przedstawiony w pracy [H2] tylko dla stanów czystych, ale dowód rozszerza się niemal automatycznie na stany mieszane.

Przestrzeń stanów czystych algebry $M_n(\mathbb{C})$ jest homeomorficzna do zespolonej płaszczyzny rzutowej [20], $P(M_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$, zatem $P(\mathcal{A}_F) \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$. W konsekwencji, prawie przemienna czasoprzestrzeń oparta na algebrze $M_2(\mathbb{C})$ jest iloczynem kartezjańskim czasoprzestrzeni \mathcal{M} i „wewnętrznej” sfery S^2 — zob. Rys. 3. Poniższe twierdzenie [Thm. 3 w H2] w pełni charakteryzuje jej strukturę przyczynową:

Twierdzenie 5. *Stany $\omega_{p,\xi}, \omega_{q,\varphi} \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_1) \cong \mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ są w relacji przyczynowej $\omega_{p,\xi} \preceq \omega_{q,\varphi}$ wtedy i tylko wtedy gdy:*

- (i) *istnieje skierowana w przyszłość krzywa przyczynowa γ taka, że $p \preceq q$ w \mathcal{M} ;*
- (ii) *ξ oraz φ mają tę samą „szerokość geograficzną”, tzn. $|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2$;*
- (iii) *$\tau(\gamma) \cdot |d_1 - d_2| \geq |\theta_\varphi - \theta_\xi|$, gdzie $\theta_\xi = \arg \xi_2$, $\theta_\varphi = \arg \varphi_2$, zaś $\tau(\gamma) = \int_0^1 dt \sqrt{-g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$ jest czasem własnym wzdłuż krzywej przyczynowej γ .*

Chociaż twierdzenie to zostało udowodnione w [H2] tylko dla przypadku gdy \mathcal{M} jest dwuwymiarową czasoprzestrzenią Minkowskiego, to techniki opracowane w [H3] pozwalają na jego uogólnienie na przypadek dowolnej globalnie hiperbolicznej 4-wymiarowej czasoprzestrzeni — zob. [Sec. 7 w H3].



Rysunek 3: [Fig. 2 w H2] Ilustracja czasoprzestrzeni prawie przemienną związanej ze skończoną trójką spektralną (14). Każdy „wewnętrzny” stan czysty może być scharakteryzowany jako zespolony wektor $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}P^1$, gdzie $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = 1$ lub, równoważnie, jako punkt na jednostkowej 2-sferze o szerokości geograficznej $\arccos(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)$ i długości geograficznej $\arg \xi_2$. Stan $\omega_{q,\varphi} \in P(\mathcal{A})$ jest w stożku przyszłości stanu $\omega_{p,\xi}$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje skierowana w przyszłość krzywa przyczynowa γ z p do q , ξ i φ leżą na tej samej szerokości geograficznej, a czas własny $\tau(\gamma)$ przemnożony przez stałą $|d_1 - d_2|$ jest większy lub równy odległości kątowej między ξ i φ .

Bardzo pouczające jest porównanie Twierdzenia 5 ze znanym wynikiem [146, Prop. 2] dotyczącym odległości Connesa (9) dla skończonej trójki spektralnej (14):

$$\text{Dla } \omega_\xi, \omega_\varphi \in P(\mathcal{A}_F), \quad d(\omega_\xi, \omega_\varphi) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1 - |\langle \xi, \varphi \rangle|^2}}{|d_1 - d_2|}, & \text{gdzie } |\xi_1|^2 - |\xi_2|^2 = |\varphi_1|^2 - |\varphi_2|^2, \\ +\infty & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (15)$$

Powyższy wzór ukazuje geometryczną interpretację warunku (ii). Dowolne dwa stany, których wewnętrzne komponenty są oddzielone od siebie nieskończoną odległością Connesa nigdy nie mogą być powiązane przyczynowo. Zauważmy, że ten wniosek dotyczy również zdegenerowanego przypadku z $d_1 = d_2$. Rzeczywiście, w tym przypadku odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami wewnętrznymi jest nieskończona, co jest spójne z warunkiem (iii). Z drugiej strony, zauważmy, że (15) dotyczy *odległości euklidesowej* pomiędzy punktami na kuli, podczas gdy warunek (iii) zawiera długość po łuku. To pokazuje, iż geometria prawie przemiennej czasoprzestrzeni nie jest prostym złożeniem geometrii czasoprzestrzeni i geometrii wewnętrznej. Warunek (iii) może być jednak zostać zinterpretowany — w duchu teorii Kaluzy–Kleina — jako standardowy warunek przyczynowości w rozszerzonej czasoprzestrzeni $\mathcal{M} \times S^1$ z metryką lorentzowską $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{|d_1-d_2|}d\theta$ — zob. [O18].

Choć struktura przyczynowa dla wszystkich stanów mieszanych pozostaje niezbadana (zob. też Sek. 4.3.1), można zrozumieć relacje przyczynowe dla pewnej podklasy stanów mieszanych, $\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \times S(\mathcal{A}_F) \subset S(\mathcal{A}_1)$. Element $\omega_{p,\rho} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ jest określony przez zdarzenie $p \in \mathcal{M}$ oraz macierz gęstości $\rho \in S(\mathcal{A}_F)$.

Dla trójki spektralnej (14) przestrzenią wszystkich stanów jest kula Blocha [20], $S(M_2(\mathbb{C})) \cong B^2$. Dowolną macierz gęstości $S(M_2(\mathbb{C}))$ można zatem wygodnie sparametryzować:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}), \quad \text{gdzie } \vec{r} \in B^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ oraz } \vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z),$$

natomiast σ_i są macierzami Pauliego. Twierdzenie 5 uogólnia się [Thm. 4 w H2] na przestrzeń stanów $\mathcal{N}(\mathcal{A})$:

Twierdzenie 6. *Dwa stany $\omega_{p,\rho}, \omega_{q,\sigma} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$, gdzie ρ i σ są określone odpowiednio przez wektory $\vec{r}, \vec{s} \in B^2$, są w relacji przyczynowej $\omega_{p,\rho} \preceq \omega_{q,\sigma}$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(a) *istnieje skierowana w przyszłość krzywa przyczynowa γ taka, że $p \preceq q$ na \mathcal{M} ;*

(b) $r_z = s_z =: z$;

(c) $\tau(\gamma) \cdot |d_1 - d_2| \geq \sup_{\theta \in [0, 2\pi)} \left| \arccos \left(\frac{s}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\theta_s + \theta) \right) - \arccos \left(\frac{r}{\sqrt{1-z^2}} \cos(\theta_r + \theta) \right) \right|$,
gdzie $\theta_\rho = \arg(r_x + ir_y)$, $\theta_\sigma = \arg(s_x + is_y)$, a $\tau(\gamma)$ jest czasem własnym wzdłuż γ .

Warunek (b) ma taką samą interpretację jak warunek (ii) w Twierdzeniu 5 — punkty w kuli Blocha muszą mieć tę samą szerokość geograficzną, choć mogą mieć różne odległości od środka kuli. Prawa strona wzoru w warunku (c) ma interpretację geometryczną. Jest to maksymalny rzut odcinka $\vec{s} - \vec{r}$ na równoleżnik kuli o promieniu $\sqrt{1-z^2}$. Warunek (c) jest zgodny z warunkiem (ii) dla stanów czystych i wynika z niego, że — w przeciwieństwie do odległości riemannowskiej (15) — przejście przez stany mieszane nie skraca długości, tj. ilości czasu własnego potrzebnego, aby ścieżka była przyczynowa.

Badanie prostego modelu opartego na skończonej trójce spektralnej (14) ujawniło trzy istotne ogólne cechy czasoprzestrzeni prawie przemiennej:

1. Warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym, dla $\omega_{p,\xi} \preceq \omega_{q,\varphi}$ jest relacja przyczynowa $p \preceq q$ pomiędzy odpowiadającymi im zdarzeniami w bazowej czasoprzestrzeni. Pokazuje to, że struktura przyczynowa w czasoprzestrzeniach prawie przemiennych nigdy nie może spowodować naruszenia Einsteinowskiej przyczynowości. Fakt ten został udowodniony w pełnej ogólności w [Thm. 9 w O17].
2. Geometria metryczna przestrzeni wewnętrznej określona przez odległość (9) indukuje ograniczenia na ewolucję przyczynową w czasoprzestrzeni prawie przemiennej. Innymi słowy, ograniczenie prędkości, określone przez stałą prędkości światła i parametry wewnętrznej geometrii, ogranicza *jednocześnie* zarówno ruch w czasoprzestrzeni fizycznej jak i w przestrzeni wewnętrznej. W szczególności, jeśli zdarzenia p i q są rozdzielone świetlnie [*ang.* lightlike separated], tzn. dowolna krzywa przyczynowa γ z p do q ma $\tau(\gamma) = 0$, to stan wewnętrzny nie może się zmienić. Te wnioski można porównać z „twierdzeniem Pitagorasa” dla odległości Connesa na iloczynach riemannowskich trójek spektralnych [80].
3. W prawie przemiennych modelach istnieje konkretna procedura wyboru unityzacji \mathcal{A}_1 algebry \mathcal{A} , która zadaje maksymalny stożek przyczynowy. Ponadto, wybór struktury przestrzeni Krejna na trójce spektralnej produktu jest naturalny. Pokazuje to, że struktura przyczynowa czasoprzestrzeni kwantowych zdefiniowana w [H1] nie zależy od „pomocniczych” elementów, tj. unityzacji i operatora fundamentalnej symetrii, przynajmniej w przypadku prawie przemiennym. Dla przypadków wykraczających poza klasę prawie przemiennych czasoprzestrzeni, zob. [107, 108].

Opis wkładu autorskiego:

Badanie prawie przemiennych czasoprzestrzeni oraz najprostszego modelu opartego na skończonej trójce spektralnej (14), było naturalnym krokiem, który pojawił się w naszych dyskusjach z N. Franco po opublikowaniu naszego pierwszego artykułu [H1]. Ja wyprowadziłem niektóre z ogólnych wyników [Prop. 1, 2 i 3 w H2] dotyczących struktury przyczynowej czasoprzestrzeni prawie przemiennych, podczas gdy N. Franco wykazał pewne algebraiczne własności prawie przemiennych lorentzowskich trójek spektralnych [Thm. 1 w H2] i zbadał kwestię wyboru unityzacji [s. 4 i Prop. 5 w H2]. Dowody naszych głównych wyników [Thm. 3 i 4 w H2] są dość złożone i opierały się na wielu pośrednich krokach [Prop. 4–14, Lem. 1 i Appendix w H2]. Zostały one wyprowadzone w oparciu o wiele wspólnych dyskusji i obliczeń, więc nie da się z nich wydzielić konkretnego osobistego wkładu. Artykuł jest został opublikowany w specjalnym wydaniu [Special Issue on Noncommutative Geometry and Quantum Groups in honor of Marc A. Rieffel](#) z inicjatywy N. Franco, który był autorem korespondującym.

4.2.3 Czasoprzestrzeń dwupłatowa [H3]

Jedną z kluczowych cech nieprzemienno-geometrycznego opisu Modelu Standardowego jest tzw. *podwojenie algebry* [ang. algebra doubling]. Oznacza to, iż początkowa skończona algebra, która jest głównym budulcem modelu, ma postać $\mathcal{A}_F = M_a(\mathbb{H}) \oplus M_{2a}(\mathbb{C})$, dla pewnego $a \in \mathbb{N}$, gdzie \mathbb{H} oznacza rzeczywistą algebrę kwaternionów. Taki wybór gwarantuje poprawną strukturę pól cechowania i uwzględnia asymetrię chiralną oddziaływań elektro-słabych [55]. Dalszą fizyczną motywacją stojącą za podwojeniem algebry można znaleźć w pracach [56, 57, 110, 215, 242].

Skończona trójka spektralna bazująca na podwójnej algebrze, $\mathcal{A}_F = \mathcal{A}_F^1 \oplus \mathcal{A}_F^2$, opisuje *przestrzeń dwupunktową*, ponieważ $P(\mathcal{A}_F) = P(\mathcal{A}_F^1) \sqcup P(\mathcal{A}_F^2)$ (zob. [157] i [242, Chapter 2]). W konsekwencji, związana z nią czasoprzestrzeń prawie przemieniana nazywana jest *czasoprzestrzenią dwupłatową*, gdyż $P(C(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}_F) \cong (\mathcal{M} \times P(\mathcal{A}_F^1)) \sqcup (\mathcal{M} \times P(\mathcal{A}_F^2))$. Najprostszy jej przykład bazuje na skończonej trójce spektralnej

$$\mathcal{A}_F = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_F = \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{D}_F = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } m \in \mathbb{C}. \quad (16)$$

Chociaż algebra $\mathcal{A} = C(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A}_F \cong C(\mathcal{M}) \oplus C(\mathcal{M})$ jest przemieniana i mamy $P(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}$, to geometria czasoprzestrzeni dwupłatowej nie jest trywialna, ponieważ antydiagonalny operator \mathcal{D}_F indukuje sprzężenie między płatami. Odległość Connesa pomiędzy dwoma „punktami wewnętrznymi”, $P(\mathcal{A}_F) = \{\omega_1, \omega_2\}$, wynosi

$$d(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{|m|}, \quad (17)$$

jest zatem skończony, jeśli tylko $m \neq 0$.

Skończona trójka spektralna (16) została wykorzystana w pracy [241] do przedstawienia nieprzemienno-geometrycznego opisu elektrodynamiki (zob. też [242, Chapter 9]).

W artykule [H3] badaliśmy strukturę przyczynową czasoprzestrzeni dwupłatowej bazującej na globalnie hiperbolicznej czasoprzestrzeni \mathcal{M} o wymiarze 2 lub 4 oraz skończonej trójce spektralnej (16). Główny wynik [Thm. 9 w H3] jest sformułowany dla dowolnych dwóch „wewnętrznie mieszanych” stanów z przestrzeni $\mathcal{N}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M} \times [0, 1]$.

Twierdzenie 7. *Dwa stany $\omega_{p,\xi}, \omega_{q,\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ są w relacji przyczynowej $\omega_{p,\xi} \preceq \omega_{q,\varphi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skierowana w przyszłość krzywa przyczynowa γ dająca $p \preceq q$ na \mathcal{M} oraz*

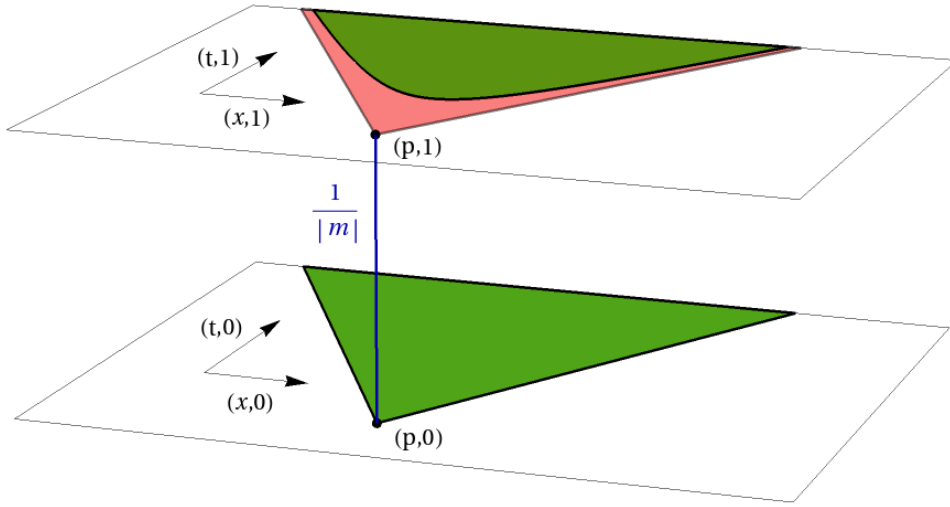
$$\tau(\gamma) \cdot |m| \geq \left| \arcsin \sqrt{\varphi} - \arcsin \sqrt{\xi} \right|, \quad (18)$$

gdzie $\tau(\gamma)$ jest czasem własnym wzdłuż γ . W szczególności, dla stanów czystych $\omega_{p,0}, \omega_{q,1} \in P(\mathcal{A})$ dostajemy, przy założeniu $m \neq 0$,

$$\tau(\gamma) \geq \frac{\pi}{2|m|}. \quad (19)$$

Twierdzenie 7 zostało udowodnione osobno dla czasoprzestrzeni o wymiarach dwa [Thm. 10 w H3] i cztery [Thm. 15 w H3]. Jego rozszerzenie na dowolny wymiar wydaje się być możliwe, ale technicznie trudne, co omówiono w [Sec. 7 w H3].

Struktura przyczynowa czasoprzestrzeni dwupłatowej została zilustrowana na Rys. 4 i 5. Jej kluczową cechą jest to, że „przeskok” pomiędzy płatami, czyli zmiana wewnętrznego stanu czy- stego, jest dozwolona pod warunkiem, że upłynie wystarczająco dużo czasu własnego, ważonego parametrem $|m| \geq 0$. Taki ruch okazuje się być ciągły, gdy jest rozpatrywany w przestrzeni stan- nów wewnątrz mieszanych $\mathcal{N}(\mathcal{A})$. Zauważmy też, że zmiana w przestrzeni wewnętrznej nie jest możliwa gdy $m = 0$, co odpowiada nieskończonej separacji dwóch płatów (17), albo gdy γ jest krzywą świetlną. Jest to spójne z ogólnymi cechami czasoprzestrzeni prawie przemiennej opisany na s. 18.



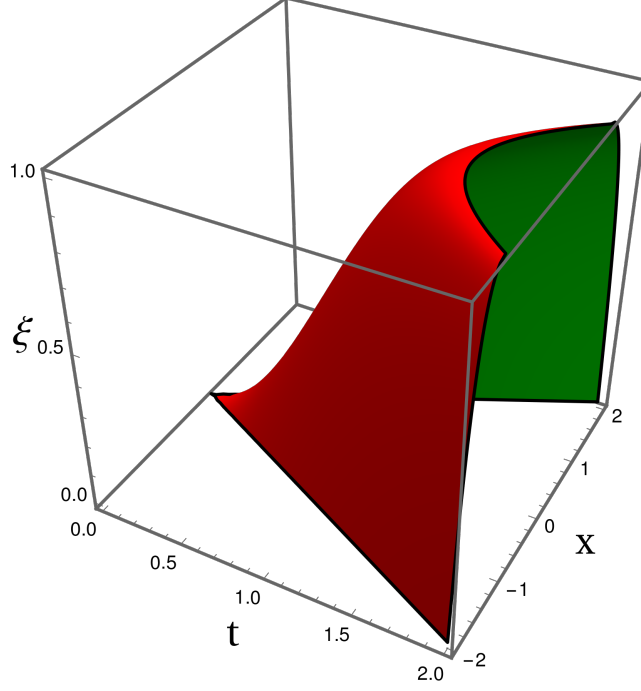
Rysunek 4: [Fig. 1 w H5] Ilustracja struktury przyczynowej dwupłatowej 2-wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego. Odległość (Connesa) między płatami jest równa $1/|m|$. Zielony obszar pokazuje stożek przyszłości punktu $(p,0) \in P(\mathcal{A})$. Jasno-czerwony obszar pokazuje region czasoprzestrzeni dwupłatowej, który jest dozwolony przez klasyczną einsteinowską przyczynowość, ale nie przez przyczynowość w przestrzeni stanów.

Mając daną bazową trójkę spektralną $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ można rozważyć klasę geometrii, które są unitarnie równoważne (w sensie Mority) [72, 242]. Prowadzi to do tzw. *fluktuacji wewnętrznych* operatora \mathcal{D} . W standardowym ujęciu [72] (zob. bardziej ogólne podejście w [58]) sprowadzają się one do „ubierania” wyjściowego operatora \mathcal{D} w *potencjały cechowania* A ,

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = \mathcal{D} + \mathbf{A}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{A} = \sum_{\text{skończona}} a_i [\mathcal{D}, b_i], \quad \text{dla } a_i, b_i \in \mathcal{A}.$$

Najogólniejszy sfluktuowany operator $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}$ na czasoprzestrzeni dwupłatowej ma następującą postać [Eq. (30) w H3]

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}} = \mathcal{D} \otimes \mathbf{1} + \gamma^\mu \otimes \begin{pmatrix} A_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} + \gamma^5 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \Phi \\ \Phi^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad A_\mu, B_\mu, \Phi \in \mathcal{A}_1. \quad (20)$$



Rysunek 5: [Fig. 2 w H3] Brzeg stożka przyszłości stanu $\omega_{(0,0),0}$ w przestrzeni $\mathcal{N}(\mathcal{A})$, dla $m = 1$ i $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,1}$. Wszystkie trajektorie, które są przyczynowe w sensie Def. 2 muszą leżeć pod tą powierzchnią.

Potencjały wektorowe, A_μ, B_μ , odpowiadają „polom elektromagnetycznym”, które mogą być różne na każdym płacie, natomiast Φ jest abelowym „polem Higgsa” [242]. Każdy taki operator \mathcal{D}_A definiuje — poprzez wzór (3) — inną strukturę przyczynową na czasoprzestrzeni dwupłatówej. Wpływ wewnętrznych fluktuacji geometrii na strukturę przyczynową opisuje następujące twierdzenie [Thm. 16 w H3].

Twierdzenie 8. *Niech \preceq_A oznacza porządek częściowy wyznaczony przez strukturę przyczynową związaną ze sfluktuowanym operatorem \mathcal{D}_A na czasoprzestrzeni dwupłatówej. Dwa stany $\omega_{p,\xi}, \omega_{q,\varphi} \in \mathcal{N}(\mathcal{A})$ są w relacji przyczynowej $\omega_{p,\xi} \preceq_A \omega_{q,\varphi}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skierowana w przyszłość krzywa przyczynowa γ dająca $p \preceq q$ na \mathcal{M} oraz*

$$\int_0^1 |\Phi(\gamma(s))| \sqrt{-g_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s))} ds \geq \left| \arcsin \sqrt{\varphi} - \arcsin \sqrt{\xi} \right|. \quad (21)$$

Zauważmy, że wprowadzenie potencjałów wektorowych A_μ, B_μ nie zmienia struktury przyczynowej czasoprzestrzeni dwupłatówej. Jest tak dlatego, że wektorowa część fluktuacji działa diagonalnie na \mathcal{H}_F , a zatem komutuje z każdym elementem $a \in \mathcal{A}_1$, który również działa diagonalnie na \mathcal{H}_F . Z drugiej strony, czas własny wzdłuż krzywej przyczynowej γ jest ważony przez wartość bezwzględną pola skalarne Φ . Efekt ten jest formalnie równoważny konforemnemu przeskalowaniu metryki czasoprzestrzennej g o czynnik $\Omega = |\Phi|^{-1}$ — zob. (13). Warto przy tym nadmienić, iż związek pomiędzy polem Higgsa a przekształceniami konforemnymi był badany w pracy [240], choć dotyczyło to poziomu dynamicznego (związanym z działaniem spektralnym), a nie kinematycznego.

Opis wkładu autorskiego:

Podobnie jak w przypadku artykułu [H2], główny wynik [Thm. 9 w H3] wymagał kilku technicznych kroków pośrednich [Prop. 7, 13–14, Lem. 11, 12, Thm. 15 oraz App. A i B w H3], które były wynikiem naszych wspólnych wysiłków. Specyficzna technika dowodu [Thm. 15 w H3] została opracowana przez N. Franco w oparciu o Macierzowe Twierdzenie Viety [74, 109]. Ja zaproponowałem badanie fluktuacji operatora \mathcal{D} , co zaowocowało twierdzeniem [Thm. 16 w H3], a także wykonałem ilustrację stożka przyczynowego [Fig. 2 w H3]. Artykuł został napisany wspólnie, zaś złożeniem pracy do czasopisma zajął się N. Franco.

4.2.4 Geometria nieprzemiana a Zitterbewegung [H4]

Jedną z osobliwości równania Diraca jest efekt *Zitterbewegung* — „drgający ruch” masywnego fermionu — odkryty w 1930 roku przez E. Schrödingera [216]. Jak się okazuje, standardowy operator położenia $\hat{x}(t)$ w obrazie Heisenberga ma część, która gwałtownie oscyluje. Biorąc hamiltonian Diraca $\hat{H}_{\mathcal{D}} = i\hbar c\gamma^0\gamma^k\partial_k - mc^2\gamma^0$ otrzymujemy [234]

$$\hat{x}(t) = \hat{x} + c^2\hat{H}_{\mathcal{D}}^{-1}\hat{p}t - \hat{F}(t), \quad (22)$$

gdzie $\hat{F}(t) = \frac{i}{2}\hat{H}_{\mathcal{D}}^{-1}(e^{2i\hat{H}_{\mathcal{D}}^{-1}t} - 1)(\hat{v} - c^2\hat{H}_{\mathcal{D}}^{-1}\hat{p})$, a $\hat{v} = i[\hat{H}_{\mathcal{D}}, \hat{x}]$ jest „operatorem prędkości”. Charakterystyczna częstość kątowna Zitterbewegungu odpowiada podwojonej częstości de Broglie’a cząstki kwantowej o masie m [116, 137, 161],

$$\omega_{\text{ZB}} = 2mc^2/\hbar. \quad (23)$$

Dla elektronu ta częstość jest bardzo duża: $\omega_{\text{ZB}}^{\text{electron}} \approx 1.55 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$.

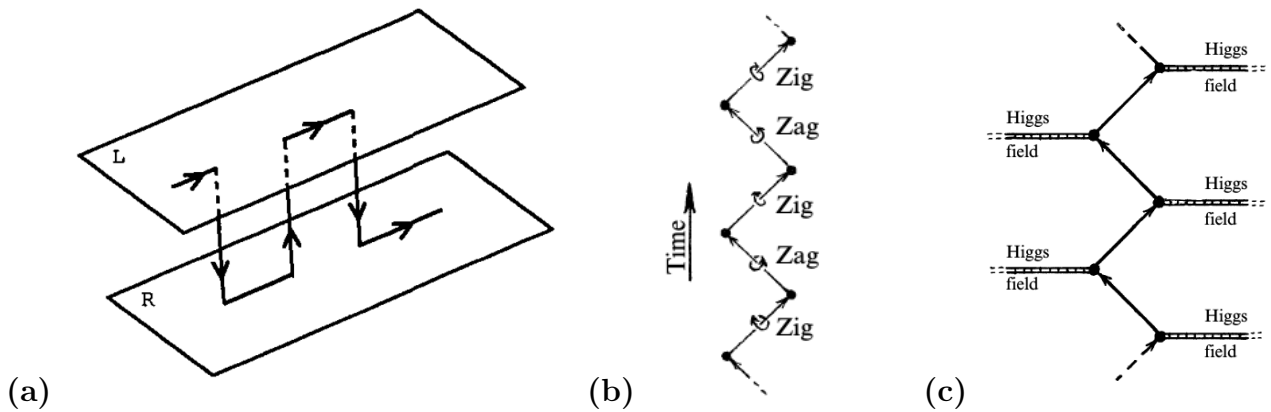
Fizyczna interpretacja efektu Zitterbewegung jest przedmiotem wielu kontrowersji — zob. np. [13, 138, 139, 145, 158, 193, 218, 234]. Oryginalne wyjaśnienie fizyczne podane przez E. Schrödingera w pracy [216] opiera się na interferencji pomiędzy częściami pakietu falowego Diraca o dodatnich i ujemnych częstościach. Istotnie, część oscylacyjna znika w wartościach oczekiwanych $\hat{x}(t)$ dla pakietów falowych o czysto dodatniej (lub czysto ujemnej) energii, ponieważ operator $\hat{F}(t)$ miesza sektory dodatnich i ujemnych częstości w przestrzeni Hilberta [234]. W konsekwencji, „drgający ruch” elektronu nie pojawia się w kwantowej teorii pola i wydaje się być jedynie matematycznym artefaktem teorii Diraca [158]. Można też argumentować (zob. np. [218]), że próba bezpośredniej obserwacji Zitterbewegungu wymagałaby pomiarów o rozdzielczości przestrzennej poniżej długości fali Comptona cząstki, co powodowałoby kreację par i tym samym rozmyłoby wyniki pomiarów (zob. jednak [158]).

Z drugiej strony, efekt Zitterbewegung może być i był wykrywany w analogowych kwantowych symulatorach fermionów Diraca, takich jak ultrazimne atomy [237], spułapkowane jony [116], kondensat Bosego–Einsteina [161] czy sieci fotoniczne [92]. Ponadto, Zitterbewegung może

być postrzegany jako szczególny rodzaj przejścia międzypasmowego w fizyce materii skondensowanej, które ma kluczowe znaczenie dla własności grafenu [152, 258].

Istnieje jeszcze inny punkt widzenia na efekt Zitterbewegung znany pod nazwą *oscylacji chiralnych* [23, 32]. Ogólny bispinor ψ może być jednoznacznie rozłożony na dwa spinory Weyla, ψ_+ i ψ_- , które są stanami własnymi operatora chiralności γ^5 dla wartości własnych odpowiednio $+1$ i -1 . Jeśli $m \neq 0$ to operator γ^5 nie jest całką ruchu i jego ewolucja w obrazie Heisenberga zawiera oscylacje podobne do tych w równaniu (22), o charakterystycznej częstotliwości (23). Fakt ten ma implikacje dla procesów słabych z udziałem neutrin [32, 82].

Artykuł [H4] bazuje na obserwacji, iż prawa strona ograniczenia (19), narzuconego przez strukturę przyczynową dwupłatowej czasoprzestrzeni, jest dokładnie równa półokresowi Zitterbewegungu, $T_{ZB}/2 = \pi/\omega_{ZB}$, po przywróceniu jednostek fizycznych. Jest to dość zaskakujące, ponieważ model oparty na czasoprzestrzeni dwupłatowej jest zasadniczo klasyczny, podczas gdy Zitterbewegung jest efektem kwantowym. Związek między (euklidesową wersją) czasoprzestrzeni dwupłatowej i Zitterbewegungiem został zauważony, na poziomie jakościowym, przez A. Connesa [66] i badany w kontekście teorii cechowania przez R. Brouta [42] — zob. Rys. 6. Warto porównać pracę Brouta z „zygzakowym” obrazem elektronu autorstwa R. Penrose’a [198, 199].



Rysunek 6: (a) [42, Fig. 2.8] Schematyczny obraz ruchu elektronu według R. Brouta [42]. Cząstka najpierw porusza się po górnym płacie, „L”, który odpowiada lewej chiralności, a następnie przeskakuje na dolny płat, „R”, i przechodzi na prawą chiralność. Skok ten jest indukowany przez pole Higgsa, które może być postrzegane jako pole cechowania na dyskretnej dwupunktowej przestrzeni. (b) [199, Fig. 25.1] Zygzakowy obraz elektronu R. Penrose’a. Równanie Diraca może być postrzegane jako układ dwóch sprzężonych równań Weyla dla lewo- i prawoskrętnych spinorów zredukowanych, przy czym masa spoczynkowa m odgrywa rolę stałej sprzężenia. Same cząstki Weyla są bezmasowe, a więc poruszają się z prędkością światła. (c) [199, Fig. 25.13] W zygzakowym obrazie masywnego fermionu wierzchołki pomiędzy dwoma spinorami Weyla mogą być interpretowane jako oddziaływanie z polem Higgsa.

Wyniki dotyczące struktury przyczynowej czasoprzestrzeni dwupłatowej uzyskane w pracy [H3] rzucają nowe światło na modele zaproponowane przez R. Brouta i R. Penrose’a. W artykule [H4] pokazano, że ruch „klasycznego” masywnego fermionu, który ma dokładnie określone

zarówno położenie i pęd w każdym momencie czasu, może być rozpatrywany przy użyciu krzywych w czasoprzestrzeni dwupłatowej.

Zdefiniujmy wpieryw pojęcie przyczynowej ewolucji w przestrzeni stanów (por. Sek. 4.3.2):

Definicja 9. Niech $X(\mathcal{A}) \subset S(\mathcal{A})$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $S(\mathcal{A})$ stanów na $*$ -algebrze \mathcal{A} , wyposażoną w porządek częściowy \preceq zdefiniowany przez stożek przyczynowy \mathcal{C} . Odwzorowanie $\omega : I \rightarrow X(\mathcal{A})$, z dziedziną $I \subset \mathbb{R}$, nazywamy przyczynowym jeśli

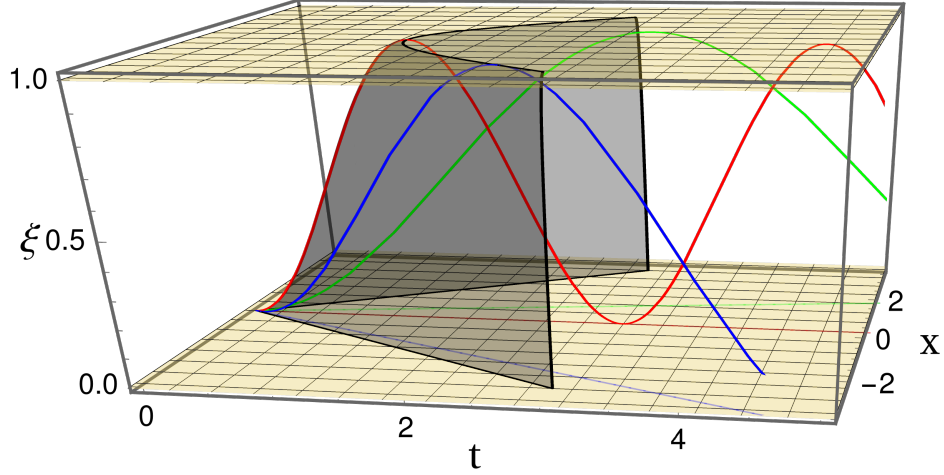
$$\omega(s) \preceq \omega(t), \quad \text{dla wszystkich } s \leq t.$$

Zauważmy teraz, że jeśli zastosujemy Definicję 9 do czasoprzestrzeni dwupłatowej z $X(\mathcal{A}) = P(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}$ to z Twierdzenia 7 wynika, że odwzorowanie $\omega : I \rightarrow \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}$ może być przyczynowe tylko wtedy, gdy cały jego obraz jest leży na jednym z płatów. Załóżmy bowiem, że krzywa przyczynowa γ na \mathcal{M} przeskakuje pomiędzy płatami w pewnym momencie czasu t_0 . Wówczas, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy $\omega(t_0 - \varepsilon) = (\gamma(t_0 - \varepsilon), 0)$ oraz $\omega(t_0 + \varepsilon) = (\gamma(t_0 + \varepsilon), 1)$. Z równania (19) wynika jednak, że dla dowolnej wartości $|m| > 0$, istnieje taki ε , że $\omega(t_0 - \varepsilon) \not\preceq \omega(t_0 + \varepsilon)$ i stąd odwzorowanie ω nie jest przyczynowe. Wniosek ten jest słuszny również gdy parametr masy m zostanie zamieniony na pole skalarne Φ , ponieważ lewa strona wzoru (21) może być dowolnie mała. Widzimy zatem, że ilustracja z Rys. 6 (a) nie jest adekwatna, przynajmniej na poziomie klasycznym.

Z drugiej strony, struktura przyczynowa czasoprzestrzeni dwupłatowej pozwala na zmianę stanu wewnętrznego cząstki, jeśli przejdziemy do rozszerzonej czasoprzestrzeni $\mathcal{N}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{M} \times [0, 1]$. Odwzorowanie $\omega : I \rightarrow \mathcal{M} \times [0, 1]$ jest określone przez krzywą $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ oraz funkcję $\xi : I \rightarrow [0, 1]$. Wówczas, wzór (18) ogranicza szybkość zmian ξ w zależności od prędkości wzdłuż krzywej γ . Przykłady takich przyczynowych odwzorowań zostały pokazane na Rys. 7.

Zauważmy teraz, iż elementami przestrzeni $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ są pary (p, ξ) , gdzie $\xi = \lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_1$ jest kombinacją wypukłą dwóch stanów czystych na algebrze $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. W związku z tym parametr $\lambda = \lambda(\xi) \in [0, 1]$ można interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że stanem wewnętrznym cząstki jest „0”. Ta obserwacja sugeruje probabilistyczną (choć niekoniecznie kwantową!) interpretację wewnętrznego stopnia swobody. Naturalne jest utożsamienie tego ostatniego z chiralnością. Otrzymujemy w ten sposób intrygujący obraz „klasycznego” masywnego fermionu, który porusza się wzdłuż krzywej przyczynowej w czasoprzestrzeni, podczas gdy jego stan wewnętrzny oscyluje z częstością nie większą niż (23). Narzuca się zatem wniosek, że Zitterbewegung nie jest rzeczywistym ruchem w przestrzeni, jak często twierdzi się w literaturze, lecz raczej oscylacją chiralną, która ma miejsce w „przestrzeni wewnętrznej” cząstki.

Twierdzenie 7 nie może być jednak bezpośrednio zastosowane do cząstek Diraca — czy to modelujących masywne neutrina, czy też analogowe układy kwantowe. Jest tak ponieważ pakiet falowy Diraca nie może mieć równocześnie dokładnie określonego położenia jak i pędu, zaś Zitterbewegung jest w ogólności oscylacją o wielu częstościach charakterystycznych [193]. Niemniej jednak, każde rozwiązanie ψ równania Diraca definiuje stan mieszany $\rho \in S(\mathcal{A})$ na



Rysunek 7: Przykłady krzywych przyczynowych w rozszerzonej dwupłatkowej 2-wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego. Błede linie na dolnym płacie przedstawiają trajektorie klasycznej swobodnie lecącej cząstki: spoczywającej w układzie laboratoryjnym (linia czerwona) oraz poruszającej się z prędkością $+\frac{1}{3}c$ (linia zielona) i $-\frac{4}{5}c$ (linia niebieska). Pogrubione krzywe są wynikiem złożenia odpowiednich trajektorii czasoprzestrzennych oraz ruchu w rozszerzonej przestrzeni wewnętrznej $S(\mathcal{A}_F) \cong [0, 1]$. Zauważmy, że zarówno czerwona jak i niebieska ścieżka są „światłne” w czasoprzestrzeni dwupłatkowej, ponieważ leżą na granicy stożka przyczynowego, natomiast ścieżka zielona jest czasopodobna.

algebrze \mathcal{A} czasoprzestrzeni dwupłatkowej poprzez wzór (zob. [Eq. (7) w H4], a także Sek. 4.3.2):

$$\rho_{\psi(t)}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[(\psi^+)^{\dagger}(x, t) a(x, t) \psi^+(x, t) + (\psi^-)^{\dagger}(x, t) b(x, t) \psi^-(x, t) \right], \quad (24)$$

gdzie $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$, natomiast $\psi^{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \gamma^5)$. Struktura przyczynowa czasoprzestrzeni dwupłatkowej implikuje, że ewolucja czasowa stanu układu indukuje przyczynową ewolucję, tzn.

$$\rho_{\psi(s)} \preceq \rho_{\psi(t)}, \quad \text{dla każdego } s \leq t, \quad (25)$$

w ścisłym sensie Definicji 2. Powyższy wzór uogólnia się naturalnie na czasoprzestrzenie globalnie hiperboliczne. Wówczas całkowanie odbywa się po hiperpowierzchni Cauchy’ego, a ψ jest rozwiązaniem równania Diraca na zakrzywionej czasoprzestrzeni [65]. Ponadto, wzór (25) stosuje się również do relacji $\preceq_{\mathbf{A}}$ indukowanej sflukuowanym operatorem Diraca (20). Jedną z bezpośrednich konsekwencji Twierdzenia 8 jest to, że wprowadzenie potencjału elektromagnetycznego nie zmienia zależności (25). Z drugiej strony, wprowadzenie pola skalarnego Φ , oddziałującego z fermionem Diraca poprzez sprzężenie Yukawy, jest równoważne konforemnemu przeskalowaniu metryki czasoprzestrzeni o czynnik $|\Phi|^{-1}$.

Wzór (25), a także jego uogólnienia obejmujące zakrzywioną czasoprzestrzeń i fluktuacje geometrii, może być również postrzegany jako „kwantowe ograniczenie prędkości” [*ang.* quantum speed limit], które narzuca ograniczenie na maksymalną prędkość ewolucji stanu w danym układzie kwantowym [96]. Na marginesie warto wspomnieć, iż ostatnio pokazano, że kwantowe ograniczenia prędkości mają zastosowanie również do układów klasycznych [190, 217], co

sugeruje ich geometryczne pochodzenie. A zatem, relacja (25) może być w testowana w symulatorach kwantowych, które mogą uwzględniać krzywiznę czasoprzestrzenną [35] oraz zależne od czasu sprzężenie Yukawy [116, 159].

Aby sprawdzić empirycznie poprawność ograniczenia (25) należałoby wyprowadzić jej bardziej jawną charakteryzację, podobnej do tej przedstawionej w Twierdzeniu 7. Pozostaje to otwartym problemem, którego rozwiązanie musi wiązać się z pojęciem przyczynowości dla miar probabilistycznych, przedstawionym w pracy [H6] i wyjaśnionym w następnych rozdziałach.

Opis wkładu autorskiego:

Ja jako pierwszy zaobserwowałem, że prawa strona wzoru (19) jest równa półokresowi Zitterbewegungu i rozwinąłem interpretację przedstawioną w [H4]. Ponadto zasugerowałem, że pojęcie przyczynowości w przestrzeni stanów może być badane w symulacjach kwantowych [Sec. V w H4]. N. Franco pomógł wyjaśnić części związane z lorentzowskimi trójkami spektralnymi, a T. Miller przyczynił się do zrozumienia matematycznej struktury ogólnego ograniczenia (25). Samodzielnie napisałem większą część artykułu [H4] i przygotowałem go do publikacji.

4.2.5 Kwantowe czasoprzestrzenie – operacyjny punkt widzenia [H5]

Teoria C^* -algebr zapewnia uniwersalne ramy matematyczne do badania zarówno klasycznych jak i kwantowych układów fizycznych [154, 229]. Stanowi ona również podstawę aksjomatycznego podejścia do kwantowej teorii pola [128]. Struktura C^* -algebraiczna ma naturalną interpretację operacyjną [203, 229]: każda obserwabla, tj. samosprężony element a C^* -algebry \mathcal{A} ma widmo $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$, które określa możliwe wyniki pomiaru, zaś każdy stan $\omega \in S(\mathcal{A})$ definiuje miarę prawdopodobieństwa na $\sigma(a)$, która determinuje prawdopodobieństwa poszczególnych wyników pomiaru. W szczególności, z każdą obserwabłą $a \in \mathcal{A}$ związana jest jej wartość oczekiwana $\omega(a)$ oraz wariancja $\Delta_\omega^2(a) = \omega(a^2) - \omega(a)^2$, w danym stanie ω .

Nierówność Robertsona (zob. np. [229]) mówi, że dla dowolnych obserwabli $a, b \in \mathcal{A}$ i dowolnego stanu $\omega \in S(\mathcal{A})$ mamy $\Delta_\omega(a) \cdot \Delta_\omega(b) \geq \frac{1}{2} |\omega([a, b])|$. Stanowi ona podstawę dla operacyjnego ujęcia relacji nieoznaczoności. Jeśli dwie obserwabla są *komplementarne*, tzn. nie komutują, to nie można ich zmierzyć jednocześnie z dowolną dokładnością.

W standardowym paradygmacie kwantowym pomiary położenia w czasoprzestrzeni nie są wzajemnie komplementarne. W konsekwencji, należy modelować obserwabla czasoprzestrzenne przy użyciu przemiennej C^* -algebry, $C(\mathcal{M})$. Można jednak argumentować, w duchu „mikroskopu Heisenberga” (zob. np. [90]), że próba pomiaru na bardzo małych skalach odległości wiąże się z koniecznością wpompowania znacznych ilości energii w mały obszar czasoprzestrzeni, a tym samym zaburzenia mierzonego układu [143]. W związku z tym, algebra obserwabli czasoprzestrzennych powinna być raczej algebrą nieprzemiennej.

Ale co wówczas stanie się z samą czasoprzestrzenią? Pojęcia czasoprzestrzeni nie można, i nie powinno się, porzucać pochopnie. W istocie, każdy eksperyment fizyczny jest związany z pewnymi czasoprzestrzennymi „etykietami” określającymi koordynaty danych wejściowych i wyjściowych. W związku z tym, *jakaś* struktura czasoprzestrzeni jest wymagana przez samą metodologię fizyki (zob. [O12, O21]). Problem ten ma charakter nie tylko filozoficzny, ponieważ na pojęciu czasoprzestrzeni oparta jest cała kwantowa teoria pola. Jest ona potrzebna nie tylko jako nośnik dla dystrybucji o wartościach operatorowych [228] czy też lokalnych C^* -algebr [128], ale zapewnia ona również ścisłe pojęcie przyczynowości — „aksjomat mikroprzyczynowości” — oraz ewolucji czasowej — „aksjomat cięcia czasowego” [*ang.* time-slice axiom].

Jeśli przyjąć, że sama czasoprzestrzeń jest obiektem kwantowym, to — z operacyjnego punktu widzenia — powinna ona być całkowicie określona przez algebrę \mathcal{A} wszystkich możliwych czasoprzestrzennych obserwabli. W konsekwencji, przestrzeń wszystkich stanów czasoprzestrzeni kwantowej jest jednoznacznie określona jako zbiór wszystkich znormalizowanych dodatnich funkcyjałów liniowych na \mathcal{A} , rozdzielanych przez obserwabli w \mathcal{A} (zob. [229]). Stany mieszane powstają, gdy układ kwantowy jest splątany z pewnym otoczeniem, po którego stopniach swobody śladujemy. Ponadto, każdy stan mieszany jest kombinacją wypukłą, czyli mieszanką statystyczną, stanów czystych. Zatem sam układ jest scharakteryzowany przez zbiór jego stanów czystych. Stąd naturalnym jest utożsamianie przestrzeni $P(\mathcal{A})$ dla nieprzemiennej algebry \mathcal{A} obserwabli czasoprzestrzennych jako struktury definiującej kwantową czasoprzestrzeń (por. [91, s. 188]).

Jednak przestrzeń $P(\mathcal{A})$ ma tylko strukturę topologiczną, podczas gdy klasyczna czasoprzestrzeń jest wyposażona w strukturę przyczynową i metryczną. Zwykle uważa się, że standardowa mikroskopowa przyczynowość w kwantowej czasoprzestrzeni musi się załamywać i można liczyć jedynie na ograniczenie skali naruszenia przyczynowości — zob. np. [5, 11, 123, 188, 225]. Taki punkt widzenia odpowiada wizji przedstawionej na Rys. 1(a). W naszej pracy [H1] zakwestionowaliśmy ten pogląd i przedstawiliśmy pierwsze ścisłe pojęcie przyczynowości i odległości w kwantowej czasoprzestrzeni. Prowadzi to do następującej definicji kwantowej (tj. nieprzemiennej) czasoprzestrzeni przedstawionej w pracy [H5].

Definicja 10 ([Def. 2 w H5]). Nieprzemienią czasoprzestrzenią *nazywamy* przestrzeń stanów $P(\mathcal{A})$ na (gęstej $*$ -podalgebrze) nieprzemiennej C^* -algebry \mathcal{A} , której geometria jest określona przez lorentzowską trójkę spektralną $(\mathcal{A}, \mathcal{K}, \mathcal{D})$.

Oprócz prawie przemiennych przykładów przedstawionych w pracach [H2] i [H3], definicja ta była badana dla dwóch „prawdziwie nieprzemiennych” czasoprzestrzeni: płaszczyzny Moyala [51, 107] i czasoprzestrzeni κ -Minkowskiego [108]. Na marginesie warto wspomnieć, że dla czasoprzestrzeni κ -Minkowskiego zostało niedawno zaproponowane inne podejście do przyczynowości, oparte na kwantowej teorii pola [171]. Podejście opracowane w [H1] jest diametralnie różne, gdyż bazuje bezpośrednio na geometrii kwantowej czasoprzestrzeni — tak jak ma to miejsce w przypadku klasycznym.

Jeżeli potraktujemy Definicję 10 literalnie, to sugeruje ona [H5], że kwantowe teorie pól cechowania powinny być budowane na prawie przemiennych czasoprzestrzeniach $\mathcal{M} \times F$, ra-

czej niż po prostu na czasoprzestrzeni \mathcal{M} . W szczególności, masywne pole Diraca należałoby kwantować na czasoprzestrzeni dwupłatowej $\mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}$. Oznacza to, że teoria powinna zawierać dwa bezmasowe pola Weyla, sprzężone poprzez „wierzchołek masy”, jak na Rys. 7 (a). W standardowym podejściu zakłada się, że pola są początkowo swobodne, tzn. $[\hat{\Psi}_L(p), \hat{\Psi}_R(q)] = 0$ dla wszystkich $p, q \in \mathcal{M}$, zaś oddziaływanie traktuje się perturbacyjnie. Z drugiej strony, prawie przemienność geometria czasoprzestrzeni dwupłatowej sugeruje, że pola nieperturbacyjne nie muszą komutować, jeśli $d(p, q) \leq \pi/(2m)$, gdzie d jest odległością lorentzowską na \mathcal{M} .

To, czy takie prawie przemienne podejście da kwantową teorię pola, która okaże się równoważna standardowej, czy też nie, pozostaje otwartym problemem. Pewna badania porównujące kwantowanie pól Weyla i Diraca zostały przedstawione w pracach [64, 231], choć opierają się one na standardowym podejściu perturbacyjnym.

Opis wkładu autorskiego:

Praca [H5] jest samodzielną publikacją.

4.3 Relatywistyczna przyczynowość w teoriach probabilistycznych [H6–H9]

Zasada no-signallingu jest powszechnie uznawana za podstawowy warunek zgodności pomiędzy teorią względności a probabilistyczną teorią fizyczną [44, 206]. Jest ona wyrażona operacyjnie poprzez prawdopodobieństwa wyników pomiarów przestrzennie rozdzielonych agentów, warunkowane ich lokalnymi ustawieniami pomiarowymi. W przypadku dwojga agentów, Alicji i Boba, warunki no-signallingu wyrażają się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \sum_b P(a, b | x, y) &= \sum_b P(a, b | x, y'), & \text{dla wszystkich } a, x, y, y', \\ \sum_a P(a, b | x, y) &= \sum_a P(a, b | x', y), & \text{dla wszystkich } a, x', y, y, \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie a, b są wynikami, odpowiednio, Alicji i Boba, natomiast x, x', y, y' są ich ustawieniami pomiaru. Dla trzech lub więcej stron konieczne i wystarczające warunki dla braku nadświetlnego przesyłu informacji zależą od konkretnych lokalizacji czasoprzestrzennych agentów [141].

Warunki no-signallingu odnoszą się do relatywistycznej czasoprzestrzeni tylko implícite. Bazują one na identyfikacji probabilistycznego pojęcia zdarzenia, związanego z określonym ustawieniem i wynikiem (por. [H8], a także [O12, O21]) z relatywistycznym zdarzeniem, które jest punktem w czasoprzestrzeni \mathcal{M} . Wówczas, porządek przyczynowy zdarzeń w \mathcal{M} określa pojęcie „przestrzennego rozdzielenia” [*ang.* spacelike separation]. Struktura lorentzowska relatywistycznej czasoprzestrzeni jest wystarczająca do nadania sensu zasadzie no-signallingu, jednak nie jest ona bezwzględnie konieczna. Można zastosować warunki postaci (26) na przykład do czasoprzestrzeni z preferowaną foliacją [28], albo dyskretnej czasoprzestrzeni, np. zbioru przyczynowego

[233]. Można też wyobrazić sobie warunki no-signallingu zdefiniowane na kwantowej czasoprzestrzeni \mathcal{Q} , w ścisłym sensie Definicji 10, jeśli tylko udało się nadać operacyjną interpretację „rozmytym zdarzeniom”, czyli elementom \mathcal{Q} .

Co więcej, operacyjne warunki no-signallingu oparte są wyłącznie na korelacjach i nie dotyczą dynamiki fizycznych nośników informacji. W konsekwencji, podczas gdy struktura tensorowa mechaniki kwantowej jest wystarczająca (choć nie konieczna) do zagwarantowania spełnienia warunków no-signallingu [44, 86], to nie wyklucza to możliwości nadświetlnego przesyłu informacji przy pomocy dynamiki kwantowej. W istocie, Hegerfeldt wykazał [133, 134], że początkowo zlokalizowane pakiety falowe natychmiast rozprzyskują się po całej przestrzeni podczas ewolucji zadanej równaniem Schrödingera z dodatnio określonym hamiltonianem. Jednak fakt ten nie musi implikować operacyjnej możliwości nadświetlnej komunikacji [45]. Powszechnie uważa się [45, 203, 257], że pogodzenie struktury relatywistycznej czasoprzestrzeni z zasadami kwantowymi nie może się dokonać w ramach formalizmu paczek falowych, lecz potrzeba do tego pełnej kwantowej teorii pola.

Prace [H6–H9] stanowią pomost pomiędzy formalizmem czasoprzestrzennym, a operacyjnym postulatem no-signallingu. Opierają się one na ścisłej matematycznej strukturze borelowskich miar probabilistycznych nad różnościami czasoprzestrzennymi, wprowadzonej w pracy [H6] i zainspirowanej wynikami z [H1]. Ponadto, pozwalają one na badanie zagadnienia przyczynowości ewolucji pakietów falowych w ogólnie kowariantnym ujęciu [H7, H8].

4.3.1 Struktura przyczynowa dla miar probabilistycznych [H6]

Niech \mathcal{M} będzie czasoprzestrzenią globalnie hiperboliczną i niech $\mathcal{A} = C_0(\mathcal{M})$ będzie odpowiadającą jej przemienną C^* -algebrą. Wówczas, na mocy twierdzenia o reprezentacji Riesz–Markowa–Kakutaniego [214], stany w przestrzeni $S(\mathcal{A})$ są we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z borelowskimi miarami probabilistycznymi na \mathcal{M} ,

$$S(C_0(\mathcal{M})) \ni \rho \xleftrightarrow{1:1} \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \quad \forall a \in C_0(\mathcal{M}) \quad \rho(a) = \int_{\mathcal{M}} a \, d\mu. \quad (27)$$

Bezpośrednie zastosowanie Definicji 2 prowadzi do następującej struktury.

Definicja 11 ([Def. 1 w H6]). *Niech $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ będzie zbiorem wszystkich gładkich ograniczonych funkcji przyczynowych na czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznej \mathcal{M} . Mając dane miary $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mówimy, że μ poprzedza przyczynowo ν jeśli*

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathcal{M}) \quad \int_{\mathcal{M}} f \, d\mu \leq \int_{\mathcal{M}} f \, d\nu. \quad (28)$$

W pracy [H6] wyprowadziliśmy kilka innych charakteryzacji struktury przyczynowej w przestrzeni borelowskich miar probabilistycznych $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, które są równoważne Definicji 11 przy odpowiednich założeniach dotyczących bazowej czasoprzestrzeni. Najważniejsze z nich zostały podsumowane w następującym twierdzeniu [Thm. 6, 8 i 10 w H6]. Używamy standardowej notacji $J^\pm(X) := \cup_{p \in X} J^\pm(p)$, zaś samodzielny symbol J^+ oznacza przyczynową relację binarną jako podzbiór \mathcal{M}^2 , $J^+ = \{(p, q) \in \mathcal{M}^2, p \preceq q\}$.

Twierdzenie 12. Niech $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ będą borelowskimi miarami probabilistycznymi nad czasoprzestrzenią \mathcal{M} .

1. Niech \mathcal{M} będzie stabilnie przyczynowa. Warunek (28) jest równoważny warunkowi:

$$\text{Dla wszystkich przyczynowych } f \in C_b(\mathcal{M}), \quad \int_{\mathcal{M}} f d\mu \leq \int_{\mathcal{M}} f d\nu. \quad (29)$$

2. Niech \mathcal{M} będzie przyczynowo ciągła. Wtedy warunki (28, 29) są równoważne warunkowi:

$$\text{Dla każdego otwartego zbioru przyszłości } \mathcal{F} \subset \mathcal{M}, \quad \mu(\mathcal{F}) \leq \nu(\mathcal{F}). \quad (30)$$

3. Niech \mathcal{M} będzie przyczynowo prosta. Wtedy warunki (28–30) są równoważne obu następującym warunkom:²

$$\text{Dla każdego zwartego } \mathcal{K} \subset \mathcal{M}, \quad \mu(\mathcal{K}) \leq \nu(J^+(\mathcal{K})). \quad (31)$$

$$\text{Istnieje } \omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2) \text{ taka, że } \omega(\cdot \times \mathcal{M}) = \mu, \omega(\mathcal{M} \times \cdot) = \nu \text{ oraz } \omega(J^+) = 1. \quad (32)$$

4. Niech \mathcal{M} będzie globalnie hiperboliczna. Wtedy warunki (28–32) są równoważne warunkowi:

$$\text{Dla każdej hiperpowierzchni Cauchy'ego } \Sigma \subset \mathcal{M}, \quad \mu(J^+(\Sigma)) \leq \nu(J^+(\Sigma)). \quad (33)$$

Użycie przyczynowej przyszłości, a nie przeszłości w Twierdzeniu 12 jest tylko kwestią konwencji. Możliwe jest równoważne sformułowanie warunków (30–33) przy użyciu J^- oraz zbiorów przeszłości [Rem. 1 w H6].

Podczas gdy Definicja 11 jest czysto formalna, a jej fizyczna interpretacja cokolwiek mglista, równoważne warunki (31, 32) zawarte w Twierdzeniu 12 ukazują istotę pojęcia relacji przyczynowej dla miar prawdopodobieństwa.

Warunek (31) mówi, że dla dowolnego zwartego regionu \mathcal{K} czasoprzestrzeni prawdopodobieństwo nie może „wyciekać” ze stożka przyszłości zbioru \mathcal{K} . W szczególności, jeśli miara μ ma zwarty nośnik, to dla dowolnego ν w stożku przyszłości μ mamy $\text{supp } \nu \subset J^+(\text{supp}(\mu))$. Jest to warunek konieczny, ale nie wystarczający, dla istnienia związku przyczynowego między miarami — zob. przykład i interpretację fizyczną w Sekcji 4.3.2. Warunek (31), wraz z odpowiednim aksjomatem dotyczącym pomiaru, może zostać wykorzystany do sformułowania operacyjnej zasady no-signallingu osadzonej w strukturze relatywistycznej czasoprzestrzeni. To zagadnienie jest omówione szczegółowo w Sekcji 4.3.3.

Z drugiej strony, warunek (32) ukazuje dość nieoczekiwany związek z teorią optymalnego transportu. W tym kontekście miara $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$ o własności (32) zasługuje na miano przyczynowego sprzężenia [ang. causal coupling] lub przyczynowego planu transportu [ang. causal

²Warunek (31) w tej postaci został udowodniony w [H7], natomiast w [H6] został przedstawiony w nieco słabszej wersji z $\mu(J^+(\mathcal{K}))$ w miejscu $\mu(\mathcal{K})$.

transference plan]. W ramach teorii optymalnego transportu dowolną miarę $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$ z ustalonymi marginałami, $\mu = \omega(\cdot \times \mathcal{M}), \nu = \omega(\mathcal{M} \times \cdot) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ nazywamy sprzężeniem [*ang.* coupling] lub planem transportu [*ang.* transference plan]. Można patrzeć na nią jak na plan rekonfiguracji pewnej znormalizowanej ilości „masy”, rozmieszczonej pierwotnie w \mathcal{M} zgodnie z rozkładem μ , na rozkład w kształcie określonym przez ν . Postulat, iż sprzężenie ma być „przyczynowe”, $\omega(J^+) = 1$, oznacza, że rekonfiguracja musi być zgodna ze strukturą przyczynową bazowej czasoprzestrzeni \mathcal{M} . Innymi słowy, warunek (32) formalizuje następującą intuicję [H6]:

Każda infinitesimalna część rozkładu prawdopodobieństwa musi przemieszczać się po skierowanej w przyszłość krzywej przyczynowej.

Głębszy związek pomiędzy strukturą przyczynową dla miar probabilistycznych, a przestrzenią krzywych przyczynowych wyposażoną w odpowiednią topologię, rozwinął T. Miller w pracy [173] — zob. też Sekcję 4.3.2.

Twierdzenie 12 pokazuje, że struktura przyczynowa w przestrzeni $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ nie wymaga koniecznie globalnej hiperboliczności bazowej czasoprzestrzeni \mathcal{M} . Okazuje się, że warunek (32) można zapisać dla dowolnej czasoprzestrzeni (tj. czterowymiarowej czasowo zorientowanej gładkiej rozmaitości lorentzowskiej [182]), nawet takiej, która zawiera pętle przyczynowe. Jest tak dlatego, że zbiór $J^+ \subset \mathcal{M}^2$ jest σ -zwarty w dowolnej czasoprzestrzeni, jak pokazano w [Thm. 4 w H6]. Własność ta jest automatyczna w przyczynowo prostych czasoprzestrzeniach, ponieważ w tym przypadku zbiór J^+ jest domknięty, ale w ogólności dowód jest dość subtelny i opiera się na fakcie, że każdą czasoprzestrzeń można pokryć przeliczalną rodziną prostych zbiorów wypukłych [197]. W konsekwencji można przyjąć warunek (32) jako podstawową definicję relacji przyczynowej dla borelowskich miar probabilistycznych na danej czasoprzestrzeni.

Definicja 13 ([Def. 2 w H6]). *Niech \mathcal{M} będzie czasoprzestrzenią. Mając dane $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mówimy, że μ poprzedza przyczynowo ν , co zapisujemy jako $\mu \preceq \nu$, jeśli istnieje $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$, taka że $\omega(\cdot \times \mathcal{M}) = \mu$, $\omega(\mathcal{M} \times \cdot) = \nu$ oraz $\omega(J^+) = 1$.*

Łatwo sprawdzić, że Definicja 13 dla delt Diraca, które są stanami czystymi na C^* -algebrze $C_0(\mathcal{M})$ sprowadza się do standardowej relacji przyczynowej na czasoprzestrzeni. Istotnie, jedynym sprzężeniem dla miar $\delta_p, \delta_q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ jest $\delta_{(p,q)} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$, zatem $\delta_p \preceq \delta_q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \preceq q$ w zwykłym czasoprzestrzennym sensie [Cor. 5 w H6].

Standardowa relacja przyczynowa na czasoprzestrzeni \mathcal{M} zawsze jest zwrotna i przechodnia, natomiast jest ona antysymetryczna (a więc jest porządkiem częściowym) wtedy i tylko wtedy, gdy \mathcal{M} jest przyczynowa, tzn. nie zawiera pętli przyczynowych [182]. Relacja przyczynowa w przestrzeni $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ dziedziczy te własności, przy minimalnie silniejszych założeniach na \mathcal{M} .

Twierdzenie 14 ([Thm. 11 i 12 w H6]). *Relacja \preceq na $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ z Definicji 13 jest zwrotna i przechodnia w każdej czasoprzestrzeni \mathcal{M} . Ponadto, jest ona antysymetryczna, jeżeli dla każdego zwartego obszaru $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ istnieje borelowska funkcja $\tau_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że*

$$\forall p \neq q \in \mathcal{K} \quad p \preceq q \Rightarrow \tau_{\mathcal{K}}(p) < \tau_{\mathcal{K}}(q). \quad (34)$$

Z własności (34) wynika, że \mathcal{M} jest przyczynowa. Z drugiej strony, jeśli \mathcal{M} rozróżnia przeszłość lub przyszłość [*ang.* future/past distinguishing spacetime], to zawsze można skonstruować uogólnioną borelowską funkcję czasu spełniającą warunek (34) [Rem. 6 w H6]. Zatem warunek wystarczający dotyczący struktury przyczynowej \mathcal{M} , który gwarantuje że relacja przyczynowa w $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ jest porządkiem częściowym jest tylko nieznacznie silniejszy od wymagania braku pętli przyczynowych.

Definicja 13 jest uniwersalna, a zatem może być zastosowana do rozszerzenia dowolnej borelowskiej relacji binarnej na \mathcal{M} na przestrzeń polską $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Na przykład, można ją zastosować do relacji Sorkina–Woolgara [176, 226], co uczyniono w pracy [174], lub relacji pochodzących z geometrii Lorentza–Finslera [150, 232]. W kontekście tej ostatniej Definicja 13 została niezależnie zaproponowana przez S. Suhra w pracy [232].

Odległości Lorentza–Wassersteina Odkryty przez nas związek pomiędzy lorentzowską geometrią czasoprzestrzeni a teorią optymalnego transportu pozwala wyposażyć przestrzeń miar probabilistycznych $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ nie tylko w strukturę przyczynową, lecz także w odpowiednią *lorentzowską funkcję odległości*. Przypomnijmy, że „odległość lorentzowska” nie jest odległością w standardowym sensie matematycznym, lecz funkcją $d_L : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ zdefiniowaną jako [17]

$$d_L(p, q) = \begin{cases} \sup_{\gamma} \tau(\gamma), & \text{jeśli } p \preceq q, \\ 0, & \text{jeśli } p \not\preceq q, \end{cases} \quad (35)$$

gdzie $\tau(\gamma)$ jest czasem własnym wzdłuż kawałkami-gładkiej skierowanej w przyszłość krzywej przyczynowej γ idącej z p do q . Wielkość $d_L(p, q)$ nie musi w ogólności być skończona, ale jest tak dla wszystkich par zdarzeń w czasoprzestrzeniach globalnie hiperbolicznych [17], a skończoność d_L jest równoważna istnieniu pewnych uogólnionych funkcji czasu [211].

Zainspirowani odległościami Monge’a–Kantorowicza–Wassersteina, szeroko stosowanymi w teorii optymalnego transportu i jej fizycznych zastosowaniach (zob. np. [O15] i odnośniki tamże), przedstawiliśmy w pracy [H6] następujące pojęcie.

Definicja 15 ([Def. 3 w H6]). *Niech \mathcal{M} będzie czasoprzestrzenią i niech $s \in (0, 1]$. Odległością Lorentza–Wassersteina rzędu s nazywamy odwzorowanie $LW_s : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \times \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow [0, +\infty]$ określone jako*

$$LW_s(\mu, \nu) := \begin{cases} \sup_{\omega \in \Pi_c(\mu, \nu)} \left(\int_{\mathcal{M}^2} d_L(p, q)^s d\omega(p, q) \right)^{1/s}, & \text{jeśli } \Pi_c(\mu, \nu) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{jeśli } \Pi_c(\mu, \nu) = \emptyset, \end{cases}$$

gdzie $\Pi_c(\mu, \nu)$ oznacza zbiór wszystkich przyczynowych sprzężeń pomiędzy miarami μ and ν .

Funkcje LW_s dziedziczą wiele spośród własności standardowej odległości lorentzowskiej (por. [17, Chap. 4]).

Twierdzenie 16 ([Thm. 13 w H6]). Niech \mathcal{M} będzie czasoprzestrzenią i niech $s \in (0, 1]$. Wtedy:

1. Dla każdych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$

$$LW_s(\mu, \nu) > 0 \iff \exists \omega \in \Pi_c(\mu, \nu) \text{ taka, że } \omega(I^+) > 0 \Rightarrow \mu \preceq \nu.$$

2. Zachodzi odwrotna nierówność trójkąta. To znaczy, dla wszystkich $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$,

$$\mu_1 \preceq \mu_2 \preceq \mu_3 \implies LW_s(\mu_1, \mu_3) \geq LW_s(\mu_1, \mu_2) + LW_s(\mu_2, \mu_3). \quad (36)$$

3. Dla każdego $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $LW_s(\mu, \mu)$ jest równe 0 albo $+\infty$.

4. \mathcal{M} jest chronologiczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ zachodzi $LW_s(\mu, \mu) = 0$.

5. Dla każdych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ jeśli $LW_s(\mu, \nu) \in (0, +\infty)$ to $LW_s(\nu, \mu) = 0$.

Odległości Lorentza–Wassersteina nie muszą być skończone, nawet na czasoprzestrzeniach globalnie hiperbolicznych [Ex. 1 w H6]. Jeżeli jednak \mathcal{M} jest globalnie hiperboliczna i zarówno μ jak i ν mają zwarte nośniki, to $LW_s(\mu, \nu) < \infty$, dla każdego $s \in (0, 1]$.

Opis wkładu autorskiego:

Pomysł skonstruowania ścisłej struktury przyczynowej na przestrzeni miar probabilistycznych nad czasoprzestrzenią pochodził ode mnie i opierał się na ogólnym pojęciu przyczynowości w przestrzeni stanów z pracy [H1]. Pomysł ten został podjęty przez Tomasza Millera, który napisał na ten temat pracę doktorską z matematyki, której to pracy byłem promotorem pomocniczym. Punktem wyjścia naszych wspólnych badań była Definicja 1 [Sec. 4 w H6], która ostatecznie została zastąpiona przez Definicję 2 w [Sec. 4.2 w H6]. Większość badań matematycznych przedstawionych w [H6] została przeprowadzona przez T. Millera, pod moim nadzorem. W szczególności, T. Miller udowodnił równoważność różnych charakteryzacji relacji przyczynowych w [Sec. 4, H6], a także uzyskał wyniki pomocnicze w Sec. 3. Wspólnie rozwinęliśmy pojęcie odległości Lorentza–Wassersteina [Sec. 5 w H6], zainspirowani ogólnymi rozważaniami na temat odległości lorentzowskich w kwantowych czasoprzestrzeniach z [Sec. 5 of H1]. Mój indywidualny wkład w tę pracę, poza początkowym pomysłem, dotyczył fizycznej interpretacji i potencjalnych zastosowań naszych wyników. Zostały one omówione w [Sec. 1 i 6 w H6] oraz w kolejnym artykule [H7]. Artykuł został napisany wspólnie, a ja pełniłem rolę autora korespondującego.

4.3.2 Przyczynowa ewolucja pakietów falowych [H7]

Mając dany układ fizyczny modelowany poprzez C^* -algebrę \mathcal{A} można opisać jego ewolucję w czasie przy użyciu odwzorowania $\mathbb{R} \supset I \rightarrow S(\mathcal{A})$. Jeśli przestrzeń $S(\mathcal{A})$ jest wyposażona w porządek częściowy \preceq , to można badać przyczynowość takiej ewolucji — zob. Def. 9.

A priori, „czas” jest tylko pewnym zewnętrznym parametrem. Jeśli jednak badany układ jest osadzony w relatywistycznej czasoprzestrzeni, wówczas pojęcie czasu jest ściślej. Każda czasoprzestrzeń dopuszcza *lokalne* pojęcie czasu, określone przez wybrany układ współrzędnych. Ten ostatni może być związany z relatywistycznym (pasywnym) obserwatorem, który podróżuje wzdłuż krzywej czasopodobnej i posługuje się zegarem odmierzającym jego czas własny. Taki zegar nie nadaje się jednak do opisu nielokalnych wielkości fizycznych — zarówno klasycznych, np. relatywistycznego pyłu, jak i kwantowych, np. pakietów falowych. Do ich modelowania potrzebne jest *globalne* pojęcie czasu związane z wybraną funkcją czasu $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, które są dostępne w czasoprzestrzeniach stabilnie przyczynowych. W czasoprzestrzeniach globalnie hiperbolicznych istnieją ponadto *funkcje czasu Cauchy’ego*, których poziomiami są hiperpowierzchnie Cauchy’ego, co gwarantuje że problemy ewolucji są dobrze postawione.

Te rozważania doprowadziły do koncepcji ewolucji czasowej miar probabilistycznych na ustalonej rozmaitości czasoprzestrzennej, która została przedstawiona w pracy [H7] i była badana także w pracach [173, 175] oraz [H8]. Niech \mathcal{M} będzie czasoprzestrzenią globalnie hiperboliczną i niech $\mathcal{T} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją czasu indukującą splitting $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma$, z hiperpowierzchnią Cauchy’ego Σ . Zdefiniujemy $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma$, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i rozważmy elementy przestrzeni $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, których nośniki są zawarte w cięciu czasowym w chwili t , tzn. $\text{supp } \mu_t \subset \Sigma_t$. *Ewolucją*, lub też *dynamiką miar*, będziemy nazywać odwzorowanie $t \mapsto \mu_t$. Możemy teraz ściśle zdefiniować przyczynowość takiej ewolucji³.

Definicja 17. *Mówimy, że ewolucja miar $t \mapsto \mu_t$ jest przyczynowa jeśli*

$$\mu_s \preceq \mu_t, \quad \text{dla wszystkich } s \leq t. \quad (37)$$

Oczywiście, definicja ta jawnie zależy od wyboru globalnej funkcji czasu. Jednakże, T. Miller w pracy [173] pokazał, że z każdą przyczynową ewolucją miar można powiązać pewien niezmienniczy obiekt — miarę na przestrzeni wszystkich (niesparametryzowanych) linii świata na czasoprzestrzeni, wyposażoną w odpowiednią topologię. Oznacza to, że istnieje ścisła procedura pozwalająca przepisać ewolucję miary $t \mapsto \mu_t$ w czasie globalnym \mathcal{T} , na inną dynamikę, $t' \mapsto \mu'_{t'}$, bazującą na innej funkcji czasu \mathcal{T}' . W szczególności, jeśli ewolucja miar jest przyczynowa w jednym splittingu czasoprzestrzeni, to jest taka w każdym innym splittingu. Szczegółowa dyskusja tego aspektu jest zawarta w [173, Sec. 2].

Okazuje się, że przyczynowość ewolucji czasowej miar jest ściśle związana z *równaniem ciągłości*, rozumianym w sensie teorio-miarowym [76].

Definicja 18. *Niech $I = [0, T]$, dla pewnego $T > 0$. Mówimy, że ewolucja miar $t \mapsto \mu_t$ spełnia równanie ciągłości z zadaniem zależnym od czasu borelowskim polem prędkości $\mathbf{v} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto \mathbf{v}_t(x)$, jeśli równanie*

$$\partial_t \mu_t + \nabla_x \cdot (\mathbf{v}_t \mu_t) = 0 \quad (38)$$

³Definicja 17 została po raz pierwszy przedstawiona jako [Def. 3 w H7] dla $(n+1)$ -wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego, a w pełnej ogólności w indywidualnym artykule T. Millera [173].

jest spełnione w sensie dystrybucyjnym, tzn. dla wszystkich $\Phi \in C_c^\infty(I \times \mathbb{R}^n)$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_t \cdot \nabla_x \Phi \right] d\mu_t dt = 0. \quad (39)$$

Twierdzenie 19 ([Thm. 3 w H7]). *Niech \mathcal{M} będzie $(n+1)$ -wymiarową czasoprzestrzenią Minkowskiego i niech dynamika miar $t \mapsto \mu_t$ spełnia równanie ciągłości z subluminalnym polem prędkości,*

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|\mathbf{v}_t(x)\| \leq c. \quad (40)$$

Wówczas ewolucja jest przyczynowa w sensie Definicji 17.

Dowód Twierdzenia 19 opiera się na tzw. „zasadzie superpozycji” w teorii optymalnego transportu [22, Thm. 3], zob. też [173]. Powyższe twierdzenie zostało ostatnio uogólnione przez T. Millera na dowolne czasoprzestrzenie globalnie hiperboliczne, a ponadto okazało się, że jest to nie tylko wystarczający warunek na przyczynowość ewolucji miar, ale i warunek konieczny [175]. Innymi słowy, ewolucja miar jest przyczynowa w sensie Definicji 17 wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia (uogólnione) równanie ciągłości z subluminalnym polem prędkości.

Równanie ciągłości współgra z „hydrodynamiczną” interpretacją ewolucji czasowej miar. Miara zależna od czasu μ_t może być postrzegana jako pewien rodzaj płynu, którego całkowita ilość jest zachowana i skończona. Jego „cząstki” płyną zgodnie z polem prędkości \mathbf{v} . Jeśli norma \mathbf{v} jest ograniczona przez prędkość światła, to przepływ jest przyczynowy. Podobne idee dotyczące „przyczynowej propagacji obserwabli” były badane w pracach [113, 114, 125, 250].

Zanim przejdziemy do kwantowej dynamiki falowej, zwróćmy uwagę, że formalizm miar probabilistycznych w czasoprzestrzeni może być wykorzystany do badania przyczynowości przepływu pewnych klasycznych wielkości fizycznych [Sec. II D w H7]. Na przykład jeśli ρ i j są odpowiednio gęstością ładunku i prądu to, zgodnie z równaniami Maxwella, spełniają one równanie ciągłości. Jeśli ρ ma określony znak, a całkowity ładunek jest skończony, to rozkład ładunków ewoluuje przyczynowo. Podobnie, rozważmy klasyczne próżniowe pole elektromagnetyczne o skończonej energii całkowitej. Gęstość energii elektromagnetycznej $u := \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 \right)$ spełnia równanie ciągłości

$$\partial_t u + \nabla_x \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (41)$$

gdzie $\mathbf{S} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ jest wektorem Poyntinga, a zatem jej ewolucja jest przyczynowa. Ogólniej, rozważmy tensor energii–pędu $T_{\mu\nu}$ taki, że $T_{\mu 0}$ jest przyczynowym polem wektorowym (por. [125, Eq. (3.5)]). Zasada zachowania energii przyjmuje (w czasoprzestrzeni Minkowskiego) postać równania ciągłości $\partial_\mu T^{\mu 0} = 0$, z którego wynika, że gęstość energii $\rho := T^{00}$ ewoluuje przyczynowo, pod warunkiem, że energia całkowita $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(0, x) dx$ jest skończona. Ten ostatni przykład pokazuje, że wyniki prac [113, 125] mogą zostać włączone w ścisły formalizm teorii-miarowej.

Przejdźmy teraz do układów kwantowych opisywanych unormowaną funkcją falową $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^k)$, dla pewnego $k \geq 1$, ewoluującą w $(n+1)$ -wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego z wybranym splittingiem. Co do zasady, dynamikę ψ mogłoby określać dowolne zachowujące normę równanie dynamiczne, niekoniecznie równanie Schrödingera. Każda taka dynamika determinuje ewolucję miar zdefiniowanych wzorem $\mu_t(x) = \delta(t) \|\psi(t, x)\|^2 d^n x$. Zauważmy jednak, że nawet jeśli μ_t spełniają jakieś równanie dynamiczne, np. równanie ciągłości, to ewolucja miar nie jest jednoznacznie określona przez μ_0 . Istotnie, dwie początkowe funkcje falowe różniące się o czynnik fazowy zależny od x dadzą te same miary μ_0 , ale różne ewolucje. Zatem dynamikę $t \mapsto \mu_t$ należy traktować jako *efektywną* dynamikę prawdopodobieństwa. W formalizmie kwantowym z ustaloną liczbą cząstek wielkość $\mu_t(\{t\} \times K)$ ma interpretację prawdopodobieństwa wykrycia układu w regionie przestrzeni K w danej chwili czasu t . Na ewolucję miar można również patrzeć czysto operacyjnie, bez odwoływania się do formalizmu kwantowego [H8], co zostało szczegółowo omówione w Sekcji 4.3.3. Z drugiej strony, w ramach kwantowej teorii pola standardowy operator położenia \hat{x} nie jest dobrze określoną lokalną obserwowalną, zob. np. [45, 234]. W tym kontekście można użyć np. operatora położenia Newtona–Wignera [189] lub formalizmu czasoprzestrzennych rozkładów kwantowej teorii pola [59, 247, 248].

W ogólności, Definicję 17 można traktować jako narzędzie do sprawdzania zgodności danego modelu dynamiki prawdopodobieństwa ze strukturą przyczynową czasoprzestrzeni. Pozwala ona nie tylko wykryć ewentualne złamanie przyczynowości, ale także je skwantyfikować w kategoriach skali czasowej, przestrzennej oraz „nadmiarowego prawdopodobieństwa”. To ostatnie można zdefiniować [H7] dla zadanej kwantowej ewolucji paczek falowych w następujący sposób:

$$M(t, \psi_0, \mathcal{K}) := \max \{0, \mu_0(\mathcal{K}) - \mu_t(J^+(\mathcal{K}))\}. \quad (42)$$

Liczbę $M(t, \psi_0, \mathcal{K})$ można traktować jako „pojemność nadświatelnego kanału komunikacyjnego” (por. Sekcja 4.3.3). Ponadto, wielkości

$$\operatorname{argmax}_t M(t, \psi_0, \mathcal{K}), \quad \operatorname{argmax}_{\mathcal{K}} M(t, \psi_0, \mathcal{K})$$

określają charakterystyczne skale łamania przyczynowości w kategoriach, odpowiednio, czasu i długości. Podobna kwantyfikacja łamania przyczynowości w kwantowej dynamice falowej została przedstawiona w pracy [249]. Opiera się one na „prawdopodobieństwie zewnętrznym” $(\mu_0 - \mu_t)(J^+(\operatorname{supp} \mu_0))$. Jej zastosowanie jest jednak ograniczone do miar początkowych μ_0 o zwartych nośnikach.

Pierwszy wynik pokazujący, że Definicja 17 poprawnie oddziela łamanie przyczynowości od nielokalnych efektów kwantowych, wiąże się z równaniem ciągłości (41). I. Białynicki-Birula zauważył w pracach [29–31], że gęstość energii pola elektromagnetycznego ma interpretację probabilistyczną, jako kwadrat modułu *funkcji falowej fotonu*, której ewolucję determinuje odpowiednie równanie Schrödingera. W związku z tym, z Twierdzenia 19 wynika że funkcja falowa fotonu zawsze indukuje przyczynową ewolucję miar na czasoprzestrzeni Minkowskiego, niezależnie od kształtu początkowego pakietu falowego.

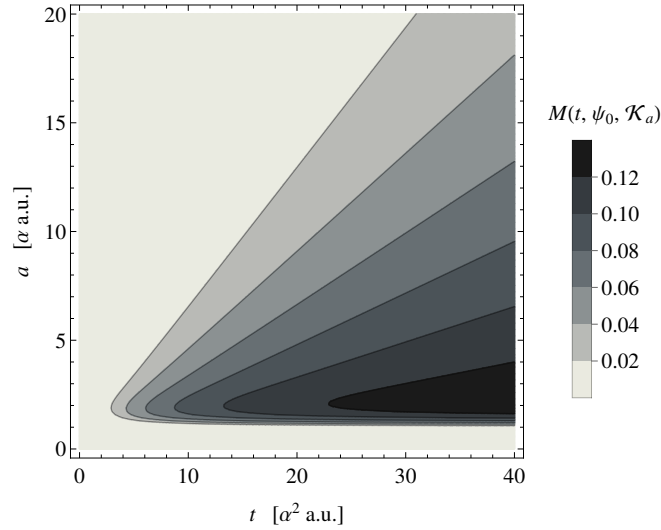
Inne fundamentalne równanie relatywistyczne — równanie Diraca — również implikuje równanie ciągłości, któremu podlega gęstość prawdopodobieństwa $\rho = \psi^\dagger \psi$, z polem prędkości

$\mathbf{v}^k := \psi^\dagger \gamma^k \psi / \rho$. Wynika stąd, iż równanie Diraca również implikuje przyczynową ewolucję miar probabilistycznych [Prop. 10 w H7]. Warto zauważyć, że wynik ten nie zależy ani od wymiaru czasoprzestrzeni, ani od wyboru początkowego pakietu falowego. Ten ostatni może mieć zwarty nośnik lub nie i zawierać części zarówno o dodatniej, jak i ujemnej energii. Pokazuje to w szczególności, że efekt Zitterbewegung nie niweczy przyczynowości propagacji układu.

Aby zademonstrować zastosowanie wielkości (42) w praktyce warto rozważyć nierelatywistyczny model swobodnej masywnej cząstki kwantowej. Weźmy początkową funkcję falową $\psi(0, x) = (\pi d)^{-1/4} e^{-x^2/(2d)}$, z parametrem $d > 0$, na dwuwymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego $\mathbb{R}^{1,1}$, która ewoluuje zgodnie z hamiltonianem $\frac{1}{2m} \partial_x^2$. Dla $\mathcal{K}_a = \{0\} \times [-a, a]$ można łatwo obliczyć

$$\mu_t(J^+(\mathcal{K}_a)) = \int_{-a-t}^{a+t} |\psi(t, x)|^2 dx = \text{Erf} \left(\frac{\sqrt{dm}(a+t)}{\sqrt{d^2 m^2 + t^2}} \right),$$

gdzie Erf jest funkcją błędu. Ponieważ rośnie ona monotonicznie, wnioskujemy, że dla $a > \frac{md}{t} (\sqrt{m^2 d^2 + t^2} + md)$ mamy $\mu_t(J^+(\mathcal{K}_a)) < \mu_0(\mathcal{K})$, a zatem $\mu_0 \not\leq \mu_t$, dla wszystkich $t, d, m > 0$. Rys. 8 pokazuje wielkość łamania przyczynowości, określoną przez (42), w zależności od skali długości (a) oraz czasu (t).



Rysunek 8: Kwantyfikacja łamania przyczynowości w nierelatywistycznym modelu cząstki kwantowej o masie $m = 1 = m_e$ i początkowym stanie gaussowskim o szerokości $d = 1 = \alpha$ a.u.

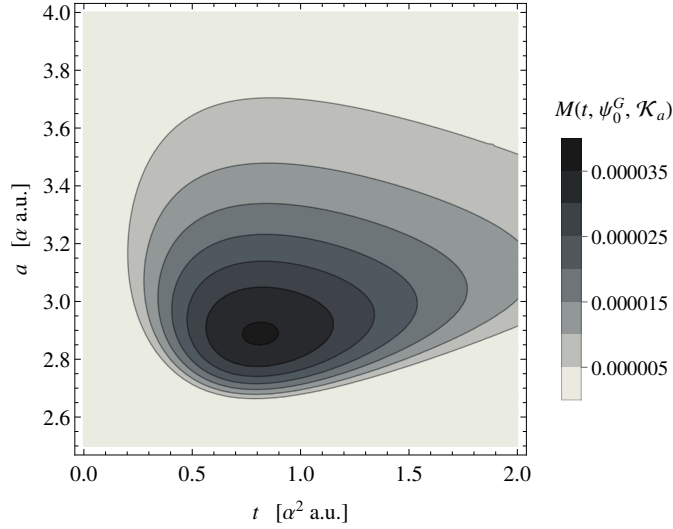
Rys. 8 pokazuje, że jeśli będziemy modelować ruch elektronu (w jednym wymiarze przestrzennym) przy użyciu nierelatywistycznego hamiltonianu, to rozprzestrzenianie się pakietów falowych spowoduje znaczne naruszenie przyczynowości, które narasta w czasie. Z drugiej strony, na skalach charakterystycznych dla kondensatu Bosego–Einsteina ($m \sim 10^{-26}$ kg, $d \sim 1 \mu\text{m}$) nadświetlna propagacja prawdopodobieństw jest widoczna dopiero dla odległości $a \gtrsim 30$ km [H8]. Pokazuje to, że w takim kontekście fizycznym można bezpiecznie stosować modele oparte na nierelatywistycznym równaniu Schrödingera, mimo że co do zasady indukują one łamanie relatywistycznej przyczynowości.

G. C. Hegerfeldt pokazał [133], że równanie Schrödingera z *dowolnym* dodatnim hamiltonianem (może być zależny od czasu) wywołuje natychmiastowe „rozlewanie się” po całej przestrzeni pakietu falowego, który początkowo miał zwarty nośnik. Wynik ten został uogólniony przez Hegerfeldta w pracy [134] na stany początkowe z wykładniczymi ogonami. Wynik ten implikuje, że dla dowolnego $t > 0$ istnieje kula w \mathbb{R}^3 , do której prawdopodobieństwo „wyciekało zbyt szybko” do upływu chwili t .⁴ Wynik Hegerfeldta ma jednak tylko charakter jakościowy, podczas gdy na przedstawionym powyżej nierelatywistycznym przykładzie zobaczyliśmy stosowność badania ilościowego.

W pracy [H7] przeanalizowaliśmy, na podstawie obszernych badań numerycznych [95], łamanie przyczynowości w kwantowej dynamice falowej z relatywistycznym hamiltonianem $\hat{H} = \sqrt{\hat{p}^2 + m^2}$ w $(1+1)$ -wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego, i porównaliśmy je z wynikami pracy [249]. Poniżej przedstawione zostały główne wnioski z tej analizy:

1. To rozpyływanie się pakietu falowego, a nie „uśredniony” ruch, jest odpowiedzialny za łamanie przyczynowości, dlatego wystarczy skupić się na stanach początkowych z zerowym średnim pędem.
2. Dla początkowych pakietów falowych o kształcie gaussowskim łamanie przyczynowości ma charakter przejściowy, co zaobserwowane zostało również w pracy [249] dla stanów o zwartym nośniku. Maksymalne łamanie przyczynowości zachodzi dla $a \sim 2.9 \alpha$ a.u. oraz $t \sim 0.8 \alpha^2$ a.u. i jest ok. 3000 razy mniejsze niż w przypadku nierelatywistycznym — zob. Rys. 9. Od strony fizycznej oznacza to, że efekty łamania przyczynowości są istotne tylko na długościach rzędu fali Comptona cząstki, $\hbar/(mc)$, i na skali czasu rzędu okresu Zitterbewegungu, $\hbar/(mc^2)$. W takim reżimie nie można już zaniedbać procesów kreacji cząstek i nie oczekuje się, że formalizm pakietów falowych będzie adekwatny.
3. Im węższy jest początkowy pakiet falowy, tym większa jest maksymalna ilość łamania przyczynowości. W granicy stricte zlokalizowanego stanu początkowego, $d \rightarrow 0$, otrzymujemy dolne ograniczenie na (42), $M \geq 0.13$, które jest o 60% większe od maksymalnego prawdopodobieństwa zewnętrznego uzyskanego w pracy [249] w odpowiedniej granicy stanów o zwartym nośniku.
4. W przypadku bezmasowym, $m \rightarrow 0$, łamanie przyczynowości ma charakter trwały, a nie przejściowy. Wielkość (42) rośnie monotonicznie i asymptotycznie zbliża się do wartości 0.13, co jest zgodne z poprzednim punktem oraz faktem, iż $M(t, \psi_0; m) = M(mt, \psi_0(\cdot/m); 1)$ (zob. [Eq. (14) w H7]).
5. Dla stanów początkowych postaci $\psi_0^\epsilon(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \operatorname{sech}(\beta x)$, których ogony gasną jak $e^{-\beta|x|}$, ilość łamania przyczynowości maleje z β i nie zaobserwowano łamania dla $\beta \leq m$, co pozornie zgadza się z twierdzeniem Hegerfeldta [134]. W granicy $\beta \rightarrow \infty$ otrzymujemy ponownie asymptotyczną wartość $M \rightarrow 0.13$.

⁴Ścisły wynik Hegerfeldta przedstawiony w pracy [134] został przeanalizowany w [Sec. IV A w H7] i skonfrontowany ze stwierdzeniami podanymi w [136], które okazały się być na wyrost.



Rysunek 9: Kwantyfikacja łamania przyczynowości w modelu z relatywistycznym równaniem Schrödingera.

6. Ograniczenie Hegerfeldta, $\beta \leq m$, okazuje się jednak tylko artefaktem badanej klasy stanów. Dla początkowych pakietów falowych postaci $\psi_0^{SE}(x) = N \frac{\sin x}{x} \operatorname{sech}(\beta x)$ stwierdziliśmy, że $M > 0.0001$, dla wszystkich wartości $0 \leq \beta \leq 4$.
7. W szczególności, łamanie przyczynowości jest również wyraźnie widoczne dla stanów postaci $\psi_0^{SE}(x)$ z $\beta = 0$, które mają ciężkie ogony gasnące jak $\mathcal{O}(x^{-1})$. Istotnie, badania numeryczne przeprowadzone w [95] wyraźnie sugerują, że łamanie przyczynowości zachodzi w ogólności dla klasy stanów początkowych z ciężkimi ogonami $\psi_0^S(x) = N(A, m) \left(\frac{\sin Ax}{Ax}\right)^m$, dla $m \in \mathbb{N}$, $A > 0$ i odpowiedniego współczynnika normalizacji N .

Wyniki przedstawione w pracy [H7] rzucają nowe światło na twierdzenie Hegerfeldta [133, 134] i kontrowersje związane z jego interpretacją, zob. np. [45, 135] lub [195]. W oparciu o te wyniki twierdzimy, iż łamanie relatywistycznej przyczynowości w ramach formalizmu paczek falowych nie wynika jedynie z lokalności (ścisłej, bądź też wykładniczej) stanów początkowych. Wydaje się to raczej być ogólną cechą równania Schrödingera, niekoniecznie z dodatnio określonym hamiltonianem. Jedyne równania dynamiczne dla pakietów falowych, które są w ścisłej zgodzie ze strukturą przyczynową czasoprzestrzeni Minkowskiego, to te, które są jawnie lorentzowsko niezmiennicze. W świetle ostatnich wyników T. Millera [175], wydaje się bardzo prawdopodobne, że ta cecha uogólnia się na zakrzywione globalnie hiperboliczne czasoprzestrzenie.

Z drugiej strony, zastosowane metody kwantyfikacji pokazują, że właściwym pytaniem nie jest „czy” przyczynowość jest łamana, ale raczej „jak bardzo”. „Ilość” łamania przyczynowości powinna być interpretowana jako wskazówka dotycząca granic stosowalności badanego modelu dynamiki, raczej niż faktyczny „problem teorii podstawowej”, jak twierdzi się w pracy [134].

Opis wkładu autorskiego:

Kluczowe pojęcie przyczynowej ewolucji miar przedstawione w pracy [H7] zostało opracowane we współpracy z T. Millerem, krótko po naszej poprzedniej pracy [H6]. Ja zaproponowałem, aby zastosować je badania do kwantowej dynamiki falowej i porównać z twierdzeniem Hegerfeldta i pewnymi nowymi badaniami, np. [249]. Wykonałem również większość analiz numerycznych zawartych w pliku [95], natomiast T. Miller udowodnił związek z równaniem ciągłości (Tw. 19) i przeprowadził formalną analizę wyników Hegerfeldta [Sec. IV A w H7]. Ja napisałem większą część artykułu i zająłem się jego złożeniem w *Phys. Rev. A*.

4.3.3 Operacyjna przyczynowość w relatywistycznej czasoprzestrzeni [H8]

Koncepcja przyczynowej ewolucji miar probabilistycznych na danej czasoprzestrzeni przedstawiona w [H7] ma charakter formalny. Nie jest oczywiste, czy naruszenie warunku (37) może prowadzić do nadświetlnego przesyłu informacji. Jest tak w istocie, jeśli miary modelują klasyczny układ fizyczny, ale w przypadku kwantowym wielkość $\mu(\mathcal{K})$ określa *potencjalną* statystykę detekcji (szersza konceptualna dyskusja na ten temat znajduje się w pracy [O21]). Odpowiada ona na operacyjne pytanie: Jakie jest prawdopodobieństwo wykrycia układu, *jeśli* odpowiedni detektor zostanie umieszczony w obszarze czasoprzestrzeni \mathcal{K} ? Jeśli nie ma detektora, to nie ma w ogóle statystyki, ponieważ „niewykonane eksperymenty nie mają wyników” [202].

Związek pomiędzy formalną definicją (37) a operacyjnym przesyłem informacji został zbadany w artykule [H8]. Przedstawiony tam formalizm jest „czysto operacyjny” co oznacza, że skupia się on wyłącznie na aspekcie teorio-informacyjnym, pomijając szczegóły fizyczne rozważanych układów. W tym kontekście, „detektory” są rozumiane jako „czarne skrzynki”, dające statystykę detekcji (por. np. [44] albo [O14] i odnośniki tamże), podczas gdy „cząstki” są rozumiane jedynie jako nośniki sygnałów. Zaletą takiego podejścia jest jego uniwersalność. Pozwala ono rozpatrywać zarówno modele klasyczne, jak i kwantowe, a także pewne modele probabilistyczne wykraczające poza mechanikę kwantową (zob. Sekcja 4.1.3).

Po pierwsze, należy wprowadzić *agentów*, czyli *aktywnych* obserwatorów, którzy mają swobodę wyboru obszaru czasoprzestrzeni \mathcal{K} i dokonywania binarnego pomiaru sprawdzającego, czy sygnał znajdował się w \mathcal{K} . Taki pomiar jest w ogólności *inwazyjny*, tzn. zmienia statystykę przyszłej detekcji sygnału. W kontekście kwantowym odnosi się to do słynnego „kolapsu funkcji falowej”. Detekcja sygnału, lub jej brak, może wpłynąć na przyszłą statystykę detekcji w różny sposób. Cechy te są uwzględnione w formalizmie dzięki zastosowaniu prawdopodobieństw warunkowych.

Statystyki detekcji $\{P(r|m_{\mathcal{K}})\}$, gdzie $m_{\mathcal{K}} \in \{0, 1\}$ oznacza odpowiednio „pomiar niewykonany” i „pomiar wykonany”, zaś $r \in \{+, -, \emptyset\}$ oznacza odpowiednio „sygnał wykryty”, „sygnał

niewykryty” i „nie dotyczy”, są następujące:

$$\begin{aligned} P(+|1) &= \mu(\mathcal{K}), & P(-|1) &= 1 - \mu(\mathcal{K}), & P(\emptyset|1) &= 0, \\ P(+|0) &= 0, & P(-|0) &= 0, & P(\emptyset|0) &= 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Ponieważ pracujemy w formalizmie jednocząstkowym (tzn. „jedno-sygnałowym”), będziemy zajmować się najprostszym jednokierunkowym protokołem komunikacyjnym. Ustalmy zatem splitting czasoprzestrzeni $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \Sigma$, dwie chwile czasu $s < t$ i przyjmijmy $\mu := \mu_s, \nu := \mu_t$. Zauważmy, że dla dowolnych dwóch lokalnych obserwatorów relatywistycznych zawsze istnieje (niejednoznaczny) globalny splitting zgodny z ich lokalnymi pojęciami równoczesności. Przyjmujemy też skrótową notację $j^+(\mathcal{K}) := J^+(\mathcal{K}) \cap \Sigma_t$.

Wpływ pomiaru w chwili czasu s na miarę w późniejszej chwili t jest zaimplementowany poprzez miary warunkowe

$$\nu(\cdot | m_{\mathcal{K}}), \quad m_{\mathcal{K}} \in \{0, 1\},$$

z oczywistym warunkiem spójności $\nu(\cdot | 0) = \nu$, , gdyż brak pomiaru nie zaburza dynamiki.

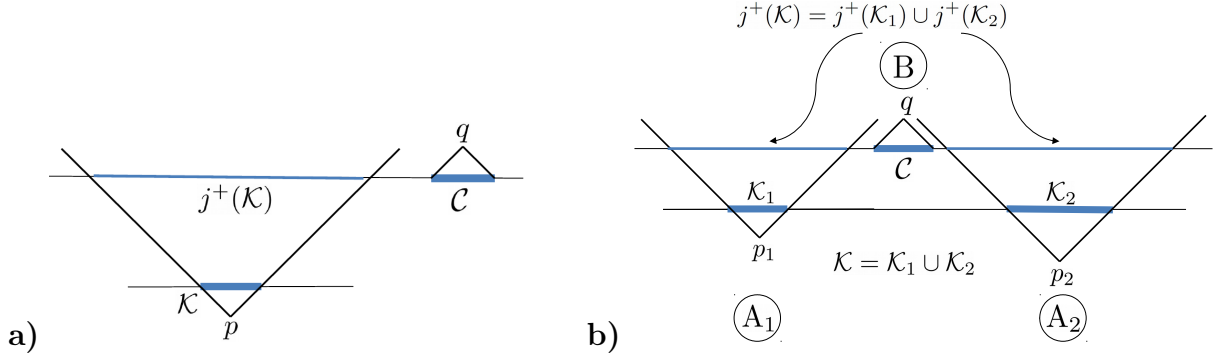
Zasada, iż proces pomiaru w obszarze \mathcal{K} nie może wpływać na (potencjalną) statystykę detekcji poza $J^+(\mathcal{K})$ ujęta w następującym warunku „dynamicznego” *no-signallingu* (NS):

$$\text{Dla dowolnego zwanego } \mathcal{K} \subset \Sigma_s, \mathcal{C} \subset \Sigma_t \setminus j^+(\mathcal{K}), \quad \nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 1) = \nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 0). \quad (44)$$

Przymiotnik „dynamiczny” odnosi się do faktu, iż rozważamy bezpośredni przesył informacji poprzez (być może nielokalny) fizyczny nośnik sygnału propagujący się w czasoprzestrzeni. Jest to podejście komplementarne do standardowych warunków *no-signallingu* [44, 141], które dotyczą dopuszczalnych korelacji pomiędzy przestrzennie rozdzielonymi układami fizycznymi. Jak pokazano w pracy [H8], złamanie warunku (44) zawsze umożliwia operacyjny protokół (statystycznej) nadświetlnej komunikacji, z dobrze określonymi zdarzeniami „nadawania” i „odbierania”.

Warunek (NS) dotyczy możliwego przepływu informacji z obszaru \mathcal{K} do obszaru \mathcal{C} . Załóżmy, że warunek (44) jest złamany, to znaczy istnieją zwarte zbiory $\mathcal{K} \subset \Sigma_s, \mathcal{C} \subset \Sigma_t \setminus j^+(\mathcal{K})$, dla których $\nu(\mathcal{C} | 1) \neq \nu(\mathcal{C} | 0)$. Protokół umożliwiający nadświetlną komunikację jest skonstruowany następująco (zob. Rys. 10 a): Wypełnijmy oba obszary \mathcal{K} i \mathcal{C} detektorami. Nadawca, „Alicja”, koduje bit $m_{\mathcal{K}}$ poprzez decyzję czy uruchomić detektory w \mathcal{K} . Jej decyzja stanowi zdarzenie p w stożku przeszłości obszaru \mathcal{K} . Odbiorca, „Bob”, pasywnie zbiera informacje z detektorów w obszarze \mathcal{C} . Jest to oznaczone zdarzeniem q . Ponieważ $\mathcal{C} \subset \Sigma_t \setminus j^+(\mathcal{K})$, zawsze można tak dobrać te dwa zdarzenia, aby $p \not\prec q$. Bob może wywnioskować statystycznie wartość bitu $m_{\mathcal{K}}$ na podstawie różnicy pomiędzy $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 1)$ i $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 0)$.

Z powyższym protokołem związane są dwie subtelności. Po pierwsze, przesył bitu jest statystyczny, co oznacza, że Alicja musiałaby zakodować sygnał w wielu niezależnych cząstkach, które następnie Bob musiałby wykrywać jedną po drugiej. Sprowadza się to do ponownego uruchomienia detektorów Alicji w kolejnych chwilach czasu s_1, s_2, \dots po pojedynczym zdarzeniu odpowiadającym decyzji Alicji. Z drugiej strony, Bob potrzebuje wielu konsekwentnych



Rysunek 10: [Figs. 1c) i 2 w H8] Ilustracja do Tw. 20 z, a), $k = 1$ nadawcami oraz, b), $k = 2$ nadawcami, z których tylko jeden jest aktywny.

detekcji związanych z kliknięciami jego detektora, na podstawie których zbuduje statystykę. Formalnie sprowadza się to do „rozciągnięcia” w kierunku czasowym zbiorów $\mathcal{K} = \{s\} \times K$ oraz $\mathcal{C} = \{t\} \times C$ na, odpowiednio, $[s, s + \delta] \times K$ oraz $[t, t + \delta] \times C$, dla pewnego $\delta > 0$. Zawsze można znaleźć takie δ , że $\{t + \delta\} \times C \subset \Sigma_{t+\delta} \setminus J^+(\mathcal{K})$, ponieważ zbiór $J^+(\mathcal{K})$ jest domknięty, gdyż \mathcal{M} jest czasoprzestrzenią globalnie hiperboliczną.

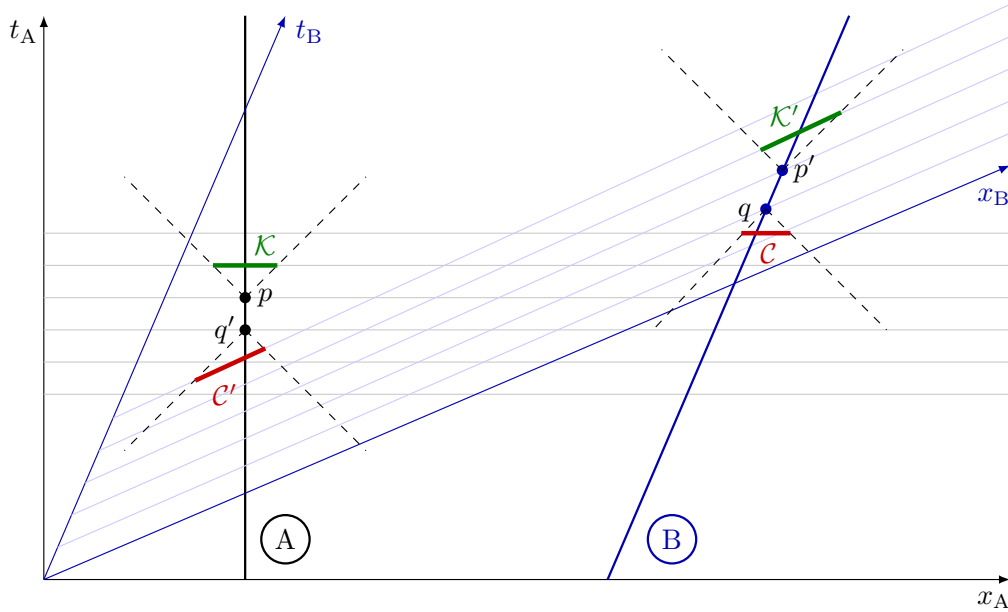
Druga subtelność wynika z faktu, że geometria zbioru K może wymuszać użycie wielu nadawców — zob. Rys. 10 b). Ścisłej rzecz ujmując, mamy następujący wynik:

Twierdzenie 20 ([Thm. 2 w H8]). *Jeśli warunek (44) jest złamany, to zbiór \mathcal{C} , dla którego warunek ten nie obowiązuje, można zawsze wybrać tak, że istnieją punkty w czasoprzestrzeni q, p_1, \dots, p_k takie, że*

$$\mathcal{K} \subset \bigcup_{i=1}^k J^+(p_i), \quad \mathcal{C} \subset J^-(q), \quad \text{oraz} \quad p_i \not\leq q, \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, k. \quad (45)$$

Aby zrozumieć sens Twierdzenia 20 rozważmy $(1 + 1)$ -wymiarową czasoprzestrzeń Minkowskiego i założmy, że zbiór \mathcal{K} , dla którego (NS) jest złamany ma dwie rozłączne składowe, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, jak pokazano na Rys. 10 b). Zauważmy, że ponieważ $\mathcal{C} \subset J^+(J^-(\mathcal{K}_1) \cap J^-(\mathcal{K}_2))$, każde zdarzenie, które leży we wspólnej przeszłości obszarów \mathcal{K}_1 i \mathcal{K}_2 jest również w stożku przeszłości zdarzenia q . Zatem, pomimo iż $\mathcal{C} \subset \Sigma_t \setminus j^+(\mathcal{K})$, to nie zachodzi nadświetlny przesył informacji od Alicji w $J^-(\mathcal{K}_1) \cap J^-(\mathcal{K}_2)$ do Boba w q . Problem ten można rozwiązać rozważając dwoje nadawców „Alicję 1” oraz „Alicję 2”. Założmy teraz, że jedna z nich, powiedzmy Alicja 2, jest pasywna i ma zawsze włączony detektor ($m_{\mathcal{K}_2} = 1$). Aktywny nadawca, Alicja 1, decyduje, czy wykonać pomiar, czy nie ($m_{\mathcal{K}_1} = 1$ or 0), co ustala wartość przekazywanego bitu, ponieważ $m_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} = m_{\mathcal{K}_1} \cdot m_{\mathcal{K}_2} = m_{\mathcal{K}_1}$. Wartość tego bitu Bob może wywnioskować statystycznie na podstawie różnicy pomiędzy $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 1)$ oraz $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 0)$. Zauważmy, iż może się zdarzyć, że $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}_1} = 1) = \nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}_1} = 0)$, ale $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} = 1) \neq \nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} = 0)$ tak, że użycie drugiego — pasywnego — nadawcy jest niezbędne do realizacji protokołu nadświetlnej komunikacji.

Z rozważań tych wynika, że złamanie warunku dynamicznego no-signallingu (44) zawsze ma konsekwencje operacyjne — umożliwia skonstruowanie protokołu do (statystycznego) nadświetlnego przesyłania informacji. Może to prowadzić do paradoksów logicznych — Rys. 11. W rzeczy samej, załóżmy, że \mathcal{M} jest czasoprzestrzenią Minkowskiego i załóżmy, że Bob porusza się względem Alicji ze stałą prędkością. Załóżmy ponadto, że Alicja i Bob mają dostęp do nadświetlnego kanału przesyłu informacji w postaci opisanej powyżej. Mówiąc ściślej, niech Σ^A i Σ^B będą hiperpowierzchniami Cauchy’ego związanymi ze splittingami czasoprzestrzeni Alicji i Boba, odpowiednio, i wybierzmy obszary czasoprzestrzeni $\mathcal{K} \subset \Sigma_s^A$, $\mathcal{C} \subset \Sigma_t^A \setminus J^+(\mathcal{K})$, $\mathcal{K}' \subset \Sigma_{s'}^B$, $\mathcal{C}' \subset \Sigma_{t'}^B \setminus J^+(\mathcal{K}')$ takie, że $\mathcal{C} \subset J^-(\mathcal{K}')$ oraz $\mathcal{C}' \subset J^+(\mathcal{K})$. Załóżmy teraz, że $\nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 1) \neq \nu(\mathcal{C} | m_{\mathcal{K}} = 0)$ i $\nu(\mathcal{C}' | m_{\mathcal{K}'} = 1) \neq \nu(\mathcal{C}' | m_{\mathcal{K}'} = 0)$. Alicja uruchamia nadświetlny protokół (zdarzenie p , $m_{\mathcal{K}} = 1$). Jeśli bit $m_{\mathcal{K}}$ zostanie pomyślnie przekazany do obszaru \mathcal{C} przestrzennie oddzielnego od \mathcal{K} , wtedy Bob uruchamia swój protokół (zdarzenie p' , $m_{\mathcal{K}'} = 1$). Zauważmy, że w tym schemacie Bob może być bierny, czyli jego działanie jest automatyczne. W konsekwencji, bit $m_{\mathcal{K}'}$ jest z kolei statystycznie przekazywany do obszaru \mathcal{C}' oddzielnego przestrzennie od \mathcal{K}' . Jeżeli komunikacja się powiedzie, to Alicja otrzymuje bit $m_{\mathcal{K}'}$ (zdarzenie q'). Ale ponieważ $q' \preceq p$, takie zdarzenie może na przykład zniszczyć laboratorium Alicji, wymuszając w ten sposób $m_{\mathcal{K}} = 0$ z niezerowym prawdopodobieństwem.



Rysunek 11: [Fig. 4 w H8] Ilustracja do paradoksu logicznego wynikającego ze złamania warunku dynamicznego no-signallingu (44) przez dwóch inercjalnych obserwatorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego.

Zasada przyczynowej ewolucji (37) dotyczy miar niezwarunkowanych. Korzystając z równoważnej charakteryzacji (31) wyraża się ona następująco (CE):

$$\text{Dla każdego zwartego } \mathcal{K} \subset \Sigma_s, \quad \mu(\mathcal{K}) \leq \nu(J^+(\mathcal{K})). \quad (46)$$

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma to żadnego związku z warunkiem dynamicznego no-signallingu (44). Jednakże, okazuje się, że jeśli zapostulujemy pewne naturalne aksjomaty dotyczące wpływu pomiaru na statystykę przyszłej detekcji sygnału, to zasada przyczynowej ewolucji miar nabiera sensu operacyjnego. W [H8] zaproponowaliśmy następujące dwa aksjomaty:

(A₊) Jeśli sygnał został wykryty w pewnej chwili czasu s w obszarze \mathcal{K} ($m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = +$), to musi on być obecny z pewnością w przyszłości tego obszaru, $j^+(\mathcal{K})$, dla każdej późniejszej chwili czasu t :

$$\text{Dla każdego zwartego } \mathcal{K} \subset \Sigma_s, \quad \nu(j^+(\mathcal{K}) \mid m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = +) = 1. \quad (47)$$

(A₋) Jeśli sygnał nie został wykryty w pewnej chwili czasu s w obszarze \mathcal{K} ($m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = -$), to poza stożkiem przyszłości $J^+(\mathcal{K})$ ewolucja miary przebiega bez modyfikacji innej niż renormalizacja:

$$\text{Dla każdego zwartego } \mathcal{K} \subset \Sigma_s, \mathcal{C} \subset \Sigma_t \setminus j^+(\mathcal{K}), \quad \nu(\mathcal{C} \mid m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = -) = \frac{\nu(\mathcal{C})}{1 - \mu(\mathcal{K})}. \quad (48)$$

Pierwszy aksjomat (47) jest umotywowany pomiarami destrukcyjnymi, np. absorpcją fotonów w detektorze krzemowym. Gdy sygnał zostaje wykryty, lub też nie, staje się on klasycznym bitem — „kliknięcie” lub „brak kliknięcia” — zapisanym np. w zeszycie laboratoryjnym. Taki sygnał nie może zostać wysłany poza stożek przyszłości zdarzenia detekcji, gdyż implikowałoby to bezpośrednią nadświatłą komunikację.

Motywacja stojąca na aksjomacie (48) opiera się na fakcie, że jeśli sygnał nie został wykryty w obszarze \mathcal{K} , to znaczy, że musi on znajdować się poza \mathcal{K} . Ścisłej mówiąc, bezpośrednio po pomiarze, którego wynik był dodatni, mamy $\mu(\mathcal{K} \mid 1, +) = 1$, a zatem $\mu(\mathcal{K}' \mid 1, +) = 0$ dla każdego $\mathcal{K}' \subset \Sigma_s \setminus \mathcal{K}$. Ponadto, dla każdego takiego \mathcal{K}' musi zachodzić $\mu(\mathcal{K}' \mid 1) = \mu(\mathcal{K}' \mid 0)$, gdyż w przeciwnym razie możliwa byłaby natychmiastowa komunikacja. Wynika z tego, że

$$\mu(\mathcal{K}') = \mu(\mathcal{K}' \mid 1) = \mu(\mathcal{K}' \mid 1, +)P(+ \mid 1) + \mu(\mathcal{K}' \mid 1, -)P(- \mid 1) = \mu(\mathcal{K}' \mid 1, -)(1 - \mu(\mathcal{K})).$$

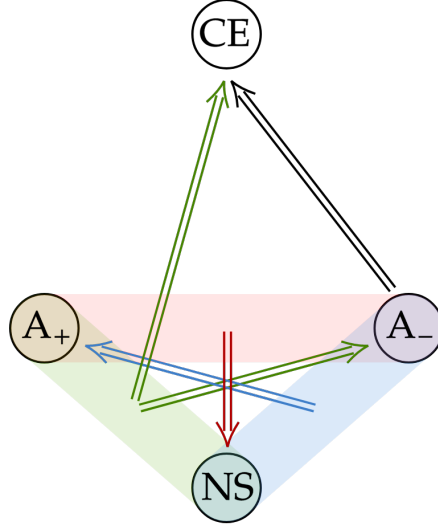
Po dokonaniu „ewolucji w czasie” powyższego warunku otrzymujemy aksjomat (48).

Aksjomaty (A₊) i (A₋), wraz z (NS) i zasadą ewolucji przyczynowej (CE) tworzą elegancką strukturę logiczną, ujętą w Tw. 21 i zilustrowaną na Rys. 12 (por. [Thm. 3 i Fig. 3 w H8])⁵.

Twierdzenie 21. *Dowolne dwa warunki ze zbioru {(NS), (A₊), (A₋)} implikują trzeci. Ponadto, (A₊) i (NS) implikują (CE), a także (A₋) implikuje (CE).*

Powyższe twierdzenie prowadzi do ważnego wniosku, który ukazuje operacyjny sens postulatów przyczynowej ewolucji miar:

⁵Thm. 3 oraz jego ilustracja Fig. 3 z pracy [H8] są bardziej symetryczne, ale nieco słabsze niż Twierdzenie 21. Twierdzenie 21 wyczerpuje wszystkie relacje logiczne pomiędzy czterema aksjomatami. Jego kompletny dowód został przedstawiony w [App. A, Sec. 3 w H8].



Rysunek 12: Schemat logiczny ilustrujący Tw. 21.

Wniosek 22. *Przy założeniu któregośkolwiek z aksjomatów (A_{\pm}) dotyczących wpływu pomiaru na miary, złamanie warunku (CE) implikuje złamanie warunku (NS) , a zatem umożliwia operacyjną nadświetlną komunikację.*

Można też żądać, aby wszystkie miary ewoluowały przyczynowo, a nie tylko te niezwarunkowane:

$$\text{Dla każdego zwartego } \mathcal{K}, \mathcal{K}' \subset \Sigma_s, \quad \mu(\mathcal{K}' \mid m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = \pm) \leq \nu(j^+(\mathcal{K}') \mid m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = \pm). \quad (49)$$

Zauważmy, że powyższy warunek dla $r_{\mathcal{K}} = +$ oraz $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$, stanowi aksjomat (47). Z drugiej strony, warunek (49) *nie* implikuje aksjomatu (48). Dzieje się tak dlatego, że (A_-) mówi, że po negatywnym wyniku pomiaru w \mathcal{K} , ewolucja miary poza $J^+(\mathcal{K})$ nie może się zmienić, podczas gdy (49) implikuje jedynie, że ewolucja poza $J^+(\mathcal{K})$ jest przyczynowa. To wyjaśnia asymetrię pomiędzy aksjomatami (47) i (48) widoczną na Rys. 12.

W pracy [H8] przeanalizowaliśmy przedstawiony system aksjomatów w kontekście formalizmu pakietów falowych. Rozważmy dwóch obserwatorów w czasoprzestrzeni Minkowskiego: aktywną Alicję i pasywnego Boba, oraz kwantowy pakiet falowy, który ewoluuje unitarnie zgodnie z zadaniem hamiltonianem \hat{H} . Detektor Boba, obejmujący obszar \mathcal{C} , jest zawsze włączony. Rozważmy teraz dwa scenariusze:

Przypuśćmy najpierw, że Alicja może wyemitować (przygotować) pakiet falowy ψ_0 o zwartym nośniku zawartym w obszarze \mathcal{K} , przestrzennie rozdzielonym z obszarem \mathcal{C} . Decyduje się ona wyemitować pakiet ($m_{\mathcal{K}} = 1$) lub nie ($m_{\mathcal{K}} = 0$). Zgodnie z twierdzeniem Hegerfeldta [133] jeśli hamiltonian \hat{H} jest ograniczony od dołu, to początkowy pakiet falowy ψ_0 natychmiast zostaje „rozsmarowany” po całej przestrzeni. W konsekwencji, (A_+) jest łamany. Ponadto, (CE) jest łamany, ponieważ $\mu(\mathcal{K}) = 1$, podczas gdy $\nu(j^+(\mathcal{K})) < 1$. Wreszcie, (NS) jest również łamany, gdyż $\nu(\mathcal{C} \mid 0) = 0$ (bo pakiet falowy nie został w ogóle wyemitowany), ale $\nu(\mathcal{C} \mid 1) > 0$.

Przypuśćmy teraz, że Alicja nie może przygotować zlokalizowanych stanów, ale może skłapsować ($m_{\mathcal{K}} = 1$) istniejący kwantowy pakiet falowy ψ_0 , którego nośnikiem może być cała przestrzeń Σ_s . Alicja rejestruje kliknięcie ($m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = +$) z prawdopodobieństwem $\mu(\mathcal{K}) < 1$, a wtedy $\nu(\mathcal{C} | 1, +) = 0$, bo cząstka przestaje istnieć. W tym przypadku aksjomat (A_+) jest oczywiście prawdziwy. Jeśli jednak detektor nie kliknie, choć był włączony ($m_{\mathcal{K}} = 1, r_{\mathcal{K}} = -$), to Bob ma niezerowe prawdopodobieństwo wykrycia sygnału, $\nu(\mathcal{C} | 1, -) > 0$. Jeśli jednak dynamika jest taka, że $\nu(\mathcal{C} | 0) = (1 - \mu(\mathcal{K}))\nu(\mathcal{C} | 1, -) = \nu(\mathcal{C} | 1)$ (a to jest dokładnie (A_-)), to komunikacja nadświetlna nie zachodzi, ponieważ Bob nie może statystycznie rozróżnić sytuacji z ($m_{\mathcal{K}} = 1$) oraz ($m_{\mathcal{K}} = 0$). Ale jeśli dynamika łamie warunek (CE), to wówczas — na mocy Wniosku 22 — (NS) jest również łamany. W konsekwencji, (A_-) także jest łamany.

Jeśli potraktujemy literalnie formalną analizę przeprowadzoną w pracy [H8], to dojdziemy do dość niepokojącego wniosku, że w ogólności równanie Schrödingera umożliwia operacyjną nadświetlną komunikację, poprzez lokalne pomiary. Wniosek ten kontrastuje z faktem, iż struktura iloczynu tensorowego w nierelatywistycznej mechanice kwantowej gwarantuje, iż pomimo tego, że kwantowe korelacje pomiędzy przestrzennie rozdzielonymi układami mogą być silniejsze niż klasyczne, to nie umożliwiają one nadświetlnego przesyłu jakiegokolwiek informacji [44, 86, 255]. W istocie, to właśnie to ostatnie odkrycie doprowadziło do sformułowania ogólnych warunków no-signallingu i uwidoczniło możliwość istnienia teorii probabilistycznych z jeszcze silniejszymi korelacjami (por. Rozdział 4.1.3). Widzimy zatem, że podczas gdy nierelatywistyczna mechanika kwantowa nie łamie relatywistycznej przyczynowości na poziomie korelacji, to czyni to na poziomie dynamiki. Należy również zauważyć, że w kwantowej teorii pola, w której struktura iloczynu tensorowego nie jest już naturalnym opisem układów złożonych, relatywistyczna przyczynowość jest aksjomatem, a nie wtórną cechą formalizmu [128].

Z drugiej strony, jak pokazaliśmy w pracy [H7], należy brać pod uwagę reżim fizyczny, w którym dana teoria jest rozważana, a nie tylko prostą matematyczną sprzeczność pomiędzy dwoma formalnymi pojęciami. Sugeruje to, że łamanie standardowych, „korelacyjnych” warunków no-signallingu powinno być traktowane nie jako logiczna sprzeczność, ale raczej jako wskazówka dotycząca granic stosowalności danego modelu. Pożądane byłoby zatem opracowanie metody kwantyfikacji łamania przyczynowości, podobnej do (42), w ogólnych układach złożonych. Pierwszy krok w tym kierunku został poczyniony w pracy [H9].

Opis wkładu autorskiego:

Badania przedstawione w artykule zostały zainspirowane moimi pracami z T. Millerem [H6, H7]. Przedstawiona aksjomatyka dotycząca dynamicznego no-signallingu, jak również protokół operacyjnej nadświetlnej komunikacji, były wynikiem szeroko zakrojonych badań we współpracy z P. i R. Horodeckimi. T. Miller był odpowiedzialny za warstwę matematyczną zawartą w [App. A w H8]. Ja opracowałem pętlę przyczynową przedstawioną na Rys. 11, skonstruowałem przykład ilustrujący konieczność istnienia wielu nadawców w $(2 + 1)$ -wymiarowej czasoprzestrzeni Minkowskiego [App. B w H8].

Przedstawiłem też zastosowanie nowego formalizmu w kwantowej dynamice falowej [Sec. VI w H8]. Ja również napisałem większą część artykułu i zająłem się jej złożeniem i korektami w *Phys. Rev. A*.

4.3.4 Wielocząstkowa struktura przyczynowa [H9]

Standardowe warunki no-signallingu, omówione w Sekcji 4.1.3, wyrażają zgodność możliwych korelacji pomiędzy wynikami lokalnych pomiarów dokonywanych na nielokalnych układach fizycznych, z relatywistyczną strukturą przyczynową. Z drugiej strony, zasada dynamicznego no-signallingu (44), zaproponowana i badana w pracy [H8], narzuca ograniczenia na dopuszczalną dynamikę pojedynczych „cząstek”, czyli nośników informacji, a także schematów pomiaru w relatywistycznej czasoprzestrzeni. Aby połączyć te dwa podejścia należy rozważyć łączną dynamikę wielu cząstek, która obejmuje zarówno dynamikę poszczególnych cząstek, jak i czasową ewolucję korelacji pomiędzy nimi. W naturalny sposób prowadzi to do koncepcji przestrzeni konfiguracyjnej, używanej w fizyce statystycznej. Jednak w takim ujęciu każda cząstka ma swoje położenie, natomiast czas jest pewnym parametrem zewnętrznym. Jest to bardzo odmienne od zintegrowanego relatywistycznego formalizmu czasoprzestrzennego. W istocie, skonstruowanie kowariantnego opisu dynamiki układów wielu oddziałujących cząstek w czasoprzestrzeni stanowi do dziś nierozwiązany problem [77].

W pracy [H9] udało nam się stworzyć ścisły formalizm matematyczny, który umożliwia relatywistyczny opis ewolucji czasowej układów z ustaloną liczbą cząstek. Co więcej, formalizm ten jest „kowariantny” w odpowiednim „globalnym” sensie.

Mając daną czasoprzestrzeń globalnie hiperboliczną i wybrany splitting $\Xi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \Sigma$ definiujemy, dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$, *czasoprzestrzeń N -konfiguracyjną* jako $\mathcal{M}_{(N)} := \mathbb{R} \times \Sigma^N$. Jest ona naturalnie zanurzona w \mathcal{M}^N za pośrednictwem globalnej funkcji czasowej \mathcal{T} określającej splitting,

$$\iota : \mathcal{M}_{(N)} \rightarrow \mathcal{M}^N, \quad \iota(\mathcal{M}_{(N)}) = \{(p_1, \dots, p_N) \in \mathcal{M}^N \mid \mathcal{T}(p_1) = \dots = \mathcal{T}(p_N)\}.$$

Intuicyjnie, \mathcal{M}^N jest przestrzenią, w której żyją cząstki, natomiast $\mathcal{M}_{(N)}$ jest jej częścią dostępną dla obserwatora. Innymi słowy, wybór globalnej funkcji czasowej synchronizuje współrzędne czasowe ewoluujących N cząstek. Przyjmujemy następującą notację:

$$\mathbf{p} := (t, x^1, \dots, x^N) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{p}^j := \iota^j(\mathbf{p}) = \Xi^{-1}(t, x^j),$$

gdzie $\iota^j : \mathcal{M}_{(N)} \rightarrow \mathcal{M}$ „rzutuje” \mathbf{p} na bazową czasoprzestrzeń j -tą cząstkę.

Czasoprzestrzeń N -konfiguracyjna *nie* jest $(3N + 1)$ -wymiarową czasoprzestrzenią w zwykłym sensie, ponieważ nie jest ona wyposażona w metrykę lorentzowską. Niemniej jednak, można ją wyposażać w „ N -cząstkową strukturę przyczynową” podniesioną ze standardowej relacji przyczynowej w bazowej czasoprzestrzeni \mathcal{M} . Konkretnie, relacja przyczynowa pomiędzy dowolnymi dwoma punktami $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{M}_{(N)}$ jest zdefiniowana jako

$$\mathbf{p} \preceq_{(N)} \mathbf{q} \iff (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in J_{(N)}^+ \subset \mathcal{M}_{(N)} \times \mathcal{M}_{(N)} \iff \forall j \in \{1, \dots, N\} \quad \mathbf{p}^j \preceq \mathbf{q}^j.$$

Analogicznie definiuje się N -cząstkową przeszłość przyczynową $J_{(N)}^-$ oraz chronologiczną przeszłość/przeszłość, $I_{(N)}^\pm$. Dla czytelności, będziemy pomijać indeks (N) w symbolach \preceq i J^+ , gdy dziedzina relacji jest wiadoma na podstawie użycia pogrubionych symboli.

Ważnym pojęciem związanym z czasoprzestrzenią N -konfiguracyjną jest N -cząstkowa krzywa γ , która jest ciągłym odwzorowaniem z przedziału I w $\mathcal{M}_{(N)}$. W naturalny sposób, taka krzywa jest przyczynowa i skierowana w przyszłość, jeśli $\gamma(s) \preceq \gamma(t)$ dla wszystkich $s \leq t$. Ten warunek jest równoważny wymaganiu, aby wszystkie krzywe $\gamma^j := \iota^j \circ \gamma \in C(I, \mathcal{M})$ były przyczynowe i skierowane w przyszłość w standardowym sensie. W istocie, można by równoważnie zdefiniować [Def. 3 w H9] N -cząstkową relację przyczynową (i chronologiczną) bezpośrednio poprzez kawałkami gładkie, skierowane w przyszłość N -cząstkowe krzywe przyczynowe. Te ostatnie są określone poprzez przyczynowość (lub czasopodobność) ich wektorów stycznych: dla dowolnego $\mathbf{p} \in \mathcal{M}_{(N)}$, wektor styczny $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}\mathcal{M}_{(N)}$ jest przyczynowy (lub czasopodobny) i skierowany w przyszłość, jeśli wektory $\mathbf{v}^j := d\iota^j(\mathbf{v}) \in T_{\mathbf{p}^j}\mathcal{M}$ są przyczynowe (odp. czasopodobne) i skierowane w przyszłość w standardowym sensie, dla wszystkich $j = 1, \dots, N$.

N -cząstkowa struktura przyczynowa na $\mathcal{M}_{(N)}$ dziedziczy wiele pożądaných własności ze struktury przyczynowej bazowej czasoprzestrzeni \mathcal{M} [Prop. 4 w H9]. W szczególności, I^\pm jest przeciwzwrotna, przechodnia i otwarta, zaś J^\pm jest domkniętym porządkiem częściowym. Ponadto, dla dowolnego $\mathcal{X} \subset \mathcal{M}_{(N)}$ zbiór $I^\pm(\mathcal{X})$ jest otwarty, dla dowolnego zwarteo $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}_{(N)}$ zbiór $J^\pm(\mathcal{K})$ jest domknięty, a zbiory $J^+(\mathcal{K}) \cap J^-(\mathcal{K}')$ są zwarte dla każdych zwartych $\mathcal{K}, \mathcal{K}' \subset \mathcal{M}_{(N)}$. Można również zdefiniować [Def. 6 w H9] N -cząstkową hiperpowierzchnię Cauchy'ego, $\Sigma \subset \mathcal{M}_{(N)}$, jako hiperpowierzchnię przecinaną dokładnie raz przez każdą nieprzedłużalną N -cząstkową krzywą czasopodobną, i pokazać, że jest ona domkniętą achronalną hiperpowierzchnią topologiczną [Prop. 7 w H9].

Podczas gdy czasoprzestrzeń N -konfiguracyjna, z definicji, zależy od wybranego splittingu, to N -cząstkowa relacja przyczynowa jest niezmiennicza. Rzeczywiście, niech J^+ oznacza naturalne podniesienie J^+ na $\mathcal{M}_{(N)}$. Wówczas, zachodzi $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in J^+ \iff (\iota(\mathbf{p}), \iota(\mathbf{q})) \in \bar{J}^+$. Innymi słowy, struktura przyczynowa w N -konfiguracyjnej czasoprzestrzeni $\mathcal{M}_{(N)}$, skonstruowanej w oparciu o wybrany splitting Ξ , jest obcięciem niezmienniczej struktury przyczynowej na \mathcal{M}^N do jej podzbioru $\iota(\mathcal{M}_{(N)})$. Oczywiście, to samo rozumowanie stosuje się do relacji J^- oraz I^\pm .

Każda czasoprzestrzeń N -konfiguracyjna $\mathcal{M}_{(N)}$ jest przestrzenią polską, a zatem można na niej rozwijać teorię borelowskich miar probabilistycznych. Będziemy używać pogrubionej czcionki do oznaczania miar N -cząstkowych, $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$. Odpowiednie marginały jednocząstkowe otrzymujemy jako miary obrazowe względem ι^j , czyli $\boldsymbol{\mu}^j := \iota_{\#}^j \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ dla wszystkich j . Każda taka miara $\boldsymbol{\mu}$ koduje nie tylko indywidualne gęstości prawdopodobieństwa, $\boldsymbol{\mu}^j$, poszczególnych cząstek, ale także korelacje między nimi. Na przykład, miara iloczynowa

$$\boldsymbol{\mu} = \delta_t \times \mu_1 \times \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(2)}), \quad \text{gdzie} \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\Sigma) \quad (50)$$

opisuje rozkład prawdopodobieństwa dwóch nieskorelowanych cząstek w chwili czasowej t .

Z drugiej strony, symetryczna miara

$$\nu = \delta_t \times \frac{1}{2} (\nu_1 \times \nu_2 + \nu_2 \times \nu_1) \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(2)}), \quad \text{gdzie } \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(\Sigma) \quad (51)$$

opisuje parę nierozróżnialnych cząstek. Istotnie, zachodzi $\nu^1 = \nu^2 = \frac{1}{2}(\nu^1 + \nu^2)$, stąd marginały obu cząstek są takie same. W ogólności, przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$ zawiera wiele innych elementów, o których można myśleć jako o układach „częściowo rozróżnialnych cząstek”.

Relacja przyczynowa w $\mathcal{M}_{(N)}$ może zostać podniesiona do przestrzeni miar N -cząstkowych, $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$ w ten sam sposób jak w pracy [H6] — por. (32).

Definicja 23 ([Def. 9 w H9]). *Dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$, mówimy, że μ przyczynowo poprzedza ν , jeśli istnieje $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)}^2)$ taka, że $\omega(\cdot \times \mathcal{M}_{(N)}) = \mu$, $\omega(\mathcal{M}_{(N)} \times \cdot) = \nu$ oraz $\omega(J^+) = 1$.*

Będziemy używać wciąż tego samego symbolu \preceq na oznaczenie relacji przyczynowej w przestrzeni $\mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$. Podobnie jak w przypadku jednocząstkowym (por. Tw. 12), dopuszcza ona kilka równoważnych charakteryzacji.

Twierdzenie 24 ([Tw. 11 w H9]). *Dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$ następujące warunki są równoważne:*

1. $\mu \preceq \nu$
2. Dla każdego borelowskiego podzbioru $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}_{(N)}$ takiego, że $J^+(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$,

$$\mu(\mathcal{F}) \leq \nu(\mathcal{F}). \quad (52)$$

3. Dla każdego zwartego podzbioru $\mathcal{K} \subset \text{supp } \mu$,

$$\mu(\mathcal{K}) \leq \nu(J^+(\mathcal{K})). \quad (53)$$

4. Dla każdej N -cząstkowej hiperpowierzchni Cauchy’ego $\Sigma \subset \mathcal{M}_{(N)}$,

$$\mu(J^+(\Sigma)) \leq \nu(J^+(\Sigma)). \quad (54)$$

5. Dla każdej ograniczonej funkcji czasowej τ (tzn. ciągłego odwzorowania $\tau : \mathcal{M}_{(N)} \rightarrow \mathbb{R}$ takiego, że $\mathbf{p} \preceq \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ implikuje $\tau(\mathbf{p}) < \tau(\mathbf{q})$),

$$\int_{\mathcal{M}_{(N)}} \tau d\mu \leq \int_{\mathcal{M}_{(N)}} \tau d\nu. \quad (55)$$

Kluczową nową cechą teorii przyczynowości dla N cząstek jest to, że struktura przyczynowa bazowej czasoprzestrzeni ogranicza również prędkość propagacji korelacji. Ścisłej rzecz ujmując, dla każdych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$ zachodzi

$$\mu \preceq \nu \Rightarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \mu^i \preceq \nu^i \right), \text{ ale } \mu \preceq \nu \not\Leftarrow \left(\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \mu^i \preceq \nu^i \right).$$

Innymi słowy, o ile przyczynowość miar N -cząstkowych implikuje przyczynowość wszystkich marginalów, to odwrotne stwierdzenie w ogólności nie jest prawdziwe. Rozważmy na przykład następujące miary:

$$\boldsymbol{\mu} := \frac{1}{2}\delta_s \times (\delta_x \times \delta_y + \delta_y \times \delta_x), \quad \boldsymbol{\nu} := \frac{1}{2}\delta_t \times (\delta_x \times \delta_x + \delta_y \times \delta_y),$$

z ustalonymi chwilami czasu $s < t$ oraz $x, y \in \Sigma$ takimi, że $(s, x) \not\preceq (t, y)$ oraz $(s, y) \not\preceq (t, x)$. Mamy

$$\boldsymbol{\mu}^1 = \boldsymbol{\mu}^2 = \frac{1}{2}\delta_s \times (\delta_x + \delta_y), \quad \boldsymbol{\nu}^1 = \boldsymbol{\nu}^2 = \frac{1}{2}\delta_t \times (\delta_x + \delta_y).$$

Stąd jasno wynika, że $\boldsymbol{\mu}^1 \preceq \boldsymbol{\nu}^1$ oraz $\boldsymbol{\mu}^2 \preceq \boldsymbol{\nu}^2$. Z drugiej strony, dla każdych $K_1, K_2 \subset \Sigma$ takich, że $x \in K_1, y \in K_2$, ale $x \notin K_2, y \notin K_1$ dostajemy $\boldsymbol{\mu}(\mathcal{K}) = 1$, ale $\boldsymbol{\nu}(J^+(\mathcal{K})) = 0$, gdzie $\mathcal{K} = \{s\} \times K_1 \times K_2$. W konsekwencji, $\boldsymbol{\mu} \not\preceq \boldsymbol{\nu}$.

Przez analogię do Def. 17 zdefiniowaliśmy w pracy [H9] ewolucję N -cząstkowych miar jako odwzorowanie $t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$, gdzie $\text{supp } \boldsymbol{\mu}_t \subset \{t\} \times \Sigma^N$, o której mówimy, że jest przyczynowa jeśli $\boldsymbol{\mu}_s \preceq \boldsymbol{\mu}_t$ dla wszystkich $s \leq t$.

Kluczowym wynikiem pracy [H9] jest daleko idące uogólnienie wyników uzyskanych przez T. Millera w pracy [173]. Niech $\Gamma_{(N)}^I$ będzie przestrzenią wszystkich ciągłych N -cząstkowych krzywych przyczynowych $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}_{(N)}$ takich, że $\pi^0 \circ \gamma = \text{id}_I$, ze zwarto-otwartą topologią indukowaną z $C(I, \mathcal{M}_{(N)})$ [Def. 15 w H9]. Można pokazać, że $\Gamma_{(N)}^I$ jest lokalnie zwartą przestrzenią polską [Prop. 16 i 19 w H9] i, co więcej, [Cor. 21 w H9], $\Gamma_{(N)}^{\mathbb{R}}$ jest homeomorficzna z $\mathcal{C}_{\text{inext}}^N$ — N -tą potęgą kartezjańską przestrzeni wszystkich nieprzedłużalnych niesparametryzowanych krzywych przyczynowych w \mathcal{M} .

Twierdzenie 25 ([Tw. 22 2 H9]). *Niech $I \ni t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t$ będzie ewolucją N -cząstkowych miar. Następujące warunki są równoważne::*

1. *Ewolucja $t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t$ jest przyczynowa, tj. $\boldsymbol{\mu}_s \preceq \boldsymbol{\mu}_t$ dla wszystkich $s \leq t$.*
2. *Istnieje $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{P}(\Gamma_{(N)}^I)$ taka, że $(\text{ev}_t)_\# \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mu}_t$ dla wszystkich $t \in I$, gdzie $\text{ev}_t : \Gamma_{(N)}^I \rightarrow \mathcal{M}_{(N)}$ oznacza ewaluację.*

Tw. 25 mówi, że każda przyczynowa ewolucja miar N -cząstkowych jest powiązana z pewną miarą na przestrzeni N -cząstkowych krzywych przyczynowych. Co więcej, dla $I = \mathbb{R}$ miara ta może być rozumiana jako element przestrzeni $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\text{inext}}^N)$. Jako taka jest ona obiektem niezmienniczym, niezależnym od wyboru splittingu bazowej czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznej \mathcal{M} . Jest to fakt godny uwagi. Pokazuje on, że każdej przyczynowej ewolucji czasowej N cząstek, opisywanej w oparciu o wybraną funkcję czasową na \mathcal{M} , odpowiada globalny obiekt w jawnie niezmienniczej przestrzeni $\mathcal{P}(\mathcal{C}_{\text{inext}}^N)$. Ewolucja czasowa N cząstek, opisywana przez odwzorowanie $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M}_{(N)})$ jest zatem *kowariantna*, choć nawet samo pojęcie czasoprzestrzeni N -konfiguracyjnej $\mathcal{M}_{(N)}$ zależy od wybranego splittingu. W istocie, dowolny inny obserwator, który stosuje inną funkcję czasową \mathcal{T}' na \mathcal{M} , obserwuje przyczynową ewolucję $s \mapsto \boldsymbol{\mu}'_s \in \mathcal{P}(\mathcal{M}'_{(N)})$ uzyskaną z $\boldsymbol{\sigma}$ jako $(\text{ev}_s)_\# \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mu}'_s$ dla każdego $s \in \mathbb{R}$.

W pracy [H7] pokazaliśmy i zbadaliśmy związek między przyczynową ewolucją miar i równaniem ciągłości (por. Tw. 19). Pokazaliśmy, że związek ten uogólnia się na układ wielocząstkowy. Niech teraz \mathcal{M} będzie $(n + 1)$ -wymiarową czasoprzestrzenią Minkowskiego z wybranym splittingiem $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definicja 26. Niech $I = [0, T]$ dla jakiegoś $T > 0$. Borelowskie odwzorowanie

$$\mathbf{v} : I \times \mathbb{R}^{nN} \rightarrow \mathbb{R}^{nN}, \quad (t, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) = (v_t^1(\mathbf{x}), \dots, v_t^N(\mathbf{x}))$$

nazywamy polem multi-prędkości. Mówimy, że ewolucja N -cząstkowych miar $t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t$ takich, że $\text{supp } \boldsymbol{\mu}_t \subset \{t\} \times \mathbb{R}^{nN}$, spełnia równanie ciągłości z polem multi-prędkości \mathbf{v} , jeśli równanie

$$\partial_t \boldsymbol{\mu}_t + \sum_{j=1}^N \nabla_j \cdot (v_t^j \boldsymbol{\mu}_t) = 0, \quad (56)$$

gdzie ∇_j różniczkuje względem zmiennej x_j , jest spełnione w sensie dystrybucyjnym, tzn.

$$\forall \Phi \in C_c^\infty(I \times \mathbb{R}^{nN}) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^{nN+1}} \left(\partial_t \Phi + \sum_{j=1}^N v_t^j \cdot \nabla_j \Phi \right) d\boldsymbol{\mu}_t dt = 0. \quad (57)$$

Twierdzenie 27 ([Tw. 28 w H9]). Załóżmy, że ewolucja N -cząstkowych miar $t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t$ spełnia równanie ciągłości z polem multi-prędkości \mathbf{v} takim, że

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN} \quad \forall j = 1, \dots, N \quad \|v_t^j(\mathbf{x})\| \leq c. \quad (58)$$

Wtedy, ewolucja miar $t \mapsto \boldsymbol{\mu}_t$ jest przyczynowa.

Zauważmy, że wielocząstkowe równanie ciągłości (56) implikuje przyczynowy przepływ nie tylko jednocząstkowych marginałów, ale także korelacji między cząstkami.

Tw. 27 umożliwia zastosowanie N -cząstkowego formalizmu w kontekście kwantowych paczek falowych. W pracy [H9] zbadaliśmy dwa wielocząstkowe równania Schrödingera: „wielofotonowe” oraz „wielofermionowe”. Pierwsze z nich jest ważnym narzędziem w optyce kwantowej [223], wykorzystywanym np. do badania dekoherencji podczas propagacji fotonów przez turbulentną atmosferę [222]. Drugie zaś pochodzi od swobodnej (tzn. nieoddziałującej) wersji wielocząstkowego operatora Diraca, który z kolei stanowi podstawę równań Diraca–Focka szeroko stosowanych w dziedzinie fizyki atomowej i chemii kwantowej [94, 101, 103, 122, 162].

N -fotonowa funkcja falowa [223, Eq. (105)] jest skonstruowana z jednofotonowych stanów bazowych, $\{\psi_n(t; x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, w następujący sposób:

$$\Psi(t; \mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} C_\alpha \bigotimes_{j=1}^N \psi_{\alpha_j}(t; x_j), \quad (59)$$

gdzie współczynniki C_α są symetryczne względem zamiany dowolnej pary składowych wieloskaźnika α . Rodzina wektorów $\Psi(t; \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^6)^{\otimes N} \cong L^2(\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{C}^{6N})$ stanowi rozwiązanie równania Schrödingera [223]

$$i\hbar \partial_t \Psi(t; \mathbf{x}) = -i\hbar c \sum_{j=1}^N \beta^{(j)}(S^{(j)} \cdot \nabla^{(j)}) \Psi(t; \mathbf{x}), \quad (60)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\nabla^{(j)} &:= \underbrace{\mathbf{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_6}_{j-1} \otimes \begin{bmatrix} \nabla & 0 \\ 0 & \nabla \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\mathbf{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_6}_{N-j}, \\
\beta^{(j)} &:= \underbrace{\mathbf{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_6}_{j-1} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{1}_3 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_3 \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\mathbf{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_6}_{N-j}, \\
S^{(j)} &:= \underbrace{\mathbf{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_6}_{j-1} \otimes \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \otimes \underbrace{\mathbf{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_6}_{N-j},
\end{aligned} \tag{61}$$

zaś $S = (S_1, S_2, S_3)$ oznaczają wektor generatorów obrotów dla cząstki o spinie 1 (zob. [29]).

Wielofotonowa funkcja falowa determinuje ewolucję wielocząstkowych miar probabilistycznych $\mu_t = \delta_t \times \Psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \Psi(t, \mathbf{x}) d^{3N} \mathbf{x}$. W pracy [H9] pokazaliśmy, iż spełnia ona wielocząstkowe równanie ciągłości (56) z polem multi-prędkości

$$v_t^j(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{\Psi^\dagger(t; \mathbf{x}) c \beta^{(j)} S^{(j)} \Psi(t; \mathbf{x})}{\Psi^\dagger(t; \mathbf{x}) \Psi(t; \mathbf{x})}, & \text{dla } (t; \mathbf{x}) \text{ takich, że } \Psi(t; \mathbf{x}) \neq 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku,} \end{cases}$$

które spełnia warunek (58).

Stosując podobny argument pokazaliśmy również, że „wielofermionowa” funkcja falowa

$$\Psi(t; \mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N} A_\alpha \bigotimes_{j=1}^N \psi_{\alpha_j}(t; x_j), \tag{62}$$

skonstruowana z jednofermionowych stanów bazowych i antysymetrycznych współczynników A_α , spełniająca równanie Schrödingera (z notacją analogiczną do (61))

$$i\hbar \partial_t \Psi = -i\hbar c \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \gamma_0^{(j)} \gamma_k^{(j)} \partial_k^{(j)} \Psi + mc^2 \sum_{j=1}^N \gamma_0^{(j)} \Psi, \tag{63}$$

prowadzi do przyczynowej ewolucji miar wielocząstkowych.

Artykuł [H9] stanowi pierwszy krok w kierunku pełnej relatywistycznej implementacji fundamentalnej zasady no-signallingu, która uwzględniałaby zarówno dynamikę układu, jak i korelacje pomiędzy jego składnikami — „cząstkami”. Pokazaliśmy, że fundamentalne wielocząstkowe kwantowe równania falowe, które uwzględniają również splątanie pomiędzy cząstkami, są zgodne ze strukturą przyczynową czasoprzestrzeni Minkowskiego. Ponadto, na mocy Twierdzenia 25, pojęcie przyczynowości wielocząstkowej dla miar probabilistycznych okazuje się być kowariantne w ścisłym matematycznym sensie. Dwa badane przykłady dotyczą układów skorelowanych, ale nieoddziałujących cząstek. Włączenie oddziaływań może rzucić nowe światło na stary problem opisu układów o stałej liczbie cząstek, który byłby kowariantny w sensie Poincarégo [77]. Wysoce pożądane byłoby również połączenie wyników obu artykułów [H8] i [H9] w celu zbudowania pomostu pomiędzy teorio-informacyjnym podejściem, opartym na koncepcji „czarnych skrzynek” [44], a fizyką relatywistyczną. Oba te zagadnienia są przedmiotem moich obecnych badań.

Opis wkładu autorskiego:

Koncepcja czasoprzestrzeni N -konfiguracyjnej powstała w wyniku długich dyskusji pomiędzy wszystkimi współautorami mających na celu ściśle połączenie geometrii czasoprzestrzeni ze współczesnym rozumieniem nielokalności. Ja napisałem wstęp oraz końcową dyskusję w artykule [H9], w szczególności w odniesieniu do motywacji podjętych badań. Ja również zasugerowałem analizę wieloczątkowych równań falowych. T. Miller jest autorem większości dowodów matematycznych w pracy [H9] i to on był autorem korespondującym.

5 Inne osiągnięcia naukowe

5.1 Inne publikacje naukowe

Do moich publikacji naukowych niewymienionych w Sekcji 4 należą:

- 1 monografia [O1] napisana wspólnie z Brunonem Iochumem;
- 15 artykułów naukowych opublikowanych w recenzowanych czasopismach [O2–O16];
- 1 artykuł naukowy przyjęty do publikacji [O22];
- 1 artykuł w materiałach pokonferencyjnych [O17];
- 2 rozdziały książkowe [O18, O19];
- 3 artykuły naukowe w trakcie recenzji [O20, O21, O23];

Pozostałe publikacje naukowe

- [O1] Michał Eckstein and Bruno Iochum. *Spectral Action in Noncommutative Geometry*, volume 27 of *SpringerBriefs in Mathematical Physics*. Springer, 2018.
- [O2] Piotr T. Chruściel, Michał Eckstein, and Sebastian J. Szybka. [On smoothness of black saturns](#). *Journal of High Energy Physics*, **11**(2010):048, 2010.
- [O3] Piotr T. Chruściel, Michał Eckstein, Luc Nguyen, and Sebastian J. Szybka. [Existence of singularities in two-Kerr black holes](#). *Classical and Quantum Gravity*, **28**(24):245017, 2011.
- [O4] Michał Eckstein. [Degenerating Black Saturns](#). *Journal of High Energy Physics*, **11**(2013):078, 2013.

- [O5] Michał Eckstein. [On projections in the noncommutative 2-torus algebra](#). *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **10**:029, 2014.
- [O6] Leszek Pysiak, Michał Eckstein, Michał Heller, and Wiesław Sasin. [Semidirect Product of Groupoids and Associated Algebras](#). *Demonstratio Mathematica*, **47**(2):289–299, 2014.
- [O7] Michał Eckstein, Bruno Iochum, and Andrzej Sitarz. [Heat trace and spectral action on the standard Podleś sphere](#). *Communications in Mathematical Physics*, **332**(2):627–668, 2014.
- [O8] Michał Eckstein and Artur Zając. [Asymptotic and exact expansions of heat traces](#). *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, **18**(1):1–44, 2015.
- [O9] Michał Eckstein, Andrzej Sitarz, and Raimar Wulkenhaar. [The Moyal sphere](#). *Journal of Mathematical Physics*, **57**(11):112301, 2016.
- [O10] Michał Eckstein and Tomasz Trześniewski. [Spectral dimensions and dimension spectra of quantum spacetimes](#). *Physical Review D*, **102**:086003, 2020.
- [O11] Erik Aurell, Michał Eckstein, and Paweł Horodecki. [Quantum black holes as solvents](#). *Foundations of Physics*, **51**:54, 2021.
- [O12] Michał Eckstein and Paweł Horodecki. [The experiment paradox in physics](#). *Foundations of Science*, **27**:1–15, 2022.
- [O13] Erik Aurell, Michał Eckstein, and Paweł Horodecki. [Hawking radiation and the quantum marginal problem](#). *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **01**(2022):014, 2022.
- [O14] Michał Eckstein and Paweł Horodecki. [Probing the limits of quantum theory with quantum information at subnuclear scales](#). *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **478**(2259):20210806, 2022.
- [O15] Shmuel Friedland, Michał Eckstein, Sam Cole, and Karol Życzkowski. [Quantum Monge–Kantorovich Problem and Transport Distance between Density Matrices](#). *Physical Review Letters*, **129**:110402, 2022.
- [O16] Michał Eckstein. [Conformal Cyclic Cosmology, gravitational entropy and quantum information](#). *General Relativity and Gravitation*, **55**:26, 2023. Invited contribution to the topical collection [Singularity theorems, causality, and all that \(SCRI21\)](#).
- [O17] Michał Eckstein and Nicolas Franco. [Causal structure for noncommutative geometry](#). In *Frontiers of Fundamental Physics 14*, 2016. PoS(FFP14)138.
- [O18] Nicolas Franco and Michał Eckstein. [Noncommutative geometry, Lorentzian structures and causality](#). In M. Eckstein, M. Heller, and S.J. Szybka, editors, *Mathematical Structures of the Universe*, pages 315–340. Copernicus Center Press, 2014.

- [O19] Michał Eckstein. Is *experimentum* still *crucis*? [Czy *experimentum* wciąż jest *crucis*?]. In P. Polak, J. Mączka, and W.P. Grygiel, editors, *Faces of Philosophy in Science [Oblicza filozofii w nauce]*, pages 267–286. Copernicus Center Press, 2017. Article in Polish.
- [O20] Sam Cole, Michał Eckstein, Shmuel Friedland, and Karol Życzkowski. [Quantum optimal transport](#). *preprint arXiv:2105.06922*, 2021. Under review in *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*.
- [O21] Michał Eckstein and Michael Heller. [Causality and time order—relativistic and probabilistic aspects](#). *Preprint arXiv:2202.07302*, 2022. Under review in *Studies in History and Philosophy of Science*.
- [O22] Rafał Bistoń, Michał Eckstein, and Karol Życzkowski. [Monotonicity of the quantum 2-Wasserstein distance](#). *Preprint arXiv:2204.07405*, 2023. Accepted in *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*.
- [O23] Nitica Sakharwade, Michał Studziński, Michał Eckstein, and Paweł Horodecki. [Two instances of random access code in the quantum regime](#). *Preprint arXiv:2208.14422*, 2022. Under review in *New Journal of Physics*.

5.2 Skrótowy opis pozostałych tematów badawczych

5.2.1 Ścisłe rozwiązania równań Einsteina opisujące podwójne czarne dziury [O2–O4]

Moje pierwsze publikacje naukowe dotyczyły ważkiego problemu w fizyce grawitacyjnej: czy odpychanie spin-spin może skompensować przyciąganie pomiędzy dwoma masywnymi ciałami? W kontekście ogólnej teorii względności problem ten sprowadza się do pytania o istnienie i regularność stacjonarnych osiowosymetrycznych rozwiązań próżniowych równań Einsteina, opisujących czarne dziury o niespójnym horyzoncie zdarzeń. Wraz ze współautorami udoskonaliśmy w pracy [O3] dowód Neugebauera–Henniga [187] i wykazaliśmy, że rozwiązania opisujące dwukomponentowe czarne dziury Kerra zawsze zawierają nagie osobliwości. Ten wynik ma bezpośrednie konsekwencje empiryczne w odniesieniu do twierdzeń o jednoznaczności czarnych dziur („No-hair theorems”) [140], które są obecnie testowane w LIGO [148] i EHT [155].

Co ciekawe, ten wynik nie uogólnia się na czasoprzestrzenie o większej liczbie wymiarów. W 2007 roku H. Elvang i P. Figueras znaleźli rozwiązanie $(4 + 1)$ -wymiarowych próżniowych równań Einsteina opisujących stabilną konfigurację czarnego pierścienia wirującego wokół sferycznej czarnej dziury — tzw. „czarny saturn” [100]. Wraz z moimi współpracownikami wykazaliśmy w pracy [O2], że „czarny saturn” istotnie ma gładki obszar zewnętrznej komunikacji [*ang.* domain of outer communication] i stanowi stabilnie przyczynową 5-wymiarową czasoprzestrzeń. Indywidualnie, badałem również możliwość skonstruowania ekstremalnego „czarnego saturna” i udowodniłem, że jest to niemożliwe w ramach rodziny rozwiązań Elvang–Figuerasa. [O4].

Wyżej wymiarowe czarne dziury mają wielorakie zastosowania w teorii strun, w szczególności w kontekście korespondencji AdS/CFT [142].

5.2.2 Ślady operatorów ciepła, działanie spektralne i wymiar spektralny [O1, O7, O8, O10]

Techniki śladów (czy też jąder) operatorów ciepła [*ang.* heat traces (kernels)] mają szerokie zastosowania sięgające od czystej matematyki [117, 118, 124], poprzez fizykę kwantową [46, 243] po matematykę finansową [10]. W pracy [O8] udowodniliśmy, wraz z A. Zającem, pewne ogólne twierdzenia o istnieniu asymptotycznych rozwinięć śladów operatorów ciepła w ogólnym kontekście abstrakcyjnych operatorów nieograniczonych na ośrodkowej przestrzeni Hilberta. W tym celu wykorzystaliśmy i rozszerzyliśmy, przy użyciu ogólnych szeregów Dirichleta, związek pomiędzy śladami operatorów ciepła a spektralnymi funkcjami zeta. Ponadto, podaliśmy warunki wystarczające na zbieżność takich rozwinięć.

Ten ostatni przypadek był po raz pierwszy badany w pracy [O7] w kontekście kwantowej sfery Podlesia S_q^2 [205]. Pokazaliśmy, że rozwinięcie śladu operatora ciepła związanego z operatorem Dąbrowskiego–Sitarza [87] na S_q^2 jest zbieżne i dokładne dla wszystkich wartości parametru rozwinięcia i dowolnego $q \in (0, 1)$. Jest to dość zaskakujące odkrycie, gdyż skądinąd wiadomo, że rozwinięcia śladów operatorów ciepła na rozmaitościach gładkich mają w ogólności zerowy promień zbieżności (zob. np. [O1]). Obliczyliśmy również spektrum wymiarów [*ang.* dimension spectrum], co wymagało adaptacji abstrakcyjnego rachunku pseudoróżniczkowego dla nieregularnych trójek spektralnych.

Ślady operatorów ciepła są również podstawowym narzędziem do obliczania działania spektralnego. To pojęcie, pochodzące z teorii trójek spektralnych, oparte jest na postulatcie, iż fizyczne działanie (bozonowe) może zależeć jedynie od widma operatora Diraca [54]. W zastosowaniu do prawie przemiennych przestrzeni działanie spektralne umożliwia budowanie modeli w fizyce cząstek i kosmologii [166, 242]. W pracy [O7] obliczyliśmy explicite działanie spektralne na sferze kwantowej Podlesia i zbadaliśmy jego fluktuacje, odpowiadające „polom cechowania”. Odkryliśmy, co zaskakujące, że rozwinięcie działania spektralnego dla wysokich energii, które w ogólności jest jedynie asymptotyczne, jest w tym przypadku zbieżne *dla każdej* skali energii.

Moja monografia naukowa [O1], której współautorem jest Bruno Iochum, jest poświęcona matematycznym aspektom działania spektralnego. Zawiera ona udoskonalone i rozszerzone wersje znanych wyników (por. np. [71] i [Chap. 4 w O1]), a także nowe wyniki oparte na artykule [O8] i mojej pracy doktorskiej. Nasza monografia stała się standardowym podręcznikiem poświęconym działaniu spektralnemu w geometrii nieprzemiennej, zob. np. [52, 70, 81, 85, 89].

W moim najnowszym artykule z tej dziedziny [O10] zastosowaliśmy narzędzia śladów operatorów ciepła opracowane przedstawione w pracach [O1, O7, O8] do porównania dwóch pojęć wymiaru przestrzeni kwantowych: wymiaru spektralnego i spektrum wymiarów. Obliczyliśmy takowe dla kilku laplasjanów na kwantowej sferze Podlesia i czasoprzestrzeni κ -Minkowskiego. Odkryliśmy, że wymiar spektralny na sferze kwantowej wykazuje log-periodyczne oscylacje, które zostały przeoczone w znanej pracy dotyczącej kwantowych czasoprzestrzeni [19].

5.2.3 C^* -algebry, K -teoria i grupoidy [O5, O6]

Topologiczna K -teoria zajmuje się badaniem wiązek wektorowych nad przestrzeniami topologicznymi. Jej algebraiczna wersja, stworzona przez A. Grothendiecka, ukazała głębokie związki pomiędzy geometrią, topologią oraz algebrą. Wraz z jej dualną wersją, K -homologią, stanowi ona jedno z podstawowych narzędzi geometrii nieprzemiennej w ujęciu Connesa [68]. K -teoria znalazła również zastosowania w fizyce materii skondensowanej [144] i teorii strun [254].

W samodzielnej pracy [O5] przedstawiłem nową klasę projekcji w algebrze nieprzemiennej torusa, które stanowią uogólnienia projekcji Powersa–Rieffela [212]. Obliczyłem odpowiadające im klasy K -teorii, a także liczby Cherna, związane z twierdzeniem o indeksie [73].

W pracy [O6] badaliśmy pewien szczególny rodzaj półprostych iloczynów grupoidów i związane z nimi produkty krzyżowe wiązek algebr. Od strony fizycznej, badania te były umotywowane poszukiwaniem uogólnionych symetrii wykraczających poza grupę Poincarégo.

5.2.4 Krzywizna przestrzeni nieprzemiennej [O9]

Pojęcie „krzywizny” przestrzeni nieprzemiennej jest niejasne i stosunkowo słabo zbadane. Nawet w przypadku nieprzemiennej torusa, wyposażonego w geometrię spektralną indukowaną przez „konforemnie przeskalowany laplasjan”, istnieją różne podejścia, które dają sprzeczne wyniki [8, 9, 75, 88, 213, 221]. W pracy [O9] zastosowaliśmy formalizm baz ortonormalnych [88] do przypadku płaszczyzny Moyala. Skonstruowaliśmy rodzinę metryk o stałej krzywiznie i obliczyliśmy odpowiadające im człony Gaussa–Bonneta. Znaleźliśmy szczególne rozwiązanie zasługujące na nazwę „metryki Moyala–Fubiniego–Study’ego”, które indukuje geometrię nieprzemiennej „sfery Moyala”.

5.2.5 Kwantowe czarne dziury [O11, O13, O16]

We współpracy z Erikiem Aurellem i Pawłem Horodeckim badaliśmy słynny paradoks informacyjny czarnej dziury [4, 130, 167] przy użyciu metod współczesnej informacji kwantowej. W pracy [O11] pokazaliśmy, rozwijając pewną poboczną uwagę S. Hawkinga [131], że ogromny wzrost entropii zachodzący podczas powstawania czarnej dziury może być powiązany z aktywnością dużej liczby grawitacyjnych kwantowych stopni swobody.

Następnie, w pracy [O13], zastosowaliśmy rozwiązanie problemu kwantowych marginałów [*ang.* quantum marginal problem] dla zmiennej ciągłej [98], aby pokazać, że termalność pojedynczych modów promieniowania Hawkinga jest kompatybilna z globalnym czystym stanem promieniowania. W badanym scenariuszu informacja kwantowa jest zachowywana w procesie powstawania i parowania czarnej dziury, choć wymaga to odejścia od praw *lokalnej* mechaniki kwantowej.

W najnowszym artykule [O16] zastosowałem pomysł przedstawiony w pracy [O11] w kontekście kosmologicznym. Pokazałem, że propozycja R. Penrose’a dotycząca fundamentalnej utraty stopni swobody w czarnych dziurach nie jest zgodna z kwantowym pojęciem entropii (von Neumanna). Zaproponowałem unitarną wersję konforemnej kosmologii cyklicznej Penrose’a [200],

w której informacja kwantowa jest globalnie zachowana podczas ewolucji kosmicznej rozciągniętej na kolejne eony.

5.2.6 Testy mechaniki kwantowej w fizyce cząstek [O14, O23]

W pracy [O14] zaproponowaliśmy, wraz z Pawłem Horodeckim, nowy formalizm teoretyczny do testowania granic teorii kwantowej względem modeli „poza-kwantowych”. Opiera się ona na nowatorskich koncepcjach „Q-data box” i „Q-data test”, które bazują na procedurze tomografii procesów kwantowych [61, 208]. Formalizm ten zakłada, iż prawa mechaniki kwantowej obowiązują poza Q-data boxami, ale dopuszcza możliwość ogólniejszych praw probabilistycznych wewnątrz Q-data boxu. Obejmuje to rozmaite teorie „poza-kwantowe”, w tym: nieliniowe równania Schrödingera [15], korelacje silniejsze niż splątanie (zob. Sekcja 4.1.3) oraz ogólne teorie probabilistyczne (GPT) [60].

Ponadto, w naszej pracy zaproponowaliśmy implementację Q-data testów w eksperymentach akceleratorowych. Konkretnie, argumentowaliśmy, iż pojedyncze nukleony, a także lekkie jądra, mogą być traktowane jako Q-data boxy, co umożliwi przeprowadzenie fundamentalnych testów dotyczących natury (kwantowej, bądź „poza-kwantowej”) silnych oddziaływań jądrowych. Warto podkreślić, iż jest to zupełnie nowy pomysł, diametralnie odmienny od istniejących propozycji badania kwantowości silnego oddziaływania pod kątem klasycznych ukrytych zmiennych, zob. np. [236]. Zaproponowaliśmy konkretny eksperyment, oparty na elastycznym rozpraszaniu w spolaryzowanych zderzeniach elektron-proton, który mógłby zostać zrealizowany w istniejących akceleratorach.

Jeden z Q-data testów przedstawionych w pracy [O14] opiera się na kwantowej wersji protokołu Random Access Code (RAC) [126]. W pracy [O23] wyprowadziliśmy ilościowe ograniczenia na prawdopodobieństwo sukcesu w różnych scenariuszach RAC wykorzystujących zasoby kwantowe. Wyniki przedstawione w artykule [O23] mają zastosowanie nie tylko w badaniach fundamentalnych dotyczących teorii kwantowej zaproponowanych w [O14], ale także w kontekście przetwarzania informacji kwantowej.

5.2.7 Kwantowy optymalny transport [O15, O20, O22]

Prace nad przyczynowością dla miar probabilistycznych [H6] są powiązane z klasyczną teorią optymalnego transportu [246]. W ostatnim czasie rośnie zainteresowanie jej uogólnieniem na przypadek kwantowy, motywowane potencjalnymi zastosowaniami w przetwarzaniu informacji kwantowej (zob. np. [50, 83, 121, 156, 259]).

W pracach [O15, O20] badaliśmy kwantowy analog problemu Monge’a–Kantorowicza. Zidentyfikowaliśmy klasę „kwantowych macierzy kosztów”, które indukują semi-metrykę na przestrzeni macierzy gęstości. Udowodniliśmy również nierówność trójkąta dla przypadku kubitów i użyteczną nierówność obejmującą odległość Buresa i tzw. „root infidelity”. Praca [O20] zawiera szczegółowe opracowanie matematyczne, natomiast artykuł [O15], opublikowany w *Physical Review Letters*, skupia się na aspektach fizycznych. Ponadto, w pracy [O22] przedstawiliśmy

analityczne i numeryczne badania dotyczące monotoniczności kwantowej (semi-)metryki Wassersteina, przedstawionej w [O15, O20], ze względu na kanały kwantowe.

5.2.8 Filozoficzne podstawy fizyki [O12, O21]

Zajmuję się również badaniem filozoficznych i metodologicznych podstaw fizyki.

Metodologia współczesnej fizyki opiera się na dwóch fundamentalnych założeniach: każde zjawisko może być modelowane matematycznie i każdy model teoretyczny może być testowany empirycznie z *a priori* dowolną dokładnością. W pracy z Pawłem Horodeckim [O12] pokazaliśmy, że te dwa postulaty są w rzeczywistości sprzeczne i prowadzą do „paradoksu eksperymentu”. Wykazaliśmy m.in., że słynny („duży”) problem pomiaru w mechanice kwantowej (por. [160]) jest szczególnym przykładem paradoksu eksperymentu.

W ostatniej pracy z Michałem Hellerem [O21] badaliśmy wzajemne związki pomiędzy relatywistycznymi i probabilistycznymi aspektami czasu i przyczynowości. W tym celu przedstawiliśmy rozszerzoną analizę filozoficzną formalizmu teorii-miarowego z prac [H6–H8] i [173] oraz pokazaliśmy paralelę z dobrze znaną aksjomatyzacją ogólnej teorii względności w ujęciu Ehlersa, Piraniego i Schilda [99].

5.3 Współpraca międzynarodowa

5.3.1 Lista współpracowników naukowych

W trakcie mojej kariery naukowej aktywnie współpracowałem z 22 uczonymi związanymi z instytucjami badawczymi w Austrii, Belgii, Francji, Kanadzie, Niemczech, Polsce, Szwecji, USA i Watykanie. Poniższa lista zawiera wszystkich moich współautorów wraz z ich afiliacjami, którymi posługiwali się w czasie naszej współpracy.

1. **Erik Aurell**, współautor prac [O11, O13]
 - KTH-Royal Institute of Technology, Sztokholm, Szwecja
2. **Rafał Bistroń**, współautor pracy [O22]
 - Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
3. **Piotr Chruściel**, współautor prac [O2, O3]
 - Gravitational Physics, University of Vienna, Austria
4. **Sam Cole**, współautor prac [O15, O20]
 - Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO, USA
5. **Nicolas Franco**, współautor prac [H1–H4] and [O17, O18]
 - Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska

- Namur Center for Complex Systems (naXys) & Department of Mathematics, University of Namur, Belgium
6. **Shmuel Friedland**, współautor prac [[O15](#), [O20](#)]
 - Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Illinois, Chicago, USA
 7. **Michael Heller**, współautor prac [[O6](#), [O21](#)]
 - Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
 - Vatican Observatory, Watykan
 8. **Paweł Horodecki**, współautor prac [[H8](#), [H9](#)] oraz [[O11](#)–[O14](#)]
 - Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych, Uniwersytet Gdański, Polska
 - Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej, Politechnika Gdańska, Polska
 9. **Ryszard Horodecki**, współautor prac [[H8](#), [H9](#)]
 - Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych, Uniwersytet Gdański, Polska
 10. **Bruno Iochum**, współautor prac [[O1](#), [O7](#)]
 - Centre de Physique Théorique, CNRS, Aix–Marseille Université, Francja
 11. **Tomasz Miller**, współautor prac [[H4](#), [H6](#)–[H9](#)]
 - Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
 - Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, Polska
 12. **Luc Nguyen**, współautor pracy [[O3](#)]
 - Department of Mathematics, Princeton University, NJ, USA
 13. **Leszek Pysiak**, współautor pracy [[O6](#)]
 - Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, Polska
 14. **Nitica Sakharwade**, współautor pracy [[O23](#)]
 - Międzynarodowe Centrum Teorii Technologii Kwantowych, Uniwersytet Gdański, Polska
 - Perimeter Institute for Theoretical Physics & Department of Physics and Astronomy, University of Waterloo, Waterloo, ON, Kanada
 15. **Wiesław Sasin**, współautor pracy [[O6](#)]
 - Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, Polska

16. **Andrzej Sitarz**, współautor prac [O7, O9]
 - Instytut Fizyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
 - Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, Polska
17. **Michał Studziński**, współautor pracy [O23]
 - Instytut Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki, Uniwersytet Gdański, Polska
18. **Sebastian Szybka**, współautor prac [O2, O3]
 - Obserwatorium Astronomiczne Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, Polska
19. **Tomasz Trzeźniewski**, współautor pracy [O10]
 - Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
20. **Raimar Wolkenhaar**, współautor pracy [O9]
 - Mathematisches Institut der Westfälischen Wilhelms-Universität, Münster, Niemcy
21. **Artur Zając**, współautor pracy [O8]
 - Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
22. **Karol Życzkowski**, współautor prac [O15, O20, O22]
 - Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Jagielloński, Kraków, Polska
 - Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, Polska

5.3.2 Prezentacje na konferencjach naukowych i seminariach

Wygłosiłem 34 referaty na międzynarodowych konferencjach naukowych, z czego 16 na zaproszenie — pełna lista znajduje się w załączonym „Wykazie osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny”. Ponadto wygłosiłem szereg zaproszonych wystąpień seminaryjnych w instytucjach akademickich na całym świecie:

- 8.07.2021, Quantum Information and Quantum Computers Working Seminar, Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk, Warszawa, tytuł wykładu: “Quantum optimal transport”, [nagranie wykładu](#).
- 26.01.2020, Quantum Gravity Seminar, Radboud University, Nijmegen, Niderlandy, tytuł wykładu: “From spectral dimension to dimension spectrum and back”.
- 3.09.2019, Quantum Foundations Seminar, Perimeter Institute, Waterloo ON, Kanada, tytuł wykładu: “Operational causality in spacetime”, [nagranie wykładu](#).
- 24.03.2017, Séminaire Interactions Fondamentales, Centre de Physique Théorique, Marseille, Francja, tytuł wykładu: “Causality without events”.

- 24.11.2016, Quantum Information Seminar, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski, tytuł wykładu: “Causality in the quantum world”.
- 20.10.2016, Quantum Gravity seminar, Perimeter Institute, Waterloo, ON, Kanada, tytuł wykładu: “Causality in the quantum world”, [nagranie wykładu](#).
- 29.06.2016, JTF Seminar, Krajowe Centrum Informatyki Kwantowej, Sopot, Poland, tytuł wykładu: “The noncommutative geometry of space of states”.
- 15.04.2016, Seminarium Instytutu Fizyki Teoretycznej Uniwersytetu Wrocławskiego, Polska, tytuł wykładu: “The noncommutative geometry of fundamental interactions”.
- 7.03.2016, Noncommutative Geometry Seminar, IMPAN, Warszawa, Polska, tytuł wykładu: “Causal relation in noncommutative spaces”, [nagranie wykładu](#).
- 4.12.2015, Vienna relativity lunch seminar, University of Vienna, Austria, tytuł wykładu (wygłoszonego wspólnie z T. Millerem): “Causality for nonlocal phenomena”.
- 23.04.2015, Differential Geometry seminar, Institute of Mathematics, Potsdam University, Niemcy, tytuł wykładu: “Asymptotic and convergent expansions of heat traces”.
- 27.11.2014, Operator Algebra and Noncommutative Geometry Seminar, University of Wollongong, Australia, tytuł wykładu: “The peculiar geometry of Podleś sphere”.
- 11.11.2014, Pure Maths Seminar, School of Mathematics and Statistics, University of New South Wales, Sydney, Australia, tytuł wykładu: “Heat traces – asymptotic and exact expansion”.
- 28.04.2014, Noncommutative Geometry Seminar, IMPAN, Warszawa, Polska, tytuł wykładu: “Examples of asymptotic and exact expansions of heat traces”, [nagranie wykładu](#).
- 3.04.2013, Séminaire de Physique Mathématique, Université Paris Diderot-Paris 7, Francja, tytuł wykładu: “Causal Structure for Noncommutative Geometry”.
- 5.11.2012, Noncommutative Geometry Seminar, IMPAN, Warszawa, Polska, tytuł wykładu: “Spectral properties of the standard Podleś quantum sphere”, [nagranie wykładu](#).
- 20.06.2012, Seminar of Quantum Field Theory and Mathematical Physics, DESY, Hamburg, Niemcy, tytuł wykładu: “Spectral Action – overviews and outlooks”.
- 25.05.2012, Séminaire Physique mathématique, Université Claude Bernard, Lyon, Francja, tytuł wykładu: “Analysis on standard quantum sphere”.
- 27.07.2010, Algebraic Seminar, University of New Brunswick, Fredericton, Kanada, tytuł wykładu: “Anomalies on Spectral Triples”.

6 Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne oraz popularyzujące naukę

6.1 Osiągnięcia promotorskie i dydaktyczne

- Promotor pomocniczy (z dr. hab. Leszkiem Pysiakiem) doktoratu z matematyki Tomasza Millera, obronionego z wyróżnieniem w listopadzie 2017 na Politechnice Warszawskiej.
- Opiekun studenta pierwszego roku fizyki Piotra Słowika, Uniwersytet Jagielloński (2020).
- Autor kursu e-learningowego [Algebra 1](#) na platformie CopernicusCollege.
- Wykładowca przedmiotów „Repetytorium matematyczne dla studentów biofizyki” oraz „LaTeX i Mathematica dla studentów matematyki”, Uniwersytet Jagielloński (2011/2012, 2013/2014).

6.2 Popularyzacja nauki

6.2.1 Artykuły popularnonaukowe

1. M. Eckstein, P. Horodecki, „[Nadchodzi era kwantów](#)”, *Tygodnik Powszechny* 20/2022, dodatek „Copernicus Festival 2022”, 9.05.2022.
2. M. Eckstein, „Recenzja. Przewodnik po wieloświecie”, *Postępy Fizyki* T.72, z.4, 35–37 (2021).
3. M. Eckstein, „[Liczby zmyślone](#)”, *Tygodnik Powszechny* 21/2021, dodatek „Copernicus Festival 2021”, 17.05.2021.
4. M. Eckstein, „[Trzeba słuchać matematyki](#)”, *Tygodnik Powszechny* 11/2021, dodatek „85. Jubileusz ks. prof. Michała Hellera”, 8.03.2021.
5. M. Eckstein, „[Spłaszczyć krzywą](#)”, *Tygodnik Powszechny* 13/2020, 23.03.2020.
6. M. Eckstein, „[W poszukiwaniu fundamentów](#)”, *Tygodnik Powszechny* 12/2020, dodatek „Wielkie pytania na nowo #5: Teorie wszystkiego”, 17.03.2020.
7. M. Eckstein, „[Wielkie miraż](#)”, *Tygodnik Powszechny* 34/2019, 19.08.2019.
8. M. Eckstein, „[Literat w świecie kwarków](#)”, *Tygodnik Powszechny* 23/2019, 3.06.2019.
9. M. Eckstein, T. Miller, „[Kosmiczne przypadki Paula Daviesa](#)”, *Tygodnik Powszechny* 20/2019, dodatek „Copernicus Festival 2019”, 13.05.2019.
10. M. Eckstein, P. Horodecki, „[Historia pewnej nierówności](#)”, *Tygodnik Powszechny* 13/2018, dodatek „Wielkie pytania #9: Przełomy w fizyce”, 19.03.2018.

11. M. Eckstein, „[Jakie poznaliśmy sekrety Wszechświata](#)”, *Tygodnik Powszechny* 1-2/2018, 22.12.2017.
12. M. Eckstein, T. Miller, „[Chemiczny wypadek](#)” [wywiad z Paulem Daviesem], *Tygodnik Powszechny* 18-19/2017, dodatek „Wielkie pytania #3: Życie/nie-życie”, 23.04.2017.
13. M. Eckstein, „[Jak uwierzyłem w cykliczny Wszechświat](#)”, *Tygodnik Powszechny* 5/2017, 23.01.2017.
14. M. Eckstein, „[Co dwa wahadła, to nie jedno](#)”, *Tygodnik Powszechny* 48/2016, dodatek „Wielkie pytania #3: Porządek i chaos”, 20.11.2016.
15. M. Eckstein, „[Paradoks eschatologicznego optymizmu](#)”, *Znak* 734–735, 4.07.2016.
16. M. Eckstein, „[Dlaczego nie chcę być łowcą grantów](#)”, *PAUza Akademicka* 338–339 (2016).
17. M. Eckstein, „[Ryszard Horodecki – Poeta w świecie kwantów](#)”, *Tygodnik Powszechny* 21/2016, dodatek „Copernicus Festival 2016”, 16.04.2016.
18. M. Eckstein, „[Gorzej niż wykład](#)” [krótka anegdota], *Tygodnik Powszechny* 12/2016, dodatek „80. Urodziny Ks. Michała Hellera”, 12.03.2016.
19. M. Eckstein, T. Miller, „[Wszechświat nieprzemienny](#)”, *Tygodnik Powszechny* 12/2016, dodatek „80. Urodziny Ks. Michała Hellera”, 12.03.2016.
20. M. Eckstein, „[Nowe oko na Wszechświat](#)”, *Tygodnik Powszechny* 9/2016, 21.02.2016.
21. M. Eckstein, „[Odkrycie obrócone w pył](#)”, *Tygodnik Powszechny* 41/2015, 5.10.2015.
22. M. Eckstein, „[Kwarkowy kwintet z Genewy](#)”, *Tygodnik Powszechny* 30/2015, 20.07.2015.

6.2.2 Wykłady popularnonaukowe

Od 2015 roku wygłaszam corocznie wykład popularny w ramach cyklu „Granice Nauki” organizowanego przez Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych UJ. Wykłady są transmitowane na żywo (od 2019 roku) i zamieszczane na kanale YouTube [Copernicus](#). Moje 8 wykładów ma łączną liczbę wyświetleń znacznie przekraczającą milion:

- 31.03.2022, [Granice mechaniki kwantowej](#), 174’000+ wyświetleń.
- 21.04.2021, [Podróż do wnętrza protonu](#), 360’000+ wyświetleń.
- 20.02.2020, [Czy można złamać prawa fizyki?](#), 117’000+ wyświetleń.
- 25.03.2019, [Datamorgana – miraż w wielkich bazach danych](#), 42’000+ wyświetleń.
- 11.01.2018, [Historia pewnej nierówności](#), 175’000+ wyświetleń.

- 16.02.2017, [Wszechświat przed Wielkim Wybuchem](#), 250'000+ wyświetleń.
- 11.05.2016, [Tańczące neutrino](#), 27'000+ wyświetleń.
- 21.10.2015, [Sto lat genialnej teorii Einsteina](#), 23'000+ wyświetleń.

Wygłaszałem również wykłady popularnonaukowe przy innych okazjach. Niektóre z nich są dostępne na YouTube:

- 22.01.2020, Goyki 3 ArtInkubator, Sopot, [Zaproszenie do Matematycznego Wszechświata](#).
- 22.11.2018, Księgarnia Vademecum, Gdynia, Wolność w świecie kwantów.
- 8.03.2018, Uniwersytet Humanistyczno-Przyrodniczy im. Jana Długosza w Częstochowie, wykład popularnonaukowy dla artystów: [Obraz Wszechświata](#).
- Trzy wykłady w ramach cyklicznych spotkań młodych naukowców „PAUeczka” w Polskiej Akademii Umiejętności:
 - 7.12.2011, (Zbyt) szybkie neutrino.
 - 13.05.2009, Model Standardowy Cząstek Elementarnych.
 - 25.03.2009, Prawdy nauki i wiary.

6.2.3 Audycje radiowe i podcasty

- Rozmowa z Jimem Ranchlerem po angielsku pt. „Causality, Time and the Experiment Paradox” („Przyczynowość, czas i paradoks eksperymentu”) w ramach podcastu [Physics Frontiers # 65](#), 22.05.2022, 11'710+ słuchaczy.
- Rozmowa z Anną Łoś w ramach reportażu „[Gwiazdy](#)”, Polskie Radio Kraków, 30.05.2017.

6.2.4 Inna działalność popularyzatorska

- Koordynacja cyklicznych wykładów popularnonaukowych „[Matematyczny Wszechświat](#)”, Goyki 3 Art Inkubator, Sopot (od 2020).
- Prowadzenie wykładu otwartego Paula Daviesa „[Information and the Language of Life](#)” w ramach Copernicus Festival, transmitowanego na żywo na YouTube, 22.05.2019.
- Otwarta dyskusja z Michałem Hellerem pt. „[Przestrzenie Wszechświata. Od geometrii do kosmologii](#)”, transmitowana na żywo na YouTube, 13.03.2017.
- [Wywiad z Michałem, Pawełem and Ryszardem Horodeckimi](#) w ramach Copernicus Festival, 8.07.2016.

- Organizacja i poprowadzenie wydarzenia „Usłyszeć kształt Wszechświata”, na które składały się cztery wykłady popularnonaukowe przeplatane utworami Chopina, Akademia Muzyczna im. Krzysztofa Pendereckiego w Krakowie, 17.10.2015.
- Otwarta dyskusja z Michałem Hellerem pt. „Czy fizyka musi być matematyczna?”, nagrana i dostępna w serwisie YouTube, 1.07.2015.

7 Wybrane nagrody i wyróżnienia

- Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców, 2022.
- Stypendium START Fundacji na rzecz Nauki Polskiej, 2016.
- Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego za wybitne osiągnięcia, 2010.

Literatura

- [1] A. Abdo et al. Testing Einstein’s special relativity with Fermi’s short hard γ -ray burst GRB090510. *Nature*, 462:331, 2009.
- [2] A. Acín, T. Fritz, A. Leverrier, and A. B. Sainz. A combinatorial approach to nonlocality and contextuality. *Communications in Mathematical Physics*, 334(2):533–628, 2015.
- [3] E. Akofor, A. P. Balachandran, and A. Joseph. Quantum fields on the Groenewold–Moyal plane. *International Journal of Modern Physics A*, 23(11):1637–1677, 2008.
- [4] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, and A. Tajdini. The entropy of Hawking radiation. *Reviews of Modern Physics*, 93:035002, Jul 2021.
- [5] L. Alvarez-Gaumé, J. L. Barbón, and R. Zwickly. Remarks on time-space noncommutative field theories. *Journal of High Energy Physics*, 2001(05):057, jun 2001.
- [6] G. Amelino-Camelia. Quantum-spacetime phenomenology. *Living Reviews in Relativity*, 16(5), 2013.
- [7] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N. Mavromatos, D. Nanopoulos, and S. Sarkar. Tests of quantum gravity from observations of γ -ray bursts. *Nature*, 393(6687):763–765, 1998.
- [8] J. Arnlind. Curvature and geometric modules of noncommutative spheres and tori. *Journal of Mathematical Physics*, 55(4):041705, 2014.
- [9] P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp, and J. Wess. A gravity theory on noncommutative spaces. *Classical and Quantum Gravity*, 22(17):3511, 2005.
- [10] I. Avramidi. *Heat Kernel Method and its Applications*. Birkhäuser Basel, 2015.
- [11] A. P. Balachandran, A. Joseph, and P. Padmanabhan. Causality and statistics on the Groenewold–Moyal plane. *Foundations of Physics*, 40(7):692–702, 2010.
- [12] J. Barrett. Information processing in generalized probabilistic theories. *Physical Review A*, 75:032304, Mar 2007.

- [13] A. O. Barut and A. J. Bracken. *Zitterbewegung* and the internal geometry of the electron. *Physical Review D*, 23:2454–2463, May 1981.
- [14] A. Bassi and K. Hejazi. No-faster-than-light-signaling implies linear evolution. A re-derivation. *European Journal of Physics*, 36(5):055027, aug 2015.
- [15] A. Bassi, K. Lochan, S. Satin, T. P. Singh, and H. Ulbricht. Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests. *Reviews of Modern Physics*, 85:471–527, Apr 2013.
- [16] H. Baum. *Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudoriemannschen Mannigfaltigkeiten*, volume 41 of *Teubner-Texte zur Mathematik*. Teubner, 1981.
- [17] J. Beem, P. Ehrlich, and K. Easley. *Global Lorentzian Geometry*, volume 202 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. CRC Press, 1996.
- [18] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, Nov 1964.
- [19] D. Benedetti. Fractal properties of quantum spacetime. *Physical Review Letters*, 102:111303, Mar 2009.
- [20] I. Bengtsson and K. Życzkowski. *Geometry of Quantum States: an Introduction to Quantum Entanglement*. Cambridge University Press, 2 edition, 2020.
- [21] M. N. Bera, A. Acín, M. Kuś, M. W. Mitchell, and M. Lewenstein. Randomness in quantum mechanics: philosophy, physics and technology. *Reports on Progress in Physics*, 80(12):124001, nov 2017.
- [22] P. Bernard. Some remarks on the continuity equation. Preprint [arXiv:1203.2895 \[math.DS\]](https://arxiv.org/abs/1203.2895), 2012.
- [23] A. E. Bernardini. Chiral oscillations in terms of the zitterbewegung effect. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, 50(3):673–678, 2007.
- [24] F. Besnard. A noncommutative view on topology and order. *Journal of Geometry and Physics*, 59(7):861–875, 2009.
- [25] F. Besnard. Algebraic backgrounds for noncommutative Kaluza–Klein theory. I. Motivations and general framework. *Journal of Mathematical Physics*, 60(12):123506, 2019.
- [26] F. Besnard and N. Bizi. Doppler shift in semi-Riemannian signature and the non-uniqueness of the Krein space of spinors. *Journal of Mathematical Physics*, 60(6):063503, 2019.
- [27] F. Besnard and B. Nadir. On the definition of spacetimes in noncommutative geometry: Part I. *Journal of Geometry and Physics*, 123:292–309, 2018. See also [arXiv:1611.07842](https://arxiv.org/abs/1611.07842).
- [28] J. Bhattacharyya, M. Colombo, and T. P. Sotiriou. Causality and black holes in spacetimes with a preferred foliation. *Classical and Quantum Gravity*, 33(23):235003, oct 2016.
- [29] I. Białynicki-Birula. On the wave function of the photon. *Acta Physica Polonica-Series A General Physics*, 86(1):97–116, 1994.
- [30] I. Białynicki-Birula. The photon wave function. In J. H. Eberly, L. Mandel, and E. Wolf, editors, *Coherence and Quantum Optics VII*, pages 313–322. Springer US, Boston, MA, 1996. Proceedings of the Seventh Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics, held at the University of Rochester, June 7–10, 1995.

- [31] I. Białyński-Birula. Photon wave function. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics XXXVI*, pages 245–294. Elsevier, Amsterdam, 1996.
- [32] V. A. S. V. Bittencourt, A. E. Bernardini, and M. Blasone. Chiral oscillations. *Europhysics Letters*, 139(4):44002, aug 2022.
- [33] N. Bizi. *Semi-Riemannian noncommutative geometry, gauge theory, and the standard model of particle physics*. PhD thesis, Sorbonne Université, 2018.
- [34] N. Bizi, C. Brouder, and F. Besnard. Space and time dimensions of algebras with application to Lorentzian noncommutative geometry and quantum electrodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 59(6):062303, 2018.
- [35] O. Boada, A. Celi, J. I. Latorre, and M. Lewenstein. Dirac equation for cold atoms in artificial curved spacetimes. *New Journal of Physics*, 13(3):035002, mar 2011.
- [36] A. J. Bochniak. *Non-product geometries for particle physics and cosmology*. PhD thesis, Jagiellonian University, 2022.
- [37] J. Bognár. *Indefinite Inner Product Spaces*. Springer, 1974.
- [38] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 48:696–702, Oct 1935.
- [39] M. Braun. Rényi’s entropy on Lorentzian spaces. timelike curvature-dimension conditions. *preprint arXiv:2206.13005*, 2022.
- [40] M. Braun. Good geodesics satisfying the timelike curvature-dimension condition. *Nonlinear Analysis*, 229:113205, 2023.
- [41] M. Braun and M. Calisti. Timelike ricci bounds for low regularity spacetimes by optimal transport. *preprint arXiv:2209.03802*, 2022.
- [42] R. Brout. The gauged zitterbewegung: Connes’ constructions of the Standard Model. In A. Zichichi, editor, *Basics and Highlights in Fundamental Physics: Proceedings of the International School of Subnuclear Physics*, volume 37 of *The Subnuclear Physics*, pages 431–468. World Scientific, 2001.
- [43] Č. Brukner. Quantum causality. *Nature Physics*, 10(4):259–263, 2014.
- [44] N. Brunner, D. Cavalcanti, S. Pironio, V. Scarani, and S. Wehner. Bell nonlocality. *Reviews of Modern Physics*, 86:419–478, Apr 2014.
- [45] D. Buchholz and J. Yngvason. There are no causality problems for Fermi’s two-atom system. *Physical Review Letters*, 73:613–616, Aug 1994.
- [46] A. A. Bytsenko, G. Cognola, V. Moretti, S. Zerbini, and E. Elizalde. *Analytic Aspects of Quantum Fields*. World Scientific, 2003.
- [47] D. Canarutto and E. Minguzzi. The distance formula in algebraic spacetime theories. *Journal of Physics: Conference Series*, 1275(1):012045, 2019.
- [48] F. Cavalletti and A. Mondino. Optimal transport in lorentzian synthetic spaces, synthetic timelike Ricci curvature lower bounds and applications. *preprint arXiv:2004.08934*, 2020.
- [49] F. Cavalletti and A. Mondino. A review of Lorentzian synthetic theory of timelike Ricci curvature bounds. *General Relativity and Gravitation*, 54:137, 2022.

- [50] S. Chakrabarti, H. Yiming, T. Li, S. Feizi, and X. Wu. Quantum Wasserstein generative adversarial networks. In H. Wallach, H. Larochelle, A. Beygelzimer, F. d'Alché Buc, E. Fox, and R. Garnett, editors, *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 32. Curran Associates, Inc., 2019.
- [51] A. Chakraborty and B. Chakraborty. Spectral distance on Lorentzian Moyal plane. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 17(06):2050089, 2020.
- [52] A. Chamseddine and W. D. van Suijlekom. *A survey of spectral models of gravity coupled to matter*, pages 1–51. Springer International Publishing, Cham, 2019.
- [53] A. H. Chamseddine and A. Connes. Universal formula for noncommutative geometry actions: Unification of gravity and the standard model. *Physical Review Letters*, 77:4868–4871, Dec 1996.
- [54] A. H. Chamseddine and A. Connes. The spectral action principle. *Communications in Mathematical Physics*, 186(3):731–750, 1997.
- [55] A. H. Chamseddine and A. Connes. Conceptual explanation for the algebra in the non-commutative approach to the standard model. *Physical Review Letters*, 99:191601, Nov 2007.
- [56] A. H. Chamseddine, A. Connes, and M. Marcolli. Gravity and the standard model with neutrino mixing. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 11(6):991–1089, 2007.
- [57] A. H. Chamseddine, A. Connes, and V. Mukhanov. Quanta of geometry: Noncommutative aspects. *Physical Review Letters*, 114:091302, Mar 2015.
- [58] A. H. Chamseddine, A. Connes, and W. D. van Suijlekom. Inner fluctuations in noncommutative geometry without the first order condition. *Journal of Geometry and Physics*, 73:222–234, 2013.
- [59] T. Cheng, Q. Su, and R. Grobe. Introductory review on quantum field theory with space-time resolution. *Contemporary Physics*, 51(4):315–330, 2010.
- [60] G. Chiribella and R. W. Spekkens, editors. *Quantum Theory: Informational Foundations and Foils*. Springer, 2016.
- [61] I. L. Chuang and M. A. Nielsen. Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box. *Journal of Modern Optics*, 44(11-12):2455–2467, 1997.
- [62] B. S. Cirel'son. Quantum generalizations of Bell's inequality. *Letters in Mathematical Physics*, 4(2):93–100, Mar 1980.
- [63] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 23:880–884, Oct 1969.
- [64] S. Colin and H. M. Wiseman. The zig-zag road to reality. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(34):345304, 2011.
- [65] P. Collas and D. Klein. *The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations*. Springer, 2019.
- [66] A. Connes. Non-commutative geometry. In G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. Mitter, and R. Stora, editors, *Nonperturbative Quantum Field Theory*, volume 185 of *NATO ASI Series B: Physics*, pages 33–70. Plenum Press, New York, 1988. Proceedings of a NATO

Advanced Study Institute on Nonperturbative Quantum Field Theory, held July 16-30, 1987, in Cargèse, France.

- [67] A. Connes. Compact metric spaces, Fredholm modules, and hyperfiniteness. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9(2):207–220, 1989.
- [68] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Academic Press, 1994.
- [69] A. Connes. On the spectral characterization of manifolds. *Journal of Noncommutative Geometry*, 7(1):1–82, 2013.
- [70] A. Connes. *Noncommutative Geometry, the Spectral Standpoint*, pages 23–84. Cambridge University Press, 2021.
- [71] A. Connes and A. H. Chamseddine. Inner fluctuations of the spectral action. *Journal of Geometry and Physics*, 57(1):1–21, 2006.
- [72] A. Connes and M. Marcolli. *Noncommutative Geometry, Quantum Fields and Motives*, volume 55 of *Colloquium Publications*. American Mathematical Society, 2008.
- [73] A. Connes and H. Moscovici. The local index formula in noncommutative geometry. *Geometric And Functional Analysis GAFA*, 5(2):174–243, 1995.
- [74] A. Connes and A. Schwarz. Matrix Vieta theorem revisited. *Letters in Mathematical Physics*, 39(4):349–353, 1997.
- [75] A. Connes and P. Tretkoff. The Gauss–Bonnet theorem for the noncommutative two torus. In C. Consani and A. Connes, editors, *Noncommutative Geometry, Arithmetic and Related Topics*, pages 141–158, Baltimore, 2011. The Johns Hopkins University Press.
- [76] G. Crippa. *The flow associated to weakly differentiable vector fields*. PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, Universität Zürich, 2012.
- [77] D. G. Currie, T. F. Jordan, and E. C. G. Sudarshan. Relativistic invariance and hamiltonian theories of interacting particles. *Reviews of Modern Physics*, 35:350–375, Apr 1963.
- [78] M. Czachor. Nonlocal-looking equations can make nonlinear quantum dynamics local. *Physical Review A*, 57:4122–4129, Jun 1998.
- [79] F. D’Andrea, M. A. Kurkov, and F. Lizzi. Wick rotation and fermion doubling in noncommutative geometry. *Physical Review D*, 94:025030, Jul 2016.
- [80] F. D’Andrea and P. Martinetti. On Pythagoras theorem for products of spectral triples. *Letters in Mathematical Physics*, 103(5):469–492, 2013.
- [81] N. V. Dang and M. Wrochna. Complex powers of the wave operator and the spectral action on Lorentzian scattering spaces. *preprint arXiv:2012.00712*, 2020. *J. Eur. Math. Soc.* to appear.
- [82] S. De Leo and P. Rotelli. Neutrino chiral oscillations. *International Journal of Theoretical Physics*, 37(8):2193–2206, 1998.
- [83] G. De Palma and D. Trevisan. Quantum optimal transport with quantum channels. In *Annales Henri Poincaré*, volume 22, pages 3199–3234. Springer, 2021.
- [84] A. Devastato, S. Farnsworth, F. Lizzi, and P. Martinetti. Lorentz signature and twisted spectral triples. *Journal of High Energy Physics*, 2018(3):1–21, 2018.

- [85] A. Devastato, M. Kurkov, and F. Lizzi. Spectral noncommutative geometry standard model and all that. *International Journal of Modern Physics A*, 34(19):1930010, 2019.
- [86] D. Dieks. Communication by EPR devices. *Physics Letters A*, 92(6):271–272, 1982.
- [87] L. Dąbrowski and A. Sitarz. Dirac operator on the standard Podleś quantum sphere. *Banach Center Publications*, 61:49–58, 2003.
- [88] L. Dąbrowski and A. Sitarz. Curved noncommutative torus and Gauss–Bonnet. *Journal of Mathematical Physics*, 54(1):013518, 2013.
- [89] R. Dong, M. Khalkhali, and W. D. van Suijlekom. Second quantization and the spectral action. *Journal of Geometry and Physics*, 167:104285, 2021.
- [90] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts. Spacetime quantization induced by classical gravity. *Physics Letters B*, 331(1–2):39–44, 1994.
- [91] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts. The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields. *Communications in Mathematical Physics*, 172(1):187–220, 1995.
- [92] F. Dreisow, M. Heinrich, R. Keil, A. Tünnermann, S. Nolte, S. Longhi, and A. Szameit. Classical simulation of relativistic *zitterbewegung* in photonic lattices. *Physical Review Letters*, 105:143902, Sep 2010.
- [93] V. G. Drinfel’d. Quantum groups. *Journal of Soviet mathematics*, 41:898–915, 1988.
- [94] K. G. Dyall and K. Fægri Jr. *Introduction to Relativistic Quantum Chemistry*. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [95] M. Eckstein and T. Miller. Causal evolution of wave-packets – numerical investigations, 2016. Wolfram Mathematica 10 notebook, available at <http://eckstein.pl/download/EcksteinMillerCausalQM.nb>.
- [96] Editors: S. Deffner, S. Campbell. Focus on quantum speed limit and its applications. *New Journal of Physics*, 24, jun 2022.
- [97] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, 1935.
- [98] J. Eisert, T. Tyc, T. Rudolph, and B. C. Sanders. Gaussian quantum marginal problem. *Communications in Mathematical Physics*, 280(1):263–280, 2008.
- [99] J. Ehlers, F. Pirani, and A. Schild. The geometry of free fall and light propagation. In L. O’Raifeartaigh, editor, *General Relativity, papers in honour of J. L. Synge*. Clarendon Press, Oxford–London, 1972. Republished in: *General Relativity and Gravitation* **44**, 1587 (2012).
- [100] H. Elvang and P. Figueras. Black saturn. *Journal of High Energy Physics*, 2007(05):050, may 2007.
- [101] M. J. Esteban and E. Séré. Solutions of the Dirac–Fock equations for atoms and molecules. *Commun. Math. Phys.*, 203(3):499–530, 1999.
- [102] S. Farnsworth. The graded product of real spectral triples. *Journal of Mathematical Physics*, 58(2):023507, 2017.

- [103] C. F. Fischer, M. Godefroid, T. Brage, P. Jönsson, and G. Gaigalas. Advanced multi-configuration methods for complex atoms: I. Energies and wave functions. *J. Phys. B*, 49(18):182004, 2016.
- [104] N. Franco. Causality for spectral triple on Minkowski spacetime. *preprint arXiv:1212.5171v1*, 2012.
- [105] N. Franco. Temporal Lorentzian spectral triples. *Reviews in Mathematical Physics*, 26(08):1430007, 2014.
- [106] N. Franco. The Lorentzian distance formula in noncommutative geometry. *Journal of Physics: Conference Series*, 968(1):012005, feb 2018.
- [107] N. Franco and J.-C. Wallet. Metrics and causality on Moyal planes. In *Noncommutative Geometry and Optimal Transport*, volume 676 of *Contemporary Mathematics*, pages 147–173. American Mathematical Society, 2016.
- [108] N. Franco and J.-C. Wallet. Quantum causality constraints on kappa-Minkowski spacetime. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55(41):414007, oct 2022.
- [109] D. Fuchs and A. Schwarz. Matrix Vieta theorem. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 169(2):15–22, 1995.
- [110] M. Gargiulo, M. Sakellariadou, and G. Vitiello. Doubling of the algebra and neutrino mixing within noncommutative spectral geometry. *European Physical Journal C*, 74(1):2695, 2014.
- [111] V. Gayral, J. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücker, and J. Várilly. Moyal planes are spectral triples. *Communications in Mathematical Physics*, 246(3):569–623, 2004.
- [112] I. M. Gelfand and M. A. Naimark. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in hilbert space. *Matematicheskij sbornik*, 54(2):197–217, 1943.
- [113] B. Gerlach, D. Gromes, and J. Petzold. Energie und kausalität. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, 221(2):141–157, 1969.
- [114] B. Gerlach, D. Gromes, J. Petzold, and P. Rosenthal. Über kausales verhalten nichtlokaler größen und teilchenstruktur in der feldtheorie. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei*, 208(4):381–389, 1968.
- [115] R. P. Geroch. Topology in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 8(4):782–786, 1967.
- [116] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zaehring, E. Solano, R. Blatt, and C. Roos. Quantum simulation of the Dirac equation. *Nature*, 463(7277):68–71, 2010.
- [117] P. B. Gilkey. *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, second edition, 1995.
- [118] P. B. Gilkey. *Asymptotic Formulae in Spectral Geometry*. CRC Press, 2004.
- [119] N. Gisin. Stochastic quantum dynamics and relativity. *Helvetica Physica Acta*, 62(4):363–371, 1989.
- [120] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel, and H. Zbinden. Quantum cryptography. *Reviews of Modern Physics*, 74:145–195, Mar 2002.

- [121] F. Golse, C. Mouhot, and T. Paul. On the mean field and classical limits of quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 343(1):165–205, 2016.
- [122] I. P. Grant. *Relativistic Quantum Theory of Atoms and Molecules: Theory and Computation*, volume 40. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [123] O. W. Greenberg. Failure of microcausality in quantum field theory on noncommutative spacetime. *Physical Review D*, 73:045014, Feb 2006.
- [124] A. Grigoryan. *Heat Kernel and Analysis on Manifolds*. American Mathematical Society, 2009.
- [125] D. Gromes. On the problem of macrocausality in field theory. *Zeitschrift für Physik*, 236(3):276–287, 1970.
- [126] A. Grudka, M. Horodecki, R. Horodecki, and A. Wójcik. Nonsignaling quantum random access-code boxes. *Physical Review A*, 92:052312, Nov 2015.
- [127] J. Grunhaus, S. Popescu, and D. Rohrlich. Jamming nonlocal quantum correlations. *Physical Review A*, 53:3781–3784, Jun 1996.
- [128] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [129] L. Hardy. Towards quantum gravity: a framework for probabilistic theories with non-fixed causal structure. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(12):3081, 2007.
- [130] D. Harlow. Jerusalem lectures on black holes and quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 88:015002, Feb 2016.
- [131] S. W. Hawking. Information preservation and weather forecasting for black holes. *preprint arXiv:1401.5761*, 2014.
- [132] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [133] G. C. Hegerfeldt. Remark on causality and particle localization. *Physical Review D*, 10:3320–3321, 1974.
- [134] G. C. Hegerfeldt. Violation of causality in relativistic quantum theory? *Physical Review Letters*, 54:2395–2398, 1985.
- [135] G. C. Hegerfeldt. Causality problems for Fermi’s two-atom system. *Physical Review Letters*, 72(5):596, 1994.
- [136] G. C. Hegerfeldt. Instantaneous spreading and Einstein causality in quantum theory. *Annalen der Physik*, 7(7-8):716–725, 1998.
- [137] D. Hestenes. Quantum mechanics from self-interaction. *Foundations of Physics*, 15(1):63–87, 1985.
- [138] D. Hestenes. The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics. *Foundations of Physics*, 20(10):1213–1232, 1990.
- [139] D. Hestenes. Zitterbewegung in quantum mechanics. *Foundations of Physics*, 40(1):1–54, 2010.
- [140] M. Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

- [141] P. Horodecki and R. Ramanathan. The relativistic causality versus no-signaling paradigm for multi-party correlations. *Nature Communications*, 10(1):1701, 2019.
- [142] G. Horowitz. *Black Holes in Higher Dimensions*. Cambridge University Press, 2012.
- [143] S. Hossenfelder. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 16(1):2, 2013.
- [144] P. Hořava. Stability of Fermi surfaces and K theory. *Physical Review Letters*, 95:016405, Jun 2005.
- [145] K. Huang. On the zitterbewegung of the Dirac electron. *American Journal of Physics*, 20(8):479–484, 1952.
- [146] B. Iochum, T. Krajewski, and P. Martinetti. Distances in finite spaces from noncommutative geometry. *Journal of Geometry and Physics*, 37(1):100–125, 2001.
- [147] B. Iochum, T. Schücker, and C. Stephan. On a classification of irreducible almost commutative geometries. *Journal of Mathematical Physics*, 45(12):5003–5041, 2004.
- [148] M. Isi, M. Giesler, W. M. Farr, M. A. Scheel, and S. A. Teukolsky. Testing the no-hair theorem with GW150914. *Physical Review Letters*, 123:111102, Sep 2019.
- [149] A. Jaffe and E. Witten. Quantum Yang–Mills theory. *The millennium prize problems*, 2006.
- [150] M. A. Javaloyes and M. Sánchez. Finsler metrics and relativistic spacetimes. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 11(09):1460032, 2014.
- [151] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. Academic Press, 1986.
- [152] M. I. Katsnelson. Zitterbewegung, chirality, and minimal conductivity in graphene. *The European Physical Journal B – Condensed Matter and Complex Systems*, 51(2):157–160, 2006.
- [153] M. Kell and S. Suhr. On the existence of dual solutions for Lorentzian cost functions. *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 37(2):343–372, 2020.
- [154] M. Keyl. Fundamentals of quantum information theory. *Physics Reports*, 369(5):431–548, 2002.
- [155] M. Khodadi, G. Lambiase, and D. F. Mota. No-hair theorem in the wake of event horizon telescope. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(09):028, sep 2021.
- [156] B. T. Kiani, G. D. Palma, M. Marvian, Z.-W. Liu, and S. Lloyd. Learning quantum data with the quantum earth mover’s distance. *Quantum Science and Technology*, 7(4):045002, jul 2022.
- [157] T. Krajewski. Classification of finite spectral triples. *Journal of Geometry and Physics*, 28(1-2):1–30, 1998.
- [158] P. Kreckora, Q. Su, and R. Grobe. Relativistic electron localization and the lack of Zitterbewegung. *Physical Review Letters*, 93(4):043004, 2004.
- [159] L. Lamata, J. León, T. Schätz, and E. Solano. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. *Physical Review Letters*, 98:253005, Jun 2007.

- [160] K. Landsman. *Foundations of Quantum Theory: From Classical Concepts to Operator Algebras*. Springer, 2017.
- [161] L. LeBlanc, M. Beeler, K. Jiménez-García, A. Perry, S. Sugawa, R. Williams, and I. Spielman. Direct observation of zitterbewegung in a Bose–Einstein condensate. *New Journal of Physics*, 15(7):073011, 2013.
- [162] A. Levitt. Solutions of the multiconfiguration Dirac–Fock equations. *Rev. Math. Phys.*, 26(07):1450014, 2014.
- [163] F. Lizzi. Points. lack thereof. *Philosophical Problems in Science (Zagadnienia Filozoficzne w Nauce)*, (66):35–60, Jul. 2019.
- [164] J. Madore. *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, volume 257. Cambridge University Press, 1999.
- [165] S. Majid. *Foundations of Quantum Group Theory*. Cambridge University Press, 2000.
- [166] M. Marcolli. *Noncommutative Cosmology*. World Scientific, 2017.
- [167] D. Marolf. The black hole information problem: past, present, and future. *Reports on Progress in Physics*, 80(9):092001, jul 2017.
- [168] P. Martinetti and D. Singh. Lorentzian fermionic action by twisting euclidean spectral triples. *Journal of Noncommutative Geometry*, 16(2):513–559, 2022.
- [169] P. Mathieu and J.-C. Wallet. Single extra dimension from κ -Poincaré and gauge invariance. *Journal of High Energy Physics*, 2021(3):1–26, 2021.
- [170] R. J. McCann. Displacement convexity of Boltzmann’s entropy characterizes the strong energy condition from general relativity. *Cambridge Journal of Mathematics*, 8:609–681, 2020.
- [171] F. Mercati and M. Sergola. Light cone in a quantum spacetime. *Physics Letters B*, 787:105–110, 2018.
- [172] J. Mielczarek and T. Trześniewski. Towards the map of quantum gravity. *General Relativity and Gravitation*, 50(6):1–26, 2018.
- [173] T. Miller. Polish spaces of causal curves. *Journal of Geometry and Physics*, 116:295–315, 2017.
- [174] T. Miller. Time functions and K -causality between measures. *Journal of Physics: Conference Series*, 968(1):012008, 2018.
- [175] T. Miller. Causal evolution of probability measures and continuity equation. *preprint arXiv:2104.02552*, 2021.
- [176] E. Minguzzi. K -causality coincides with stable causality. *Communications in Mathematical Physics*, 290(1):239–248, 2009.
- [177] E. Minguzzi. Time functions as utilities. *Communications in Mathematical Physics*, 298(3):855–868, 2010.
- [178] E. Minguzzi. Topological conditions for the representation of preorders by continuous utilities. *Applied General Topology*, 13(1):81–89, 2012.
- [179] E. Minguzzi. The representation of spacetime through step time functions. *Journal of Physics: Conference Series*, 968(1):012009, feb 2018.

- [180] E. Minguzzi. Causality theory for closed cone structures with applications. *Reviews in Mathematical Physics*, 31(05):1930001, 2019.
- [181] E. Minguzzi. Lorentzian causality theory. *Living Reviews in Relativity*, 22(1):1–202, 2019.
- [182] E. Minguzzi and M. Sánchez. The causal hierarchy of spacetimes. In D. V. Alekseyevsky and H. Baum, editors, *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry, ESI Lectures in Mathematics and Physics*, pages 299–358. EMS Publishing House, 2008.
- [183] A. Mondino and S. Suhr. An optimal transport formulation of the Einstein equations of general relativity. *Journal of the European Mathematical Society*, 2022.
- [184] V. Moretti. Aspects of noncommutative Lorentzian geometry for globally hyperbolic spacetimes. *Reviews in Mathematical Physics*, 15(10):1171–1217, 2003.
- [185] M. Navascués, Y. Guryanova, M. J. Hoban, and A. Acín. Almost quantum correlations. *Nature Communications*, 6(1):1–7, 2015.
- [186] M. Navascués, S. Pironio, and A. Acín. A convergent hierarchy of semidefinite programs characterizing the set of quantum correlations. *New Journal of Physics*, 10(7):073013, 2008.
- [187] G. Neugebauer and J. Hennig. Stationary two-black-hole configurations: A non-existence proof. *Journal of Geometry and Physics*, 62(3):613–630, 2012. Recent developments in mathematical relativity.
- [188] M. J. Neves, C. Farina, and M. V. Cougo-Pinto. Past and future blurring at fundamental length scale. *Physical Review Letters*, 105:211601, Nov 2010.
- [189] T. D. Newton and E. P. Wigner. Localized states for elementary systems. *Review Modern Physics*, 21:400–406, Jul 1949.
- [190] M. Okuyama and M. Ohzeki. Quantum speed limit is not quantum. *Physical Review Letters*, 120:070402, Feb 2018.
- [191] D. Oriti, editor. *Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [192] G. N. Parfionov and R. R. Zapatrin. Connes duality in pseudo-Riemannian geometry. *Journal of Mathematical Physics*, 41(10):7122–7128, 2000.
- [193] S. T. Park. Propagation of a relativistic electron wave packet in the Dirac equation. *Physical Review A*, 86(6):062105, 2012.
- [194] M. Paschke and A. Sitarz. Equivariant Lorentzian spectral triples. *arXiv preprint math-ph/0611029*, 2006.
- [195] M. Pavšič. Localized states in quantum field theory. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28(5):89, Sep 2018.
- [196] R. Penrose. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14:57–59, Jan 1965.
- [197] R. Penrose. *Techniques of Differential Topology in Relativity*, volume 7 of *CBMS–NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. SIAM, 1972.
- [198] R. Penrose. The mathematics of the electron’s spin. *European Journal of Physics*, 18(3):164–168, 1997.

- [199] R. Penrose. *The Road to Reality: a Complete Guide to the Laws of the Universe*. Jonathan Cape, London, UK, 2004.
- [200] R. Penrose. *Cycles of Time: an Extraordinary New View of the Universe*. The Bodley Head, London, UK, 2010.
- [201] R. Penrose. Palatial twistor theory and the twistor googly problem. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 373(2047):20140237, 2015.
- [202] A. Peres. Unperformed experiments have no results. *American Journal of Physics*, 46(7):745–747, 1978.
- [203] A. Peres and D. R. Terno. Quantum information and relativity theory. *Reviews of Modern Physics*, 76:93–123, Jan 2004.
- [204] E. S. Perlman, S. A. Rappaport, W. A. Christiansen, Y. J. Ng, J. DeVore, and D. Pooley. New constraints on quantum gravity from X-ray and gamma-ray observations. *The Astrophysical Journal*, 805(1):10, 2015.
- [205] P. Podleś. Quantum spheres. *Letters in Mathematical Physics*, 14(3):193–202, 1987.
- [206] S. Popescu. Nonlocality beyond quantum mechanics. *Nature Physics*, 10(4):264, 2014.
- [207] S. Popescu and D. Rohrlich. Quantum nonlocality as an axiom. *Foundations of Physics*, 24(3):379–385, 1994.
- [208] J. F. Poyatos, J. I. Cirac, and P. Zoller. Complete characterization of a quantum process: The two-bit quantum gate. *Physical Review Letters*, 78:390–393, Jan 1997.
- [209] A. Rennie. Smoothness and locality for nonunital spectral triples. *K-theory*, 28(2):127–165, 2003.
- [210] A. Rennie. Summability for nonunital spectral triples. *K-theory*, 31(1):71–100, 2004.
- [211] A. Rennie and B. E. Whale. Generalised time functions and finiteness of the Lorentzian distance. *Journal of Geometry and Physics*, 106:108–121, 2016.
- [212] M. A. Rieffel. C^* -algebras associated with irrational rotations. *Pacific Journal of Mathematics*, 93:415–429, 1981.
- [213] J. Rosenberg. Levi-Civita’s theorem for noncommutative tori. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 9:071, 2013.
- [214] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1973.
- [215] M. Sakellariadou, A. Stabile, and G. Vitiello. Noncommutative spectral geometry, algebra doubling, and the seeds of quantization. *Physical Review D*, 84:045026, Aug 2011.
- [216] E. Schrödinger. Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik. *Sitzungsberichte der Preubetaischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-mathematische Klasse*, 24:418–428, 1930.
- [217] B. Shanahan, A. Chenu, N. Margolus, and A. del Campo. Quantum speed limits across the quantum-to-classical transition. *Physical Review Letters*, 120:070401, Feb 2018.
- [218] B. G. Sidharth. Revisiting zitterbewegung. *International Journal of Theoretical Physics*, 48(2):497–506, 2009.

- [219] C. Simon, V. Bužek, and N. Gisin. No-signaling condition and quantum dynamics. *Physical Review Letters*, 87:170405, Oct 2001.
- [220] A. Sitarz. Pointless geometry. In M. Eckstein, M. Heller, and S. Szybka, editors, *Mathematical Structures of the Universe*, pages 301–314. Copernicus Center Press, 2014.
- [221] A. Sitarz. Wodzicki residue and minimal operators on a noncommutative 4-dimensional torus. *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 5:305–317, 2014.
- [222] B. J. Smith and M. G. Raymer. Two-photon wave mechanics. *Phys. Rev. A*, 74:062104, Dec 2006.
- [223] B. J. Smith and M. G. Raymer. Photon wave functions, wave-packet quantization of light, and coherence theory. *New Journal of Physics*, 9(11):414, 2007.
- [224] H. S. Snyder. Quantized space-time. *Physical Review*, 71:38–41, Jan 1947.
- [225] M. A. Soloviev. Failure of microcausality in noncommutative field theories. *Physical Review D*, 77:125013, Jun 2008.
- [226] R. Sorkin and E. Woolgar. A causal order for spacetimes with C^0 Lorentzian metrics: proof of compactness of the space of causal curves. *Class. Quantum Grav.*, 13(7):1971–93, 1996.
- [227] C. A. Stephan. Noncommutative geometry and the physics of the LHC era. In K. J. R. C. T. J. Finster, F., editor, *Quantum Mathematical Physics*, pages 471–495. Springer, 2016.
- [228] R. F. Streater and A. S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and All That*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, 2000.
- [229] F. Strocchi. *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*. World Scientific, 2008.
- [230] A. Strohmaier. On noncommutative and pseudo-Riemannian geometry. *Journal of Geometry and Physics*, 56(2):175–195, 2006.
- [231] W. Struyve. On the zig-zag pilot-wave approach for fermions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(19):195307, 2012.
- [232] S. Suhr. Theory of optimal transport for Lorentzian cost functions. *Münster Journal of Mathematics*, 11:13–47, 2018.
- [233] S. Surya. The causal set approach to quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 22:5, 2019.
- [234] B. Thaller. *The Dirac Equation*, volume 31 of *Theoretical and Mathematical Physics*. Springer-Verlag Berlin, 1992.
- [235] The IceCube Collaboration. Search for quantum gravity using astrophysical neutrino flavour with IceCube. *Nature Physics*, 18:1287–1292, 2022.
- [236] Z. Tu, D. E. Kharzeev, and T. Ullrich. Einstein–Podolsky–Rosen paradox and quantum entanglement at subnucleonic scales. *Physical Review Letters*, 124:062001, Feb 2020.
- [237] J. Y. Vaishnav and C. W. Clark. Observing Zitterbewegung with ultracold atoms. *Physical Review Letters*, 100:153002, Apr 2008.
- [238] K. van den Dungen. Families of spectral triples and foliations of space(time). *Journal of Mathematical Physics*, 59(6):063507, 2018.

- [239] K. van den Dungen, M. Paschke, and A. Rennie. Pseudo-riemannian spectral triples and the harmonic oscillator. *Journal of Geometry and Physics*, 73:37–55, 2013.
- [240] K. van den Dungen and W. van Suijlekom. Particle physics from almost-commutative spacetimes. *Reviews in Mathematical Physics*, 24(09):1230004, 2012.
- [241] K. van den Dungen and W. van Suijlekom. Electrodynamics from noncommutative geometry. *Journal of Noncommutative Geometry*, 7(2):433–456, 2013.
- [242] W. D. van Suijlekom. *Noncommutative Geometry and Particle Physics*. Mathematical Physics Studies. Springer, 2015.
- [243] D. V. Vassilevich. Heat kernel expansion: user’s manual. *Physics Reports*, 388(5):279–360, 2003.
- [244] R. Verch. Quantum Dirac field on Moyal–Minkowski spacetime – illustrating quantum field theory over Lorentzian spectral geometry. In *Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement*, volume 4, pages 507–530, 2011.
- [245] R. Verch. Wave equations with non-commutative space and time. In F. Finster, J. Kleiner, C. Röken, and J. Tolksdorf, editors, *Quantum Mathematical Physics*, pages 163–178. Springer, 2016.
- [246] C. Villani. *Optimal Transport: Old and New*, volume 338 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [247] R. Wagner, M. Ware, B. Shields, Q. Su, and R. Grobe. Space-time resolved approach for interacting quantum field theories. *Physical Review Letters*, 106(2):023601, 2011.
- [248] R. Wagner, M. Ware, E. Stefanovich, Q. Su, and R. Grobe. Local and nonlocal spatial densities in quantum field theory. *Physical Review A*, 85(2):022121, 2012.
- [249] R. E. Wagner, B. T. Shields, M. R. Ware, Q. Su, and R. Grobe. Causality and relativistic localization in one-dimensional Hamiltonians. *Physical Review A*, 83:062106, 2011.
- [250] G. Wanders. On the problem of causality. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 14(1):168–184, 1959.
- [251] A. Watcharangkool and M. Sakellariadou. Noncommutative geometrical origin of the energy-momentum dispersion relation. *Physical Review D*, 95:025027, Jan 2017.
- [252] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras: A Friendly Approach*. Oxford University Press, 1993.
- [253] A. S. Wightman and S. S. Schweber. Configuration space methods in relativistic quantum field theory. I. *Physical Review*, 98:812–837, May 1955.
- [254] E. Witten. D-branes and K-theory. *Journal of High Energy Physics*, 1998(12):019, mar 1999.
- [255] W. K. Wootters and W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886):802–803, 1982.
- [256] S. L. Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics*, 111:613–665, 1987.
- [257] J. Yngvason. Localization and entanglement in relativistic quantum physics. In P. Blan-

chard and J. Fröhlich, editors, *The Message of Quantum Science: Attempts Towards a Synthesis*, pages 325–348. Springer Berlin Heidelberg, 2015.

[258] W. Zawadzki and T. M. Rusin. Zitterbewegung (trembling motion) of electrons in semiconductors: a review. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23(14):143201, 2011.

[259] K. Życzkowski and W. Słomczyński. The monge distance between quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(45):9095, nov 1998.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Celestina', with a long horizontal stroke extending to the right.

(podpis wnioskodawcy)