Autoreferat

1 Imię i nazwisko

Michał Maria Wrona

2 Posiadane dyplomy oraz stopnie naukowe

- 19.01.2010 — Uzyskanie stopnia doktora nauk matematycznych w zakresie informatyki. Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

  Tytuł rozprawy doktorskiej:

  Złożoność kwantyfikowanych problemów spełniania więzów dla pozytywnych języków temporalnych.

- 29.06.2004 — Uzyskanie tytułu magistra z informatyki. Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

3 Dotychczasowe zatrudnienie w jednostkach naukowych

3.1 Aktualne zatrudnienie

- od października 2016 — Adiunkt w Instytucie Informatyki Analitycznej na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie.

3.2 Wcześniejsze posady

- październik 2015 – wrzesień 2016 — Staż podoktorski w Zespole Katedr i Zakładów Informatyki Matematycznej (obecnie Instytut Informatyki Analitycznej) na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie.
- styczeń 2015 – wrzesień 2015 — Staż podoktorski w LIX na École Polytechnique we Francji.
- luty 2013 – grudzień 2014 — Staż podoktorski na Uniwersytecie w Linköping, w Szwecji, w ramach grantu 'Złożoność obliczeniowa problemów spełnialności więzów nad nieskończonymi dziedzinami' finansowanego przez Szwedzką Radę ds. Badań Naukowych (Vetenskapsrådet).
- luty 2012 – styczeń 2013 — Staż podoktorski na Uniwersytecie w Linköping, w Szwecji, w ramach programu CUGS.
- listopad 2010 – styczeń 2013 — Asystent na Wydziale Podstawowych Problemów Techniki na Politechnice Wrocławskiej.

- luty 2011 – kwiecień 2011 — Wizytujący naukowiec w LIX na École Polytechnique, praca nad projektem 'Problemy spełnialności więzów: algorytmy i złożoność' ufundowanym przez Europejską Radę ds. Badań Naukowych (ERC).
- October 2010 — Pobyt badawczy w ramach stypendium rządu francuskiego (EGIDE) w LIX, na École Polytechnique.
- October 2009 – September 2010 — Asystent na Uniwersytecie Wrocławskim.

4 Osiągnięcie habilitacyjne

Sekcja zawiera omówienie osiągnięcia naukowego o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.).

Tytuł osiągnięcia naukowego:

Metody lokalnej zgodności w rozwiązywaniu problemów spełnialności więzów oraz problemów pokrewnych nad strukturami ω-kategorycznymi

---

Artykuły zawarte w osiągnięciu habilitacyjnym

[A1] Michał Wrona. Relational width of first-order expansions of homogeneous graphs with bounded strict width. In *Proceedings of 37th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, (STACS'20)*, volume 154 of *LIPIcs*, pages 39:1–39:16. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020.

[A2] Michał Wrona. On the relational width of first-order expansions of finitely bounded homogeneous binary cores with bounded strict width. In *LICS '20: 35th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 958–971. ACM, 2020.

[A3] Antoine Mottet, Tomás Nagy, Michael Pinsker, and Michał Wrona. Smooth approximations and relational width collapses. In *48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, ICALP 2021*, volume 198 of *LIPIcs*, pages 138:1–138:20. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021.

[A4] Michał Wrona. Syntactically characterizing local-to-global consistency in ord-horn. In *Principles and Practice of Constraint Programming - 18th International Conference, CP 2012. Proceedings*, volume 7514 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 704–719. Springer, 2012.

[A5] Manuel Bodirsky and Michał Wrona. Equivalence constraint satisfaction problems. In *Computer Science Logic (CSL'12) - 26th International Workshop/21st Annual Conference of the EACSL, CSL 2012*, volume 16 of *LIPIcs*, pages 122–136. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2012.

[A6] Hubie Chen and Michał Wrona. Guarded ord-horn: A tractable fragment of quantified constraint satisfaction. In *19th International Symposium on Temporal Representation and Reasoning, TIME 2012*, pages 99–106. IEEE Computer Society, 2012.

[A7] Michał Wrona. Tractability frontier for dually-closed ord-horn quantified constraint satisfaction problems. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2014 - 39th International Symposium, MFCS 2014. Proceedings, Part I*, volume 8634 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 535–546. Springer, 2014.

[A8] Michał Wrona. Local-to-global consistency implies tractability of abduction. In *Proceedings of the Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 1128–1134. AAAI Press, 2014.

Omówienie artykułów naukowych wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego

4.1 Wstęp

Głównym celem złożoności obliczeniowej, dziedziny informatyki teoretycznej, jest porównywanie trudności problemów obliczeniowych ze względu na ilość zasobów, takich jak czas czy pamięć, która jest konieczna/wystarczająca do ich rozwiązania. Problemy obliczeniowe o podobnej złożoności czasowej lub pamięciowej należą do tych samych klas złożoności. Najpopularniejsze z nich to P oraz NP. Wiele ważnych otwartych problemów w informatyce teoretycznej dotyczy pytań o relację zawierania pomiędzy klasami złożoności. W szczególności, najbardziej znanym problemem otwartym tego rodzaju jest pytanie czy P jest różne od NP. Mimo iż nie posiadamy na to matematycznego dowodu, powszechnie uważa się, że problemy NP-zupełne nie należą do P i przez to P $\subsetneq$ NP. Dlatego często zakłada się po prostu, że przytoczona powyżej ścisła inkluzja zachodzi. Wtedy problemy w P nazywa się obliczeniowo łatwymi (ang. tractable), a te NP-zupełne obliczeniowo trudnymi (ang. intractable), rozpatruje się pewną (często nieskończoną) klasę problemów, a zadanie polega na klasyfikacji — na podaniu odpowiedniej klasy złożoności dla każdego z rozpatrywanych problemów. W szczególności, w przypadku Algorytmicznych Meta-Twierdzeń rozpatruje się nieskończone klasy problemów obliczeniowych definiowanych w pewnej logice [Kre11]. Pierwszym z tego typu twierdzeń jest dobrze znane twierdzenie Bruno Courcelle'a o tym, że każdy problem obliczeniowy dotyczący grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej definiowalny w monadycznej logice drugiego rzędu jest w P.

Przedmiotem niniejszego raportu są problemy spełnialności więzów (ang. constraint satisfaction problems, CSPs), a w szczególności problemy CSP($\mathbb{B}$) [KZ17] parametryzowane strukturami relacyjnymi $\mathbb{B}$ zwanymi również językami lub szablonami. Instancją problemu CSP($\mathbb{B}$) jest zbiór więzów utworzonych ze zmiennych oraz relacji z $\mathbb{B}$. Pytamy czy możemy podstawić pod zmienne elementy dziedziny w taki sposób by wszystkie więzy zostały jednocześnie spełnione. Równoważnie, CSP($\mathbb{B}$) to zbiór wszystkich skończonych struktur nad sygnaturą $\mathbb{B}$, dla których istnieje homomorfizm w $\mathbb{B}$. Na przykład, graf jest k-kolorowalny wtedy i tylko wtedy gdy posiada homomorfizm w klikę rozmiaru k. W podobny sposób, poprzez dobranie odpowiedniego $\mathbb{B}$ jako CSP($\mathbb{B}$) możemy wyrazić problemy takie jak k-SAT lub pytanie czy zbiór równań z co najwyżej trzema zmiennymi w każdym równaniu ma rozwiązanie. Ponieważ problem 2-kolorowalności grafów jest w P, a 3-kolorowalności jest NP-trudny mamy, że CSP($\mathbb{B}$) wyraża zarówno problemy obliczeniowo łatwe jak i obliczeniowo trudne. Równie łatwo jest zauważyć, że dla skończonych języków $\mathbb{B}$ problem CSP($\mathbb{B}$) jest zawsze w NP. W rzeczy samej. Wystarczy zgadnąć rozwiązanie i sprawdzić czy spełnia ono wszystkie więzy. Przełomowy artykuł Thomas Federa oraz Moshe Y. Vardiego [FV99] przedstawia wiele wyników sugerujących istnienie dychotomii dla CSP($\mathbb{B}$) tzn. sugeruje, że taki problem dla skończonego szablonu $\mathbb{B}$ zawsze jest w P lub NP-zupełny. Richard Ladner udowodnił w [Lad75], że założenie P$\neq$NP implikuje istnienie nieskończeniu wielu problemów NP-pośrednich (problemów w NP, które nie są ani w P, ani nie są NP-zupełne). Dlatego też istnienie takiej dychotomii nie jest a priori oczywiste. Pytanie Federa i Vardiego o dychotomię (hipoteza Federa-Vardiego) było otwarte przez ponad dwie dekady. Wreszcie cztery lata temu Dmitriy Zhuk [Zhu20] oraz niezależnie Andrei Bulatov [Bul17] potwierdzili, że w pewnym sensie wyjaśnionym w [FV99] CSP($\mathbb{B}$) jest maksymalną klasą problemów, która nie posiada problemów o NP-pośredniej złożoności. Mimo iż obydwa dowody są istotnie różne, obydwa zostały przeprowadzone w tzw. algebraicznym podejściu do złożoności problemów spełnialności więzów [JCG97, BKJ05] i oba potwierdzają tzw. *algebraiczną hipotezę o dychotomii* (ang. algebraic tractability conjecture) [BKJ05]. W przypadku twierdzenia Courcelle'a własnością powodującą wielomianowość jest ograniczona szerokość drzewiasta grafu. Natomiast w twierdzeniu Bulatova-Zhuka mamy do czynienia z pewną własnością algebraiczną.

Hipoteza Federa i Vardiego o dychotomii została co prawda potwierdzona, w ciągu tych wszystkich lat okazało się jednak, że podejścia algebraicznego można używać nie tylko do badania CSP($\mathbb{B}$) dla skończonych $\mathbb{B}$, ale również do badania złożoności obliczeniowej innych podobnych problemów [KZ17]. W szczególności metod algebry uniwersalnej można użyć dla CSP($\mathbb{B}$) gdzie $\mathbb{B}$ jest przeliczalnie nieskończoną strukturą $\mathbb{B}$, która ma definicję w logice pierwszego rzędu nad skończenie ograniczoną jednorodną strukturą $\mathbb{A}$ (lub szerzej, dla ω-kategorycznych struktur $\mathbb{B}$) [Bod21]. W tym kontekście będziemy mówić, że $\mathbb{B}$ jest reduktem pierwszego rzędu struktury $\mathbb{A}$. Kanonicznym przykładem jednorodnej skończenie ograniczonej struktury relacyjnej jest gęsty liniowy porządek bez końców nad liczbami wymiernymi, oznaczany jako $(\mathbb{Q}; <)$. Struktura ta jest jednorodna ponieważ każdy izomorfizm pomiędzy skończonymi jej podstrukturami może być w łatwy sposób rozszerzony do automorfizmu

$(\mathbb{Q}; <)$. Jest skończenie ograniczona ponieważ istnieją cztery (zabronione) skończone struktury nad sygnaturą $(\mathbb{Q}; <)$ takie, że dowolną skończoną strukturę $\mathbb{A}$ można zanurzyć w $(\mathbb{Q}; <)$ wtedy i tylko wtedy gdy żadnej z tych czterech nie można zanurzyć w $\mathbb{A}$. Te struktury to pętla, symetryczna krawędź, dwuelementowy zbiór niezależny oraz trzyelementowy cykl skierowany. Teraz zauważmy, że graf skierowany jest acykliczny wtedy i tylko wtedy gdy można go zanurzyć w $(\mathbb{Q}; <)$. Mamy zatem, że CSP$(\mathbb{Q}; <)$ to problem acykliczności grafów (ang. digraph acyclicity problem), o którym powszechnie wiadomo, że nie może zostać wyrażony jako CSP$(\mathbb{B})$ dla skończonej struktury $\mathbb{B}$. Ponadto problem CSP$(\mathbb{Q}; <)$ jest przykładem bardzo prostego problemu spełnialności więzów dotyczącym wnioskowania o zależnościach czasowych (ang. temporal reasoning). Istotnie, na zmienne możemy patrzeć jak na zadania, a na liczby wymierne jako na punkty w czasie. Wtedy pytanie o to czy istnieje rozwiązanie instancji problemu CSP$(\mathbb{Q}, <)$ jest tym samym co pytanie czy da się tak uszeregować zadania (zmienne) by wszystkie dotyczące je więzy były spełnione. Problemy spełnialności więzów dla rachunków jakościowych (ang. qualitative calculi) dla wnioskowania o własnościach temporalnych i przestrzennych (ang. temporal and spatial reasoning) takich jak algebra punktowa [VKvB89], przedziałowa algebra Allena [All83], RCC-5 lub RCC-8 [RCC92] są przykładami CSP dla reduktów pierwszego rzędu jednorodnych skończenie ograniczonych struktur. Zatem ta klasa problemów zawiera wiele naturalnych problemów obliczeniowych i w konsekwencji badanie własności tych CSP jest w pełni uzasadnione. Podobnie jak w przypadku skończonych struktur relacyjnych $\mathbb{B}$ istnieje *(nieskończona) algebraiczna hipoteza o dychotomii*, która sugeruje które nieskończone CSP$(\mathbb{B})$ mogą być wielomianowe, a które NP-trudne. Wypowiedź tej hipotezy bardzo przypomina wypowiedź hipotezy dla skończonych CSP potwierdzonej przez Bulatova i Zhuka. Mimo to nie wydaje się byśmy byli blisko jej potwierdzenia (lub obalenia). Jednym z powodów tego stanu rzeczy jest brak znanych technik algorytmicznych rozwiązujących nieskończone problemy spełnialności więzów. W rzeczy samej. Zanim potwierdzono hipotezę Federa i Vardiego, pojawiły się ważne wyniki algebraicznie charakteryzujące struktury $\mathbb{B}$, dla których CSP$(\mathbb{B})$ można rozwiązać za pomocą jednej z dwóch ważnych technik algorytmicznych. Jedna z nich jest uogólnieniem eliminacji Gaussa [IMM$^+$10]. Druga to metoda lokalnej zgodności (ang. local consistency method), która, poza być może przeszukiwaniem z nawrotami, jest najbardziej znanym i najczęściej używanym algorytmem [BK14] w rozwiązywaniu problemów spełnialności więzów, również tych w rachunkach jakościowych [Ren12, BJ17]. Tym samym trudno przecenić znaczenie tej metody w rozwiązywaniu CSP nad nieskończonymi dziedzinami.

Rezultaty składające się na moje osiągnięcie habilitacyjne dotyczą zarówno natury struktur o ograniczonej szerokości relacyjnej (czyli takich których CSP można rozwiązać za pomocą ustalania lokalnej zgodności) jak i zastosowania metody lokalnej zgodności do rozwiązywania problemów CSP oraz problemów pokrewnych dla struktur ω-kategorycznych. Teraz, przechodzę do krótkiego omówienia rezultatów wchodzących w skład mojego osiągnięcia naukowego. Szersze potraktowanie każdego z nich znajduje się w kolejnych sekcjach autoreferatu.

1. **(Artykuły [A1, A2, A3])** Struktury relacyjne o ograniczonej szerokości relacyjnej,

czyli te których CSP mogą być rozwiązane za pomocą ustalania lokalnej zgodności, mogą mieć szerokość relacyjną (k, l), gdzie (k, l) to a priori dowolne liczby naturalne $k \leq l$. Niemniej zostało dowiedzione, że wszystkie skończone $\mathbb{B}$ o ograniczonej szerokości relacyjnej mają de facto szerokość relacyjną albo $(1, 1)$, albo $(2, 3)$ [Bar16]. Ten wynik znany jest jako rezultat o kolapsie hierarchii ograniczonej szerokości relacyjnej. Nietrudno dowieść, że podobny kolaps nie zachodzi dla rozpatrywanych struktur nieskończonych. Niewiele więcej jednak było wiadomo na ten temat zanim ukazały się trzy pierwsze wymienione powyżej prace [A1, A2, A3], w których pokazuje się dokładną szerokość relacyjną pewnych klas struktur nieskończonych. W szczególności dowodzi się, że w wielu ogólnych przypadkach szerokość relacyjna reduktu pierwszego rzędu $\mathbb{B}$ skończenie ograniczonej struktury jednorodnej $\mathbb{A}$ zależy tylko od $\mathbb{A}$, nie zaś od $\mathbb{B}$. W wymienionych artykułach znajdują się nie tylko nowe wyniki, ale i nowe metody. Możliwość użycia tych metod w innych pokrewnych problemach otwartych jest dyskutowana poniżej. W sekcji 4.3 omawiana jest zawartość artykułu [A1] oraz artykułu [A2]. Natomiast w sekcji 4.4 zawartość [A3].

2. **(Artykuł [A4])** Struktury relacyjne bada się zarówno pod kątem ich szerokości relacyjnej jak i tzw. ścisłej szerokości (ang. strict width) [FV99]. Mówimy, że $\mathbb{B}$ ma ograniczoną ścisłą szerokość jeśli każde częściowe rozwiązanie lokalnie zgodnej instancji CSP($\mathbb{B}$) da się rozszerzyć do pełnego rozwiązania. Ta własność nazywana jest również *lokalną-globalną zgodnością* [Fre82, Dec92] przez środowisko zajmujące się wnioskowaniem o relacjach czasowych i przestrzennych. Pewne fragmenty algebry punktowej [VKvB89] oraz algebry przedziałowej Allena [All83], które posiadają tę własność zostały wyodrębnione m.in. w [BIL96, Kou97, BC07b]. Ważną (maksymalną) wielomianową podalgebrą przedziałowej algebry Allena stanowią wszystkie relacje typu Ord-Horn (OH) [NB95]. W [A4], podaję syntaktyczny opis, w terminach formuł logiki pierwszego rzędu nad $(\mathbb{Q}; <)$, tych języków typu OH, które mają ograniczoną ścisłą szerokość i dowodzę, że wszystkie inne takie języki nie posiadają tej własności. Więcej szczegółów na temat tej pracy podaję w sekcji 4.5.

3. **(Artykuł [A5])** Mimo iż nie znamy statusu hipotezy o dychotomii dla języków nieskończonych w pełnej ogólności, została ona potwierdzona w pewnych szczególnych przypadkach. W wyżej wymienionej pracy pokazuję dychotomię dla wszystkich reduktów pierwszego rzędu nieskończonej przeliczalnej relacji równoważności, która posiada nieskończonie wiele klas abstrakcji o nieskończonej mocy każda. W tej pracy najciekawszy jest sposób uzyskania wyniku, który jak na rok 2012, kiedy to praca się ukazała, był stosunkowo nowatorski. W pracy podaliśmy algorytm dla przypadku wielomianowego. Może on jednak być zastąpiony przez algorytm ustalania lokalnej zgodności co pokazano w [A1]. Więcej informacji na ten temat znajduje się w sekcji 4.6.

4. **(Artykuł [A6, A7])** CSP($\mathbb{B}$) można zdefiniować również jako szczególny problem sprawdzania modelu (ang. model-checking problem), w ktorym pytamy czy dane na wejściu prymitywne-pozytywne (pp-)zdanie (ang. primitive-positive sentence) tj. zdanie

logiki pierwszego rzędu zbudowane jedynie z kwantyfikatorów egzystencjalnych, koniunkcji oraz formuł atomowych jest prawdziwe w strukturze $\mathbb{B}$. Przy takiej definicji łatwo uogólnić ten problem poprzez rozluźnienie wymagania dotyczącego postaci formuły pierwszego rzędu w instancji problemu. W szczególności, w instancji kwantyfikowanego problemu spełnialności więzów (ang. quantified constraint satisfaction problem, QCSP($\mathbb{B}$)) dopuszczamy również kwantyfikatory uniwersalne. Problem obliczeniowy QCSP($\mathbb{B}$) jest podobnie jak CSP($\mathbb{B}$) badany zarówno dla szablonów skończonych jak i ω-kategorycznych, m.in. dla reduktów pierwszego rzędu struktury $(\mathbb{Q}; <)$ znanych również jako języki temporalne [Mar17]. Mimo iż zarówno skończone jak i temporalne CSP zostały sklasyfikowane, żadna z pokrewnych klasyfikacji dla QCSP nie została ukończona. Moje osiągnięcie habilitacyjne zawiera dwie prace na temat temporalnych QCSP. W jednej z nich pokazujemy wielomianowy algorytm rozwiązujący QCSP nad językami typu Guarded Ord-Horn (GOH). Algorytm ten jest oparty o metodę lokalnej zgodności. W drugiej pracy pokazuję, że języki GOH to jedyne dualnie-zamknięte języki typu OH, które mają wielomianowe QCSP. Więcej szczegółów znajduje się w sekcji 4.7.

5. **(Artykuł [A8])** Innym problemem pokrewnym CSP, który rozpatrywano w literaturze jest problem abdukcji wywodzący się z dziedziny wnioskowania niemonotonicznego. W [A8] badałem problem Abduction($\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M}$) parametryzowany przez trzy ω-kategoryczne struktury relacyjne. Instancja tego problemu obliczeniowego składa się z trzech zbiorów więzów: bazy wiedzy (ang. knowledge base) utworzonej ze wszystkich zmiennych V oraz relacji z $\mathbb{B}$, zbioru hipotez (ang. hypotheses) Hyp zbudowanego ze zmiennych z $V_H \subseteq V$ i relacji z $\mathcal{HYP}$ oraz pojedynczego więzu M zwanego faktem lub manifestacją (ang. manifestation) nad relacją z $\mathcal{M}$. Pytamy o to czy istnieje wyjaśnienie dla instancji $(V, V_H, \mathrm{KB}, \mathrm{Hyp}, \mathrm{M})$ tj. zbiór więzów $H \subseteq \mathrm{Hyp}$ taki, że $\mathrm{KB} \cup H$ jest spełnialny i $\mathrm{KB} \cup H$ implikuje M. Złożoność obliczeniowa tego typu problemów rozpatrywna była przede wszytkim dla struktur nad dziedziną dwuelementową [EG95, CZ06, NZ08]. W [A8] prezentuję ogólną technikę algorytmiczną, która rozwiązuje pewne naturalne ograniczenie problemu Abduction($\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M}$) dla wszystkich ω-kategorycznych i jednorodnych $\mathbb{B}$, które posiadają ograniczoną ścisłą szerokość. Więcej szczegółów podanych jest w sekcji 4.8.

4.2 Skończone i nieskończone CSP w szczegółach: podstawowe definicje i pojęcia

W tej sekcji przedstawiony zostanie aktualny stan badań nad CSP($\mathbb{B}$) dla skończonych i ω-kategorycznych struktur $\mathbb{B}$. Dziedzinę $\mathbb{B}$ oznaczać będziemy przez B. Więz C (nad k-arną relacją R) to para $(\overline{v}, R)$ gdzie $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_k)$ jest krotką zmiennych zwaną zakresem więzu C (ang. scope of the constraint) oraz relacją R zwaną relacją więzową.

Definicja 1 (***CSP***($\mathbb{B}$)) *Niech $\mathbb{B}$ będzie strukturą relacyjną.*

- ***WEJŚCIE:*** *Zbiór więzów $\mathcal{C}$ nad relacjami z $\mathbb{B}$.*

- ***PYTANIE:*** *Czy istnieje rozwiązanie s dla $\mathcal{C}$ tzn. podstawienie wartości dziedziny B pod zmienne występujące w $\mathcal{C}$ takie, że dla każdego więzu $((v_1, \ldots, v_k), R)$ zachodzi $(s(v_1), \ldots, s(v_k)) \in R$?*

Problemy spełnialności więzów nad skończonymi dziedzinami. Najważniejsze pytania i hipotezy dotyczące skończonych CSP zostały sformułowane w przełomowej pracy Federa i Vardiego. Mimo to nie wydaje się by mogły być one rozwiązane gdyby nie użyto metod algebry uniwersalnej. W tym tzw. algebraicznym podejściu do problemów spełnialności więzów, po pierwsze korzysta się z dobrze znanego faktu łączącego złożoność problemów CSP z pp-definiowalnością pomiędzy odpowiednimi strukturami relacyjnymi. W rzeczy samej. Jeśli $\mathbb{A}$ jest pp-definiowalna w strukturze $\mathbb{B}$ to istnieje redukcja w pamięci logarytmicznej z CSP($\mathbb{A}$) do CSP($\mathbb{B}$). Po drugie, w podejściu algebraicznym patrzy się na tzw. *polimorfizmy* czyli homomorfizmy z potęg struktur z powrotem w struktury. Wiadomo, że struktura $\mathbb{A}$ jest pp-definiowalna w strukturze $\mathbb{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy klon polimorfizmów struktury $\mathbb{B}$, oznaczany przez Pol($\mathbb{B}$), zawiera się w Pol($\mathbb{A}$). Następnie patrzy się na klasy polimorfizmów spełniające pewne równania. Na przykład, operacja s o arności 6 jest nazywana operacją *Siggersa* [Sig10] jeśli dla każdych x, y, z z dziedziny s spełnione jest równanie $s(x, y, x, z, y, z) = s(y, x, z, x, z, y)$. Wszystkie powyższe fakty są często używane, dopiero jednak spojrzenie na Pol($\mathbb{B}$) jako na algebrę umożliwiło sformułowanie *algebraicznej hipotezy o dychotomii*, która podaje konkretny warunek charakteryzujący w pełni wielomianowe CSP($\mathbb{B}$). Poniżej podajemy jedno z wielu równoważnych sformułowań twierdzenia Bulatova-Zhuka.

Twierdzenie 2 ***(Dychotomia)*** *Niech skończona struktura $\mathbb{B}$ będzie rdzeniem nad dziedziną $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Wtedy jedno z następujących stwierdzeń jest prawdziwe.*

- *Istnieje homomorfizm klonów z Pol($\mathbb{B}, b_1, \ldots, b_n$) w klon projekcji i wtedy CSP($\mathbb{B}$) jest NP-zupełne.*
- *Struktura $\mathbb{B}$ jest zamknięta na operację Siggersa i wtedy CSP($\mathbb{B}$) jest w P.*

W innym równoważnym sformułowaniu powyższego twierdzenia operacja Siggersa zastąpiona jest przez operację typu *weak near-unanimity*. Mówimy, że k-arna operacja w jest operacją typu *weak near-unanimity (WNU)* jeśli dla każdych $i, j \in [k]$ spełnia równanie $w(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x) = w(x, \ldots, x, y, x, \ldots, x)$ w którym y występuje tylko na i-tej współrzędnej po lewej stronie i na j-tej współrzędnej po prawej stronie. Tego typu operacje odgrywają rolę w chrakteryzowaniu struktur o ograniczonej szerokości relacyjnej. Następujący wynik autorstwa Libora Barto oraz Marcina Kozika potwierdza inną hipotezę z [FV99] przeformułowaną w [LZ07].

Twierdzenie 3 ***(Twierdzenie o ograniczonej szerokości relacyjnej)*** *[BK14] Skończona struktura relacyjna $\mathbb{B}$ będąca rdzeniem ma ograniczoną szerokość relacyjną wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięta na operację typu weak near-unanimity o każdej arności ≥ 3.*

Problemy Spełnialności Więzów dla struktur nieskończonych. Mimo iż dysponujemy dowodem dychotomii dla skończonych CSP($\mathbb{B}$), nadal nie wiemy czy można uzyskać podobny wynik dla reduktów pierwszego rzędu skończenie ograniczonych struktur jednorodnych.

Poniższa dychotomia algebraiczna stoi za algebraiczną hipotezą o dychotomii dla nieskończonych problemów spełnialności więzów.

Twierdzenie 4 *[BPP14, BP16] Niech $\mathbb{B}$ będzie ω-kategoryczną strukturą, która jest rdzeniem. Wtedy zachodzi dokładnie jedno z dwóch poniższych zdań.*

- *Istnieje ciągły homomorfizm klonów z Pol($\mathbb{B}, b_1, \ldots, b_n$) dla pewnych elementów $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{B}$ w klon projekcji i wtedy CSP($\mathbb{B}$) jest NP-zupełny.*
- *Pol($\mathbb{B}$) zawiera operację typu pseudo-Siggers modulo endomorfizmy $\mathbb{B}$ tzn. 6-arną operację s oraz endomorfizmy α, β struktury $\mathbb{B}$ spełniające*

  $$\alpha \cdot s(x, y, x, z, y, z) \approx \beta \cdot s(y, x, z, x, z, y)$$

  dla wszystkich elementów $x, y, z \in B$.

W ogólności mówimy, że f spełnia równanie $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$ modulo unarne operacje ze zbioru F jeśli spełnia $\alpha \cdot f(\overline{x}) = \beta \cdot f(\overline{y})$ dla wszystkich elementów $\overline{x}, \overline{y}$ z dziedziny oraz unarnych operacji $\alpha, \beta \in F$. W zasadzie, dla dowolnego polimorfizmu typu X rozważanego dla skończonych struktur (gdzie X może być np. operacją typu Siggers albo typu weak near-unanimity) rozważa się jego pseudo wariant modulo zbiór funkcji unarnych w F. W tym kontekście f jest typu pseudo-X modulo F jeśli f spełnia każde równanie charakterystyczne dla X modulo operacje w F.

Przypuszcza się, że CSP dla reduktów pierwszego rzędu skończenie ograniczonych struktur jednorodnych spełniających warunek w drugim podpunkcie w twierdzeniu powyżej jest w P.

Hipoteza 5 ***(Algebraiczna Hipoteza o Dychotomii dla Szablonów Nieskończonych)*** *Niech rdzeń $\mathbb{B}$ będzie zamkniętym na operację typu pseudo-Siggers modulo endomorfizmy $\mathbb{B}$ reduktem pierwszego rzędu skończenie ograniczonej struktury jednorodnej $\mathbb{A}$. Wtedy CSP($\mathbb{B}$) jest w P.*

Zauważmy, że domniemany warunek na wielomianowość dla struktur nieskończonych jest bardzo podobny do warunku dla skończonych szablonów, który został potwierdzony przez Zhuka i Bulatova. Mimo iż hipoteza dla szablonów nieskończonych nie została potwierdzona w całej ogólności, podany w niej warunek został zweryfikowany w pewnej liczbie wypadków m.in. dla wszystkich reduktów pierwszego rzędu pewnych prostych struktur takich jak $(\mathbb{Q}; <)$ [BK08], przeliczalny graf uniwersalny [BP15], lub dowolny przeliczalny graf jednorodny [BMPP19]. Ostatnio, korzystając z nowych technik dowiedziono klasyfikacji dla reduktów pierwszego rzędu turnieju losowego [MP20]. Ta ostatnia klasyfikacja została udowodniona korzystając z całkowicie nowej metody. Ogólniejsze wyniki potwierdzające hipotezę o dychotomii dotyczą reduktów pierwszego rzędu wszystkich struktur unarnych [BM18] czy wszystkich problemów spełnialności więzów wyrażalnych w logice MMSNP [BMM18]. Udowodnienie większości z wymienionych przeze mnie częściowych klasyfikacji możliwe było w dużej mierze dzięki odkryciu polimorfizmów kanonicznych (ang. canonical polymorphisms).

Niech struktura $\mathbb{B}$ będzie reduktem pierwszego rzędu struktury $\mathbb{A}$ i niech $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$ oznacza grupę automorfiznów struktury $\mathbb{A}$. Piszemy również $\overline{\mathrm{Aut}(\mathbb{A})}$ by oznaczyć zbiór funkcji g takich, że dla każdego skończonego podzbioru $F \subseteq A$, istnieje funkcja w $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$, która zgadza się z g na F. Funkcja w $\mathrm{Pol}(\mathbb{B})$ jest zwana $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$-*kanoniczna* jeśli działa na orbitach n-krotek względem $\mathrm{Aut}(\mathbb{A})$, dla wszystkich $n \geq 1$. Użycie polimorfizmów kanonicznych zazwyczaj upraszcza dowody i często pozwala na zredukowanie nieskończonego CSP do wielomianowego skończonego CSP. Korzystając z redukcji w [BM18] można zatem użyć twierdzenia Bulatova-Zhuka by pokazać wielomianowość i twierdzenia Barto-Kozika by pokazać, że pewien nieskończony szablon ma ograniczoną szerokość relacyjną. Poniżej znajdują się obydwa twierdzenia podniesione do nieskończonych szablonów zamkniętych na pewne polimorfizmy kanonicze.

Twierdzenie 6 *[BM18] Niech $\mathbb{B}$ będzie reduktem pierwszego rzędu skończenie ograniczonej jednorodnej struktury $\mathbb{A}$ o skończonej sygnaturze i przypuścmy, że $\mathbb{B}$ ma $Aut(A)$-kanoniczny polimorfizm typu pseudo-Siggers modulo $\overline{Aut(\mathbb{A})}$. Wtedy CSP($\mathbb{B}$) jest w P.*

Teraz podnosimy twierdzenie Barto i Kozika do struktur nieskończonych.

Twierdzenie 7 *[BM18] Niech $\mathbb{B}$ będzie reduktem pierwszego rzędu skończenie ograniczonej jednorodnej struktury $\mathbb{A}$ o skończonej sygnaturze. Przypuśćmy, że $\mathbb{B}$ ma $Aut(\mathbb{A})$-kanoniczny pseudo–WNU polimorfizm modulo $\overline{Aut(A)}$ o każdej arności ≥ 3. Wtedy CSP($\mathbb{B}$) da się rozwiązać za pomocą ustalania lokalnej zgodności i tym samym jest w P.*

Mimo iż dwóch powyższych twierdzeń użyto wielokrotnie we wspomnianych wcześniej częściowych klasyfikacjach, znane są wielomianowe redukty pierwszego rzędu $(\mathbb{Q}; <)$, które nie posiadają kanonicznej operacji typu pseudo-Siggers wymienionej w Twierdzeniu 6. Wydaje się więc, że jeśli hipoteza o dychotomii dla nieskończonych szablonów jest prawdziwa to nie da się jej potwierdzić korzystając z narzędzi matematycznych którymi już dysponujemy. Zatem albo potrzebujemy lepszej redukcji z nieskończonych w skończone CSP, albo problemu nieskończonej dychotomii nie da się rozwiązać używając twierdzenia Bulatova-Zhuka jako czarnej skrzynki. W tym drugim wypadku potrzebujemy zapewne nowych metod algorytmicznych oraz ich pełnej charakteryzacji tzn. zrozumienie dla jakich szablonów mogą być użyte. Rezultaty tego typu znane są dla CSP dla struktur skończonych. Mam na myśli m.in. twierdzenie Barto-Kozika oraz charakteryzację struktur dla których CSP może być rozwiązane za pomocą algorytmu z [IMM+10] uogólniającego eliminację Gaussa. Spodziewamy się jednak, że w przypadku rozważanych nieskończonych szablonów będą to inne metody algorytmiczne. W rzeczy samej. Mimo, iż metoda lokalnej zgodności jest wszechobecna w literaturze poświęconej nieskończonemu CSP, udowodniono w [BPR20], że nie istnieje algebraiczna charakteryzacja struktur $\mathbb{B}$, których CSP($\mathbb{B}$) mogą być w ten sposób rozwiązane. Innymi słowy, nie istnieje nieskończony odpowiednik twierdzenia Barto i Kozika.

Ograniczona szerokość relacyjna. Przypomnijmy, że $\mathbb{B}$ ma ograniczoną szerokość relacyjną jeśli CSP($\mathbb{B}$) można rozwiązać za pomocą jednego z algorytmów ustalającego lokalną zgodność, lub równoważnie za pomocą algorytmu ustalającego (k, l)-minimalność dla pewnych liczb naturalnych $k \leq l$ (por ryc. 1). Procedura zwraca (k, l)-minimalną instancję CSP $\mathcal{C}'$, która jest równoważna $\mathcal{C}$ tj. posiada dokładnie te same rozwiązania. Instancja $\mathcal{C}$' jest (k, l)-minimalna jeśli spełnione są dwa następujące warunki:

- każdy co najwyżej l-elementowy podzbiór zmiennych w $\mathcal{C}'$ jest zawarty w zakresie pewnego więzu,
- dla każdego co najwyżej k-elementowego podzbioru W zmiennych z $\mathcal{C}'$ projekcje dowolnych dwóch więzów $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, których zakresy zawierają W są ze sobą tożsame.

- WEJŚCIE: Zbiór więzów $\mathcal{C}$.
- WYJŚCIE: (k, l)-minimalny zbiór więzów $\mathcal{C}'$ równoważny $\mathcal{C}$.

1. Dla każdego l-elementowego podzbioru $\{x_1, \ldots, x_l\}$ zmiennych z $\mathcal{C}$ wprowadzamy więz $((x_1, \ldots, x_l), B^l)$.
2. Dopóki więzy się zmieniają, dla każdego co najmniej k-elementowego podzbioru W zmiennych z $\mathcal{C}$ i dowolnych dwóch więzów $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ których zakresy zawierają W, usuń z C_1, C_2 minimalną liczbę krotek tak by projekcja C_1 na W była tożsama z projekcją C_2 na W.

Rycina 1: Algorytm ustalający (k, l)-minimalność.

Powyższy algorytm przekształcając $\mathcal{C}$ nie gubi żadnego rozwiązania wejściowego zbioru więzów. Zatem jeśli $\mathcal{C}'$ zawiera *więz pusty* tzn. $(\overline{v}, \emptyset)$, to zarówno $\mathcal{C}'$ jak i orginalny $\mathcal{C}$ jest niespełnialny.

Definicja 8 ***(Ograniczona szerokość relacyjna)*** *Mówimy, że $\mathbb{B}$ ma szerokość relacyjną (k, l) jeśli instancja $\mathcal{C}$ problemu CSP($\mathbb{B}$) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy jej równoważna (k, l)-minimalna instancja $\mathcal{C}'$ nie zawiera pustego więzu.*

Struktura relacyjna $\mathbb{B}$ ma ograniczoną szerokość relacyjną jeśli ma szerokość relacyjną (k, l) dla pewnych $k \leq l$.

Ponieważ dowolny problem CSP($\mathbb{B}$), który może być rozwiązany za pomocą ustalania lokalnej zgodności może być również rozwiązany za pomocą ustalania (k, l)-minimalności dla pewnych k i l, naturalne jest traktowanie pary (k, l) jako miary poziomu zgodności, którego ustalenie jest niezbędne by rozwiązać CSP($\mathbb{B}$). W szczególności szeroko znany problem HORN-SAT można rozwiązać poprzez sprawdzenie czy $(1,1)$-minimalny zbiór więzów posiada więz pusty. Natomiast rozwiązanie 2-SAT lub 2-kolorowania wymaga ustalenia $(2,3)$-minimalności. Tak jak już wspomniałem, w przypadku szablonów skończonych $(1,1)$ i $(2,3)$ to jedyne wartości (k,l) które zmuszeni jesteśmy rozpatrywać.

Twierdzenie 9 *[Bar16] Niech $\mathbb{B}$ będzie skończoną strukturą o ograniczonej szerokości relacyjnej. Wtedy $\mathbb{B}$ ma szerokość relacyjną albo $(1,1)$, albo $(2,3)$.*

Dla nieskończonych struktur taki kolaps nie zachodzi. W rzeczy samej. Rozważmy k-ty graf Hensona $\mathcal{H}_k = (V;E)$ tj. przeliczalny uniwersalny graf nie zawierający kliki o rozmiarze k. Teraz pokażemy, że $\mathcal{H}_k = (V;E)$ ma szerokość relacyjną dokładnie $(2,k)$.

Przykład 10 *Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem więzów nad zmiennymi $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ oraz relacją E oznaczającą krawędź w grafie $\mathcal{H}_k$ i niech $\mathcal{C}'$ będzie $(2,k)$-minimalną instancją CSP równoważną $\mathcal{C}$. Nietrudno jest zauważyć, że $\mathcal{C}$ opisuje graf, nazwijmy go G, nad zmiennymi V. W konsekwencji $(2,k)$-minimalny $\mathcal{C}'$ opisuje możliwe k-elementowe podgrafy G dla każdego k-elementowego pozdbioru wierzchołków w G. Zatem, jeśli G zawiera pętlę lub k-klikę, wtedy $\mathcal{C}'$ zawiera pusty więz. W przeciwnym razie, z definicji $\mathcal{H}_k$, istnieje zanurzenie G w H_k i w konsekwencji $\mathcal{C}$ jest spełnialny. To kończy dowód faktu, że $\mathcal{H}_k$ ma szerokość relacyjną $(2,k)$.*

Z drugiej strony, rozważmy zbiór więzów nad zmiennymi $v_1,\ldots,v_k$, który koduje k-klikę tj. dla każdych różnych $i \neq j$ zawiera więz $((v_i,v_j),E)$. Ten zbiór więzów z oczywistych powodów nie jest spełnialny w $\mathcal{H}_k$. Rozważmy teraz $(2,k-1)$-minimalny $\mathcal{C}'$ równoważny $\mathcal{C}$. Ponieważ $\mathcal{H}_k$ zawiera $(k-1)$-kliki, zbiór $\mathcal{C}'$ nie posiada pustych więzów. W konsekwencji, graf $\mathcal{H}_k$ nie ma szerokości grafowej $(2,k-1)$. Aby zobaczyć, że nie ma również szerokości grafowej $(1,k)$, zauważamy, że grupa automorfizmów $\mathcal{H}_k$ jest tranzytywna tzn. zawiera tylko jedną orbitę elementów. W takim razie $(1,k)$-minimalny $\mathcal{C}''$ równoważny $\mathcal{C}$ nie ma pustych więzów i w konsekwencji $\mathcal{H}_k$ nie ma szerokości relacyjnej $(1,k)$. W takim razie szerokość relacyjna $\mathcal{H}_k$ to dokładnie $(2,k)$.

Ograniczona ścisła szerokość. Tak jak już wspomniałem oprócz struktur z ograniczoną szerokością relacyjną rozważa się struktury z ograniczoną ścisłą szerokością (ang. bounded strict width). Ta własność zwana jest również lokalną-globalną konsystencją (ang. local-to-global consistency). Mówimy, że $\mathbb{B}$ ma ścisłą szerokość k jeśli każde częściowe rozwiązanie $(k,k+1)$-minimalnej instancji CSP($\mathbb{B}$) może zostać rozszerzone do pełnego rozwiązania tej instancji. W szczególności, $(\mathbb{Q};<,\neq,=,<)$, ale również 2-SAT i 2-kolorowanie mają ścisłą szerokość 2. Powszechnie wiadomo, że skończona struktura relacyjna ma ograniczoną ścisłą szerokość wtedy i tylko wtedy, gdy jest zamknięta na pewną operację typu near-unanimity. Ten fakt uogólnia się na struktury skończone i oligopotentną operację typu quasi near-unanimity. Operacja f jest typu near-unanimity jeśli jest typu weak near-unanimity i dodatkowo spełnia równanie $f(x,x,\ldots,x) = f(y,x,\ldots,x)$ dla wszystkich x oraz y w dziedzinie f.

4.3 Kolapsy szerokości relacyjnej dla klas struktur z ograniczoną ścisłą szerokością

W tej sekcji omawiana jest zawartość prac: [A1] oraz [A2].

W przykładzie 10 pokazaliśmy, że $\mathcal{H}_k$ ma szerokość relacyjną dokładnie $(2, k)$. Do rozwiązania odpowiedniego problemu CSP nie możemy użyć ani $(2, k-1)$, ani $(1, k)$-minimalności gdyż wtedy nie bylibyśmy w stanie wykryć zabronionych k-klik zakodowanych w wejściowym zbiorze więzów. Mimo, iż wraz z rosnącym k szerokość relacyjna $\mathcal{H}_k$ ściśle wzrasta, nie zmienia się gdy dodajemy do $\mathcal{H}_k$ relacje definiowalne w logice pierwszego rzędu nad $\mathcal{H}_k$ tak długo jak rozważane ekspansje pierwszego rzędu mają ograniczoną ścisłą szerokość. Twierdzenie 11 uogólniające powyższe stwierdzenie dotyczące $\mathcal{H}_k$ na wszystkie grafy jednorodne (które wszystkie są również skończenie ograniczone) jest pierwszym prezentowanym przeze mnie rezultatem wchodzącym w skład osiągnięcia habilitacyjnego.

Twierdzenie 11 *[A1] Niech $\mathbb{B}$ będzie ekspansją pierwszego rzędu jednorodnego grafu $\mathbb{A}$ takiego, że $\mathbb{B}$ ma ograniczoną ścisłą szerokość (lub równoważnie, jest zamknięty na oligopotentną operację typu quasi near-unanimity). Wtedy $\mathbb{B}$ ma szerokość relacyjną $(2, \mathcal{L}_{\mathbb{A}})$ gdzie $\mathcal{L}_{\mathbb{A}}$ jest maksymalnym rozmiarem zabronionej podstruktury $\mathbb{A}$.*

W świetle powyższego twierdzenia naturalnym jest pytanie czy ekspansje pierwszego rzędu innych skończenie ograniczonych jednorodnych struktur mają podobną szerokość relacyjną. Duża klasa struktur z tą własnością została zidentyfikowana w kolejnym, przytoczonym poniżej wyniku, który wchodzi w skład mojego osiągnięcia habilitacyjnego.

Mówimy, że struktura $\mathbb{A} = (A; R_1, \ldots, R_\kappa)$ jest binarnym rdzeniem jeśli wszystkie R_i są binarne oraz dla wszystkich $d_1, d_2 \in D$ istnieje dokładnie jedno R_i spełniające $i \in [\kappa]$ takie, że $(d_1, d_2) \in R_i$. Struktura jest liberalna jeśli nie ma zabronionych podstruktur o rozmiarach 3, 4, 5 i 6.

Twierdzenie 12 *[A2] Niech $\mathbb{A}$ będzie liberalnym skończenie ograniczonym jednorodnym binarnym rdzeniem i niech $\mathbb{B}$ będzie ekspansją pierwszego rzędu struktury $\mathbb{A}$ z ograniczoną ścisłą szerokością (lub równoważnie, zamkniętą na oligopotentną operację typu quasi near-unanimity). Wtedy struktura $\mathbb{B}$ ma szerokość relacyjną $(2, \mathcal{L}_{\mathbb{A}})$.*

Zauważmy, że ekspansja dowolnego jednorodnego grafu $(V; E)$ przez relację $N(x, y) \equiv (\neg(E(x, y) \vee x = y))$ jest binarnym rdzeniem. Z drugiej strony $\mathcal{H}_3$ posiada zabronioną podstrukturę o rozmiarze 3, zatem twierdzenie 12 nie jest, dosłownie rzecz ujmując, uogólnieniem twierdzenia 11. Niemniej jest dużym krokiem na przód w kierunku wyznaczenia dokładnej szerokości relacyjnej dla wszystkich ekspansji pierwszego rzędu skończenie ograniczonych struktur jednorodnych z ograniczoną ścisłą szerokością. W rzeczy samej. Dowód twierdzenia 11 oparty jest w sposób istotny o klasyfikację grafów jednorodnych autorstwa Alistaira H. Lachlana i Roberta E. Woodrowa [LW80] zgodnie z którą jest tylko kilka możliwych typów grafów jednorodnych oraz o klasyfikację złożoności obliczeniowej problemów spełnialności więzów dla reduktów pierwszego rzędu nieskończenie przeliczalnych grafów jednorodnych przeprowadzoną przez Manuela Bodirsky'ego, Barnaby'ego Martina, Michaela Pinskera i Andrása Pongrácza [BMPP19], który daje pewien wgląd w kratę klonów polymorfizmów dla tych grafów. Dlatego też takie podejście może być użyte tylko w stosunku do klas struktur dla ktorych znamy złożoność CSP. W takim razie takiego podejścia nie można byłoby użyć dla wszystkich reduktów pierwszego rzędu skończenie ograniczonych struktur jednorodnych. Nie moglibyśmy również użyć tego podejścia by udowodnić twierdzenie 12, którego dowód w [A2] oparty jest tylko o dwa poniższe założenia:

1. $\mathbb{B}$ jest ekspansją pierwszego rzędu liberalnego skończenie ograniczonego jednorodnego binarnego rdzenia $\mathbb{A}$,

2. $\mathbb{B}$ jest zamknięta na oligopotentną operację typu quasi near-unanimity operation.

Teraz naszym celem jest zastępienie warunku 1. poprzez następujacy warunek 1'.

1'. $\mathbb{B}$ jest ekspansją (reduktem) pierwszego rzędu skończenie ograniczonej jednorodnej struktury $\mathbb{A}$.

Gdyby nam się to udało, to otrzymalibyśmy ładne ograniczenie górne na szerokość relacyjną dla dużej i naturalnej grupy struktur. Wynik oparty byłby tylko na dwóch ogólnych założeniach: założeniu 1'. oraz założeniu 2. Zauważmy, że potwierdzenie algebraicznej dychotomii dla szablonów nieskończonych wymagałoby pracy z założeniem 1' oraz założeniem

2'. $\mathbb{B}$ jest zamknięta na operację typu pseudo-Siggers modulo endomorfizmy $\mathbb{B}$.

Praca z założeniem 2' może się w istocie okazać dużo trudniejsza niż praca z założeniem 2. Niemniej w literaturze dotyczącej nieskończonych szablonów nie ma wielu wyników opartych o założenia dotyczące polimorfizmów i każdy taki wynik wymusza odkrycie nowych metod, które potencjalnie mogą być wykorzystane do rozwiązania algebraicznej hipotezy o dychotomii dla nieskończonych szablonów. W szczególności w dowodzie twierdzenia 12 pokazuję, że wszystkie instancje rozważanego CSP($\mathbb{B}$) są proste w pewnym określonym poniżej sensie. Z grubsza mówiąc, dla $(2, \mathcal{L}_{\mathbb{A}})$-minimalnej instancji $\mathcal{C}$ problemu CSP($\mathbb{B}$) konstruujemy graf skierowany $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ dla wierzchołków będących parami $((v, x), C)$ gdzie v, x są zmiennymi w instancji $\mathcal{C}$ a $C \subseteq A^2$ jest binarną relacją prymitywnie-pozytywnie definiowalną w strukturze $\mathbb{B}$. Istnieje krawędź skierowana z $((v_1, x_1), C)$ w $((v_2, x_2), D)$ w grafie $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ jeśli istnieje więz nad relacją R w $\mathcal{C}$ którego zakres $(y_1, \ldots, y_k)$ zawiera v_1, x_1, v_2, x_2 oraz $R(y_1, \ldots, y_k)$ implikuje $(C(v_1, x_1) \implies D(v_2, x_2))$ takie, że C i D nie są pełnymi projekcjami $R(y_1, \ldots, y_k)$ na odpowiednio (v_1, x_1) oraz (v_2, x_2). Mówimy, że struktura $\mathbb{B}$ is implikacyjnie prosta jeśli $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}$ dla każdej $(2, \mathcal{L}_{\mathbb{A}})$-minimalnej instancji $\mathcal{C}$ problemu CSP($\mathbb{B}$) jest acykliczny. W [A2] pokazuję, że

- wszystkie implikacyjnie proste ekspansje pierwszego rzędu liberalnych skończenie ograniczonych jednorodnych rdzeni $\mathbb{A}$ mają szerokość relacyjną $(2, \mathcal{L}_{\mathbb{A}})$ oraz, że

- wszystkie implikacyjnie trudne ekspansje pierwszego rzędu liberalnych skończenie ograniczonych jednorodnych binarnych rdzeni mają nieograniczoną ścisłą szerokość.

W dowodzie drugiego punktu korzystam w zasadzie z faktu, że rozpatrywana struktura nie jest zamknięta na oligopotentną operację typu quasi near-unanimity.

Konstrukcja grafu $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ przypomina konstrukcję Qoset($\mathcal{C}$) dla $(1, 2)$-minimalnej instancji $\mathcal{C}$ skończonego CSP z [Bar11]. Ta praca zawiera alternatywny w stosunku do orginalnego [Bul11] i prostszy dowód klasyfikacji złożoności CSP dla skończonych szablonów $\mathbb{B}$ zawierających wszystkie unarne relacje, czyli dla wszystkich tzw. konserwatywnych języków. Podobieństwo obu konstrukcji rodzi pytanie czy metoda użyta w [A2] może prowadzić do jakichś częściowych klasyfikacji dla nieskończonych CSP.

4.4 Kolapsy szerokości relacyjnej dla klas struktur zamkniętych na kanoniczne operacje typu pseudo–WNU

W tej sekcji omawiana jest zawartość pracy [A3].

Twierdzenia 11 oraz 12 są stosunkowo nowe, niemniej zwrócono na nie uwagę w niedawno napisanej i bardzo ciekawej pracy Antoine'a Mottet oraz Michaela Pinskera [MP20], w której autorzy rozwijają swoją teorię gładkich aproksymacji (ang. theory of smooth approximations). Ta teoria została użyta przez Antoine Mottet, Michaela Pinskera, Tomáša Nagy'ego oraz przez mnie w [A3] by pokazać pewne nowe kolapsy szerokości relacyjnej tym razem bez założenia o ograniczonej ścisłej szerokości. W szczególności nie zakładamy istnienia oligopotentnej operacji typu quasi near-unanimity. W takim razie technika dowodowa musi być i jest istotnie inna od tej użytej w dowodach rezultatów przedstawionych w sekcji powyżej. W [A3] po pierwsze przedstawiamy nową wielomianową redukcję z nieskończonych w skończone CSP. Doprecyzowuje ona twierdzenie 7 poprzez podanie konkretnego ograniczenia na szerokość relacyjną reduktu pierwszego rzędu $\mathbb{B}$ struktury $\mathbb{A}$, które zależy tylko od $\mathbb{A}$. Szczegóły podane są w sformułowaniu twierdzenia 13. Całkowicie nowa rzecz to ograniczenie na szerokość relacyjną struktur $\mathbb{B}$ zamkniętych na Aut($\mathbb{A}$)-kanoniczne operacje typu pseudo-totally symmetric o wszystkich możliwych arnościach. Aby sformułować twierdzenie potrzebujemy dwóch dodatkowych definicji.

Dla $l \geq 1$, mówimy, że $\mathbb{B}$ jest l-ograniczona jeśli skończona podstruktura X zanurza się w $\mathbb{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie podstruktury Y struktury X o rozmiarze co najwyżej l zanurzają się w $\mathbb{B}$. Dla $k \geq 1$ mówimy, że $\mathbb{B}$ jest k-jednorodna jeśli dla dowolnych krotek a oraz b o dowolnej skończonej długości, jeśli wszystkie k-podkrotki krotek a oraz b są w tej samej orbicie względem Aut($\mathbb{B}$), to a i b są w tej samej orbicie ze względu na Aut($\mathbb{B}$). Każda skończenie ograniczona struktura jest l-ograniczona dla pewnego l oraz każda jednorodna struktura jest k-jednorodna dla pewnego k.

Twierdzenie 13 *[A3] Niech $k, l \geq 1$ oraz niech $\mathbb{B}$ będzie reduktem pierwszego rzędu k-jednorodnej oraz l-ograniczonej ω-kategorycznej struktury $\mathbb{B}$.*

- *Jeśli* $\mathbb{B}$ *jest zamknięta na* $Aut(\mathbb{A})$*-kanoniczną operację typu pseudo-WNU modulo* $\overline{Aut(\mathbb{A})}$ *o dowolnej arności* $n \geq 3$*, to* $\mathbb{B}$ *ma szerokość relacyjną* $(2k, \max(3k, l))$.
- *Jeśli* $\mathbb{B}$ *jest zamknięta na* $Aut(\mathbb{A})$*-kanoniczną operację typu pseudo-totally symmetric modulo* $\overline{Aut(\mathbb{A})}$ *o każdej arności, to* $\mathbb{B}$ *ma szerokość relacyjną* $(k, max(k+1, l))$.

Druga część pracy [A3] zawiera pewne klasy struktur dla których powyżej przytoczone twierdzenie można użyć. Pochodzą one albo z istniejącej już wcześniej literatury, albo są opracowane przez nas przy wykorzystaniu teorii gładkich aproksymacji.

Wniosek 14 *[A3] Niech* $\mathbb{B}$ *będzie strukturą o ograniczonej szerokości relacyjnej. Jeśli* $\mathbb{B}$ *jest reduktem pierwszego rzędu:*

- *uniwersalnego jednorodnego grafu* $\mathcal{G}$*, albo uniwersalnego jednorodnego turnieju* $\mathcal{T}$*, lub struktury posiadającej jedynie relacje unarne, wtedy* $\mathbb{B}$ *ma szerokość relacyjną co najwyżej* $(4, 6)$*;*
- *uniwersalnego jednorodnego grafu* $\mathcal{H}_n$*, gdzie* $n \geq 3$*, nie zawierającego kliki o wielkości* n*, wtedy co najwyżej* $(2, n)$*,*
- $(\mathbb{N}; =)$*, albo nieskończonej przeliczalnej relacji równoważności o nieskończeniu wielu klasach abstrakcji każdej o nieskończonej mocy* $\mathcal{C}^{\omega}_{\omega}$*, lub losowego porządku częściowego* $\mathcal{P}$*, wtedy co najwyżej* $(2, 3)$.

Niestety nie wiemy w tej chwili czy twierdzenie 13 może być uogólnione na wszystkie klasy reduktów pierwszego rzędu skończenie ograniczonych struktur jednorodnych. Na te naturalne otwarte pytanie może być jednak trudno odpowiedzieć gdyż nie dysponujemy i nie możemy dysponować nieskończonym odpowiednikiem twierdzenia Barto i Kozika.

4.5 Języki typu Ord-Horn z ograniczoną ścisłą szerokością

W tej sekcji omawiana jest zawartość pracy [A4].

Zainteresowanie strukturami z ograniczoną ścisłą szerokością (lokalną-globalną konsystencją) nie jest czysto teoretyczne i w dużym stopniu pochodzi z dziedziny wnioskowania o zależnościach przestrzennych i czasowych. Dla zastosowań w tej ostatniej dziedzinie badań, przytoczona powyżej algebraiczna charakteryzacja rozważanych struktur może nie być wystarczająca. Bardziej jednoznaczna np. syntaktyczna, w terminach logiki pierwszego rzędu, charakteryzacja takich struktur byłaby bardziej na miejscu. Szczególnym zainteresowaniem w dziedzinie wnioskowania o zależnościach czasowych i przestrzennych cieszą się języki typu Ord-Horn (OH) [NB95]. Pewne podklasy języków tego typu z ograniczoną ścisłą szerokością zostały odkryte m.in. w [BIL96, Kou97, BC07b]. Niemniej pełna klasyfikacja została uzyskana dopiero przeze mnie w [A4].

Redukt pierwszego rzędu $(\mathbb{Q}; <)$ jest językiem typu OH wtedy i tylko wtedy gdy każdą z jego relacji da się zdefiniować za pomocą koniunkcji klauzul typu OH, z których każda jest postaci

$$(x_1 \neq y_1 \vee \cdots \vee x_k \neq y_k \vee xRy)$$

gdzie $R \in \{<, =, \leq, \neq\}$ i zarówno nierówności jak i ostatni składnik konjunkcji może zostać pominięty.

Z drugiej strony, język typu OH jest podstawowym językiem typu OH (ang. Basic Ord-Horn, BOH) jeśli można go zdefiniować za pomocą koniunkcji klauzul typu BOH. Są one w jednej z następujących postaci

- $x = y$, $x \leq y$,
- $(x_1 \neq y_1 \vee \cdots \vee x_p \neq y_p)$, lub
- $(x_1 \neq x_2 \vee \cdots \vee x_1 \neq x_q) \vee (x_1 < y_1) \vee (y_1 \neq y_2 \vee \cdots \vee y_1 \neq y_{q'})$.

Dowodzę następującego rezultatu.

Twierdzenie 15 *[A4] Niech $\mathbb{B}$ będzie językiem typu Ord-Horn. Wtedy $\mathbb{B}$ ma ograniczoną ścisłą szerokość wtedy i tylko wtedy, gdy jest językiem typu BOH.*

Po pierwsze pokazuję, że każdy język typu BOH jest zamknięty na pewną oligopotentną operacją typu quasi near-unanimity. Aby skonstruować tego typu operację dla danego języka typu BOH wprowadzam pojęcie homomorficznego systemu typu back-and-forth, który jest modyfikacją standardowego systemu typu back-and-forth znanego z teorii modeli. Następnie, identyfikuję kilka relacji typu OH, które nie mają ograniczonej ścisłej szerokości i wreszcie pokazuję, że wszystkie języki typu OH, które nie są BOH pp-definiują jedną z tych kilku relacji.

4.6 Złożoność obliczeniowa równoważnościowych problemów spełnialności więzów

W tej sekcji omawiana jest zawartość pracy [A5].

W tej pracy potwierdzamy algebraiczną hipotezę o dychotomii dla szablonów nieskończonych dla reduktów pierwszego rzędu relacji równoważności, oznaczanej jako C^{ω}_{ω} o $\aleph_0$ klasach abstrakcji, z której każda ma $\aleph_0$ elementów. Jest to czwarta z kolei klasyfikacja tego typu. Pierwsze trzy dotyczyły reduktów pierwszego rzędu, kolejno: $(\mathbb{N}; =)$, $(\mathbb{Q}, <)$ oraz przeliczalnego uniwersalnego grafu. Z jednej strony używamy polimorfizmów kanonicznych odkrytych przy okazji tej ostatniej klasyfikacji, z drugiej nasze podejście różni się w stosunku do wszystkich wcześniejszych klasyfikacji w następujący sposób. W każdej z pierwszych trzech klasyfikacji autorzy zaczynali od wskazania kilku NP-trudnych języków zwanych często źródłami trudności w nadziei na to, że każdy NP-trudny język z rozważanej klasy definiuje jedno ze wskazanych źródeł trudności. Następnie analizowano operacje, które nie zachowują żadnego ze źródeł trudności by, przy odrobinie szczęścia, w oparciu o te operacje skonstruować algorytmy wielomianowe. W naszym podejściu, dla każdego rozważanego rdzenia $\mathbb{B}$ badaliśmy rozmaitość algebraiczną generowaną przez algebrę polimorfizmów ekspansji $\mathbb{B}$ przez pewne stałe. Wtedy albo istnieje ekspansja $\mathbb{B}$ przez $b_1, \ldots, b_n$, taka, że odpowiednia rozmaitość zawiera trywialną dwuelementową algebrę i tym samym homomorfizm klonów z $\mathrm{Pol}(\mathbb{B}, b_1, \ldots, b_n)$ w klon projekcji, albo jesteśmy w stanie skonstruować polimorfizm $\mathbb{B}$, który jest operacją typu Siggers modulo endomorfizmy $\mathbb{B}$. Pokazujemy również, że w tym drugim przypadku CSP($\mathbb{B}$) jest w P. W [A1] pokazano, że wszystkie te problemy CSP można rozwiązać również za pomocą metody lokalnej zgodności. Metoda pokazywania trudności nieskończonych szablonów poprzez konstruowanie odpowiednich homomorfizmów w klon projekcji zapoczątkowana w naszej pracy jest kontynuowana i rozwijana m.in. w następujących pracach [BMPP19, BM18, BMM18, MP20].

4.7 Temporalne kwantyfikowane problemy spełnialności więzów

W tej sekcji omawiana jest zawartość prac [A6, A7].

Zaczynamy od formalnej definicji kwantyfikowanych problemów spełnialności więzów parametryzowanych strukturą relacyjną $\mathbb{B}$. $\forall\exists\wedge$-formuła to prymitywna-pozytywna formuła, w której dodatkowo używamy kwantyfikatorów uniwersalnych.

Definicja 16 ***(QCSP)*** *Niech $\mathbb{B}$ będzie strukturą relacyjną.*

- ***WEJŚCIE:*** *$\forall\exists\wedge$-zdanie Ψ nad sygnaturą $\mathbb{B}$.*
- ***PYTANIE:*** *Czy Ψ jest prawdziwe w $\mathbb{B}$?*

Zauważmy, że istnieje redukcja w pamięci logarytmicznej z QCSP($\mathbb{A}$) do QCSP($\mathbb{B}$) zawsze gdy $\mathbb{A}$ ma $\forall\exists\wedge$-definicję w $\mathbb{B}$.

Podobnie jak CSP, również QCSP jest badany zarówno dla skończonych jak i nieskończonych szablonów. Spośród tych drugich szczególnym zainteresowaniem cieszą się temporalne kwantyfikowane problemy spełnialności więzów czyli problemy QCSP($\mathbb{B}$) dla reduktów pierwszego rzędu $\mathbb{B}$ struktury $(\mathbb{Q}; <)$. Mimo wielu częściowych klasyfikacji [BC10, ZM21, D1, D2, D3, A6, A7], pełna ich klasyfikacja nie została uzyskana. Jedna z ukończonych częściowych klasyfikacji dotyczy wspomnianych już wcześniej języków typu OH, które są dodatkowo dualnie-zamknięte (ang. dually-closed). W [A6, A7] pokazujemy, że każdy QCSP($\mathbb{B}$) dla dualnie-zamkniętego języka typu OH jest albo w P albo jest coNP-trudny. Szablon $\mathbb{B}$ jest dualnie-zamknięty jeśli dla każdej relacji R w $\mathbb{B}$ struktura ta zawiera również $-R$, którą uzyskujemy z R poprzez zamianę każdej krotki $t = (t[1], \ldots, t[n])$ na $-t = (-t[1], \ldots, -t[n])$ gdzie $-$ to 'minus', czyli unarna operacja zamieniająca q w $-q$.

Pierwszy krok na drodze do wspomnianej powyżej dychotomii został wykonany wspólnie z Hubie'm Chenem w [A6] gdzie pokazaliśmy, że każdy kwantyfikowany problem spełnialności więzów dla języka typu Guarded Ord-Horn jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym.

Definicja 17 *Mówimy, że język temporalny jest językiem typu GOH jeśli każda relacja w $\mathbb{B}$ jest definiowalna za pomocą formuły typu GOH, która jest w jednej z następujących postaci:*

1. *jest koniunkcją klauzul typu BOH (które zdefiniowaliśmy w sekcji 4.5) albo*
2. *jeśli ψ_1 oraz ψ_2 są formułami typu GOH, wtedy również $\psi_1 \wedge \psi_2$ jest formułą typu GOH, oraz*
3. *jeśli ψ jest formułą typu GOH, wtedy również*

$$\begin{array}{l}(x_1 \leq y_1) \wedge \ldots \wedge (x_m \leq y_m) \wedge \\ (x_1 \neq y_1 \vee \ldots \vee x_m \neq y_m \vee \psi)\end{array}$$

jest formułą typu GOH.

Tak jak wspomnieliśmy w sekcji 4.5, wszystkie języki typu BOH są zamknięte na pewną surjektywną oligopotentną operację typu near-unanimity. Z rezultatu w [BC07b] wynika, że problemy QCSP dla języków typu BOH są rozwiązywalne w czasie wielomianowym. W rzeczy samej. Dla każdego języka $\mathbb{B}$ typu BOH istnieje stała k taka, że instancja Ψ problemu QCSP($\mathbb{B}$) jest prawdziwa w $\mathbb{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy Duplikator ma strategię wygrywającą w grze z k-kamieniami na Ψ (ang. k-pebble game on Ψ). Algorytm dla kwantyfikowanych problemów spełnialności więzów nad językami temporalnymi typu BOH po prostu sprawdza czy istnieje strategia wygrywająca dla danego wejścia. Dla stałego k można to zrobić w czasie wielomianowym względem długości $\forall\exists\wedge$-zdania i powszechnie wiadomo, że jest to algorytm równoważny algorytmowi ustalania lokalnej zgodności [BD13]. Zwykłe gry z k-kamieniami nie są jednak wystarczająco silne by rozwiązać problem QCSP dla wszystkich języków typu GOH. Dlatego wprowadzamy nowe gry: gry z k-kamieniami umożliwiające ruchy wstecz (ang. pebble games with backmoves) dla których sprawdzanie istnienia strategii wygrywającej jest również w P. Algorytm dla problemów QCSP nad językami typu GOH wielokrotnie wywołuje algorytm sprawdzający istnienie strategii wygrywającej dla gier z ruchami wstecznymi dla pewnej podformuły wejściowego $\forall\exists\wedge$-zdania. Procedura jednocześnie upraszcza wejście. Jeśli proces stabilizuje się bez wywnioskowania pustego więzu wtedy wiemy, że Ψ jest prawdziwe w $\mathbb{B}$. W przeciwnym wypadku nasz algorytm zwraca informację o tym, że Ψ nie jest prawdziwe w $\mathbb{B}$.

W drugiej pracy z cyklu, w [A7], której jestem jedynym autorem, wyodrębniam kilka języków $\mathbb{B}$ dla których QCSP($\mathbb{B}$) jest coNP-trudny. Następnie pokazuję, że każdy dualnie-zamknięty język typu OH, który nie jest typu GOH $\forall\exists\wedge$-definiuje jeden z wyodrębnionych przeze mnie wcześniej języków. W konsekwencji otrzymuję następujący wynik.

Twierdzenie 18 *Niech $\mathbb{B}$ będzie dualnie-zamkniętym temporalnym językiem typu Ord-Horn. Wtedy albo $\mathbb{B}$ jest typu GOH i QCSP($\mathbb{B}$) jest w P, albo $\mathbb{B}$ nie jest typu GOH i wtedy QCSP($\mathbb{B}$) jest coNP-trudny.*

Dychotomia z twierdzenia powyżej została uogólniona do wszyskich dualnie-zamkniętych języków, niekoniecznie typu OH w [Wro21], gdzie dowodzę, że każdy dualnie-zamknięty język temporalny jest albo typu GOH i wtedy jego QCSP jest w P, w przeciwnym razie odpowiedni problem jest albo coNP-trudny, albo NP-trudny. Zauważmy, że każdy język równościowy (redukt pierwszego rzędu $(\mathbb{N};=)$) jest w szczególności dualnie-zamknięty i tym samym klasyfikacja z [Wro21] uogólnia orginalny rezultat Bodirsky'ego i Chena dotyczący QCSP dla języków równościowych [BC10].

4.8 Złożoność obliczeniowa abdukcji

W tej sekcji omawiana jest zawartość pracy [A8].

W [A8] prezentuję ogólny algorytmiczny wynik dla problemu $\text{OE-ABD}_\Delta(\mathbb{B}, \mathcal{M})$, który jest rozsądnym ograniczeniem problemu $\text{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$ zdefiniowanego powyżej. Przez Δ_{Orb} oznaczamy strukturę Δ nad tą samą dziedziną co $\mathbb{B}$, której relacjami są wszystkie orbity krotek względem $\text{Aut}(\Delta)$ o arności nie większej niż arnośći każdej relacji z Δ. W szczególności struktura $(\mathbb{Q};<)_{\text{Orb}}$ zawiera $\mathbb{Q}$, która jest jedyną obitą punktów względem $\text{Aut}(\mathbb{Q};<)$ jak również $<$, $>$ oraz $=$, które są jedynymi obitami par względem $\text{Aut}(\mathbb{Q};<)$. Definicję problemu $\text{OE-ABD}_\Delta(\mathbb{B}, \mathcal{M})$ jest następująca.

Definicja 19 *Niech Δ będzie strukturą zarówno jednorodną jak i ω-kategoryczną. Niech $\mathbb{B}, \mathcal{M}$ będą reduktami pierwszego rzędu strutury Δ. Definiujemy* $\text{OE-ABD}_\Delta(\mathbb{B}, \mathcal{M})$ *jako szczególny przypadek problemu* $\text{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$*, w którym każda instancja P jest piątką postaci (V, V_H, KB, Hyp, M), gdzie Hyp jest zbiorem więzów, który dla każdego l, i każdej l-krotki $\overline{s}$ zmiennych z V_H oraz każdej l-arnej relacji R w Δ_{Orb} zawiera więz postaci (s, R).*

W nazwie problemu skrót OE odnosi się do angielskiego 'orbit explanation'. W rzeczy samej. Wyjaśnienie dla instancji problemu $\text{OE-ABD}_\Delta(\mathbb{B}, \mathcal{M})$ jest koniunkcją więzów zbudowanych z relacji w Δ_{Orb} i zmiennych w V_H. Zatem ponieważ Δ jest jednorodna oraz ω-kategoryczna, i tym samym ma eliminację kwantyfikatorów, wyjaśnienie jest zawsze orbitą krotek względem $\text{Aut}(\Delta)$ o arności co najwyżej $|V_H|$. Teraz przedstawimy przykład ilustrujący powyższą definicję.

Przykład 20 *Niech Δ to będzie $(\mathbb{Q};<)$, $\mathbb{B}$ to struktura relacyjna z dwoma relacjami $R_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid (x \neq y \vee z > x)\}$ oraz $R_l = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid (x \neq y \vee z < x)\}$, a $\mathcal{M}$ to struktura tylko z dwiema relacjami: $<$ oraz $=$. Rozważmy instancję $P = (V, V_H, KB, Hyp, M)$ problemu* $\text{OE-ABD}_\Delta(\mathbb{B}, \mathcal{M})$ *gdzie:*

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
- $V_H = \{v_1, v_2, v_3\}$,
- $KB = \{((v_1, v_2, v_4), R_g), ((v_1, v_3, v_5), R_l)\}$,

- $Hyp = \{(v_1, \mathbb{Q}), (v_2, \mathbb{Q}), (v_3, \mathbb{Q}),$
  $((v_1, v_2), <), ((v_1, v_3), <), ((v_2, v_3), <),$
  $((v_1, v_2), >), ((v_1, v_3), >), ((v_2, v_3), >),$
  $((v_1, v_2), =), ((v_1, v_3), =), ((v_2, v_3), =)\},$
- $M = ((v_4, v_5), >).$

Zauważmy, że $H = \{((v_1, v_2), =), ((v_1, v_3), =)\}$ *jest wyjaśnieniem dla* P.

Algorytm zaprezentowany w [A8] działa dla OE-ABD$_\Delta(\mathbb{B}, \mathcal{M})$ zawsze gdy ekspansja struktury $\mathbb{B}$ przez relacje ze struktury $\overline{\mathcal{M}}$, która zawiera dopełnienia relacji z $\mathcal{M}$, ma ścisłą szerokość k. Takie struktury są w szczególności k-rozkładalne [BD13, BC07a] co oznacza m.in., że każdy $(k, k+1)$-minimalny zbiór więzow nad $\mathbb{B} \cup \overline{\mathcal{M}}$ może być jednoznacznie przedstawiony przez projekcje na podzbiory co najwyżej k zmiennych. Nasz algorytm oblicza więc $(k, k+1)$-minimalną wersje KB^1 bazy wiedzy KB oraz $(k, k+1)$-minimalną wersję $\mathrm{KB}^1_{\overline{M}}$ zbioru więzów $\mathrm{KB} \cup \overline{M}$, gdzie $\overline{M}$ jest dopełnieniem faktu M. Wtedy KB^1 jest zastępowany przez KB^2, który jest zbiorem wszystkich projekcji KB^1 na co najwyżej k zmienne. W ten sam sposób uzyskujemy $\mathrm{KB}^2_{\overline{M}}$ z $\mathrm{KB}^1_{\overline{M}}$. Następnie, algorytm sprawdza warunek zaproponowany w [Zan03], który tutaj nazywamy warunkiem Zanuttiniego. W rzeczy samej. Pytanie o to czy instancja P posiada wyjaśnienie jest równoważne pytaniu czy istnieje częściowe podstawienie $a_p : V_H \to D$, które może być rozszerzone do $a : V \to D$ w taki sposób, że a spełnia KB ale nie może być rozszerzone do $a' : V \to D$ tak by spełnić $\mathrm{KB} \cup \overline{M}$. Algorytm oblicza projekcję P_{KB} zbioru więzów KB^2 oraz projekcję $P_{\overline{M}}$ zbioru więzow $\mathrm{KB}^2_{\overline{M}}$ na V_H. Zauważmy teraz, że warunek Zanuttiniego jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $P_{\mathrm{KB}} \not\subseteq P_{\overline{M}}$. To może z kolei zostać sprawdzone w czasie wielomianowym korzystając z faktu, że P_{KB} oraz $P_{\overline{M}}$ są efektywnie reprezentowane przez swoje projekcje na zbiory co najwyżej k zmiennych. To kończy opis algorytmu.

5 Inne osiągnięcia naukowe

W tej sekcji omawiam swoje wyniki, które nie są częścią osiągnięcia habilitacyjnego.

5.1 Problem minimalnej inferencji

W pierwszej kolejności omówię wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemu minimalnej inferencji, które są przedstawione w dwóch następujących pracach.

Literatura

[B1] Michał Wrona. Minimal inference problem over finite domains: The landscape of complexity. In *Proceedings of the International Conference on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning (LPNMR)*, pages 101–113. Springer, 2017.

[B2] Michał Wrona. The complexity of minimal inference problem for conservative constraint languages. *ACM Trans. Comput. Log.*, 20(2):8:1–8:35, 2019. An extended abstract appeared in the Proceedings of Logic in Computer Science (LICS'17).

W zwykłym problemie inferencji logicznej mamy dane dwie formuły ϕ oraz ψ i pytamy czy każdy model ϕ jest również modelem ψ. Jeśli tak jest w istocie to mówimy, że ψ wynika z ϕ. W problemie minimalnej inferencji interesują nas tylko modele minimalne ze względu na pewien zadany porządek tzn. pytamy czy każdy minimalny model ϕ jest również modelem ψ. Modele minimalne mają charakteryzować te, które odpowiadają zdroworozsądkowym opisom świata. Tego rodzaju podejście do problemu wnioskowania zdroworozsądkowego (ang. commonsense reasoning) zostało zaproponowane przez jednego z ojców sztucznej inteligencji, Johna McCarthy'ego [McC80]. Ten formalizm zwany z języka angielskiego *circumsciption* jest jednym z najważniejszych w dziedzinie wnioskowania zdroworozsądkowego i niemonotonicznego (ang. nonmonotonic reasoning).

W celu porównywania modeli ustalamy pewien porządek na elementach dziedziny, którą przebiegają zmienne, np. ustalamy, że $0 \leq 1$, a następnie rozszerzamy ten porządek do preporządku ($\leq_{(P,Z,Q)}$) na modelach całej formuły w następujący sposób. Preporządek ($\leq_{(P,Z,Q)}$) zależy od partycji zmiennych V na trzy podzbiory P, Z, Q (być może puste) gdzie P to zmienne podlegające porównaniu, Q to zmienne zachowujące stałą wartość, a Z to zmienne których wartość nie wpływa na efekt porównania. (To zwykła praktyka, patrz [DHN12].) Dla dwóch podstawień $\alpha, \beta : V \to D$ piszemy ($\alpha \leq_{(P,Z,Q)} \beta$) jeśli $\alpha[Q] = \beta[Q]$ (α jest równe β na zmiennych w Q) oraz $\alpha[P] \leq \beta[P]$ (α jest mniejsze lub równe od β na zmiennych w P), gdzie $\leq$ jest rozszerzeniem $\leq$ na krotki elementów.

Złożoność obliczeniowa problemu minimalnej inferencji była badana przede wszystkim dla formuł rachunku zdań. W tym przypadku instancja problemu składa się z dwóch formuł rachunku zdań w koniunkcyjnej postaci normalnej (ang. conjunctive normal form, CNF): *bazy wiedzy* φ oraz *zapytania* ψ nad tym samym zbiorem zmiennych V podzielonym na podzbiory P, Z, Q, które tworzą partycję V. Ponieważ przede wszystkim interesuje nas to czy problem inferencji jest wielomianowy czy nie możemy założyć, że ψ jest dysjunkcją Boolowskich literałów (klauzulą). W rzeczy samej, wynikanie może zostać sprawdzone dla każdej z liniowo wielu kauzul niezależnie. Ten problem jest w ogólności Π_2^P-zupełny [EG93]. Dlatego też rozważa się problem $\text{GMININF}_B(\mathbb{B})$ parametryzowany srukturą relacyjną $\mathbb{B}$. W przypadku Boolowskim tj. gdy $\mathbb{B}$ jest nad dziedziną dwuelementową $\{0, 1\}$ ten problem był badany w serii prac, m.in. w [CL94, DH03, EG93, KK04], a pełna klasyfikacja została uzyskana w [DHN12]. W [NJ04] uzyskano pierwsze wyniki potwierdzające możliwość użycia podejśćia algebraicznego również w badaniu złożoności obliczeniowej problemu GMININF dla struktur relacyjnych nad dowolnie dużymi strukturami skończonymi. Niemniej pierwsze poważne klasyfikacje oraz ogólne rezultaty algorytmiczne dla dowolnie dużych dziedzin skończonych przedstawione zostały w moich pracach.

Problem GMININF parametryzowany zarówno przez strukturę relacyjną jak i porządek liniowy. W [B1] badam problem minimalnej inferencji parametryzowany zarówno przez strukturę relacyjną $\mathbb{B}$ jak i porządek liniowy $\leq^{\mathcal{O}}$ nad dziedziną B struktury $\mathbb{B}$. Formalna definicja problemu jest następująca.

GMININF$(\mathbb{B}, \leq^{\mathcal{O}})$

- **Instancja:** koniunkcja formuł atomowych φ nad sygnaturą $\mathbb{B}$ oraz zmiennymi V podzielonymi na P, Z, Q oraz dysjunkcja nierówności ψ postaci $(x_1 \neq d_1 \vee \cdots \vee x_k \neq d_k)$ nad zmiennymi z V oraz liniowy porządek $\mathcal{O} = (B; \leq^{\mathcal{O}})$.
- **Pytanie:** czy każdy $(\leq^{\mathcal{O}}_{(P,Z,Q)})$-minimalny model φ jest modelem ψ?

Ze względu na to, że również w przypadku tego problemu, podobnie jak dla CSP, możemy polegać na podejściu algebraicznym, w celu otrzymania pełnej klasyfikacji, wystarczy podać klasyfikację dla tzw. relacyjnych klonów tzn. szablonów zamkniętych na pp-definicje. Równoważnie, relacyjny klon to zbiór, oznaczany jako $\mathrm{Inv}(F)$, wszystkich relacji zamkniętych na wszystkie operacje w zbiorze operacji F.

Klony relacyjne nad dziedziną B są w naturalny sposób uporządkowane w kratę z relacją inkluzji. Im większy jest relacyjny klon tym złożoność odpowiedniego problemu jest większa. Elementem maksymalnym w tej kracie jest zbiór wszystkich relacji R_B nad dziedziną B. Jedynymi operacjami, które zachowują wszystkie relacje w R_B są projekcje. Elementem minimalnym jest zbiór wszystkich relacji pp-definiowalnych wyłącznie za pomocą równości. Te relacje są zamknięte na wszystkie operacje nad B.

Problem $\mathrm{GMININF}(R_B, \leq^{\mathcal{O}})$ jest Π_2^P-zupełny dla wszystkich $|B| \geq 2$. Aby znaleźć podproblemy o niższej złożoności schodzimy w dół kraty klonów relacyjnych. Języki, które z naturalnych powodów bada się jako pierwsze to tzw. *języki maksymalne* czyli te, które w kracie są zaraz poniżej R_B. Zgodnie z tw. Rosenberga [Ros86], wystarczy rozważyć języki postaci $\mathrm{Inv}(\{f\})$ gdzie f jest operacją unarną, semiprojekcją, idempotentną binarną operacją, operacją typu majority lub operacją afiniczną. Złożoność tych języków analizowano dla wielu podobnych problemów m.in. dla CSP [BKJ01, Bul04]. W [B1], pokazuję, że $\mathrm{GMININF}(\mathbb{B}, \leq^{\mathcal{O}})$ jest coNP-trudny dla wszystkich takich języków i że dla konserwatywnych języków maksymalnych problem jest albo Π_2^P-zupełny albo coNP-zupełny.

Nie ma zatem wielomianowych maksymalnych problemów $\mathrm{GMININF}(R_B, \leq^{\mathcal{O}})$ i należy ich szukać znacznie niżej w kracie klonów relacyjnych. W [B1] pokazuję dwie dychotomie pomiędzy problemami coNP-zupełnymi oraz tymi w P dla:

- $\mathrm{GMININF}(\mathrm{Inv}(\{\sqcap, \sqcup\}), \mathcal{O})$ gdzie $\sqcap, \sqcup$ to kres dolny oraz kres górny w pewnej kracie, oraz dla
- $\mathrm{GMININF}(\mathrm{Inv}(\{\sqcap, f\}), \mathcal{O})$ gdzie $\sqcap$ to kres dolny w pewnej półkracie a f to nowo zdefiniowana operacja typu *pms*.

Tym samym pokazuję nowe klasy wielomianowe i coNP-trudne. Moje algorytmy są oparte o polimorfizmy, a zatem, jak pokazuje praktyka, łatwiej je będzie dalej uogólniać.

Problem GMININF parametryzowany jedynie przez strukturę relacyjną. W [B2] rozważam problem GMININF($\mathbb{B}$) zdefiniowany podobnie do GMININF($\mathbb{B}, \leq^{\mathcal{O}}$), lecz z tą różnicą że porządek liniowy $\leq^{\mathcal{O}}$ nie jest parametrem, a częścią wejścia.

> **GMININF**($\mathbb{B}$)
>
> - **Wejście:** koniunkcja formuł atomowych φ nad sygnaturą struktury $\mathbb{B}$ oraz zmiennymi V podzielonymi na P, Z, Q, dysjunkcja ψ postaci $(x_1 \neq d_1 \vee \cdots \vee x_k \neq d_k)$ nad zmiennymi V, oraz porządek liniowy $\mathcal{O} = (D; \leq^{\mathcal{O}})$.
> - **Pytanie:** czy każdy $(\leq^{\mathcal{O}}_{(P,Z,Q)})$-minimalny model φ jest modelem ψ?

Praca zawiera klasyfikację złożoności obliczeniowej problemu GMININF($\mathbb{B}$) dla wszystkich konserwatywnych języków $\mathbb{B}$. By móc sformułować ten wynik potrzebujemy kilku definicji.

Relację $\{(a, c), (b, c), (a, d)\}$ nad rozważaną dziedziną B gdzie $a \neq b$ oraz $c \neq d$ oznaczamy przez $\overline{X}^{a,c}_{b,d}$ oraz mówimy, że jest *zła* jeśli $a \neq d$ lub $b \neq c$. Definujemy również ONE-IN-THREE$_{a,b} := \{(a, b, b), (b, a, b), (b, b, a)\}$ dla dowolnych $a, b \in B$.

Twierdzenie 21 ***(Trychotomia dla języków konserwatywnych)*** *Niech $\mathbb{B}$ będzie językiem konserwatywnym. Wtedy zachodzi jedno z poniższych*

- *Istnieją $a, b \in B$ takie, że ONE-IN-THREE$_{a,b}$ jest pp-definiowalny w $\mathbb{B}$, i w tym wypadku GMININF($\mathbb{B}$) jest Π^P_2-zupełny.*
- *Nie istnieją $a, b \in B$ takie, że ONE-IN-THREE$_{a,b}$ są pp-definiowalne w $\mathbb{B}$ ale $\mathbb{B}$ pp-definiuje złą relację typu $\overline{X}$, i w tym wypadku GMININF($\mathbb{B}$) jest coNP-zupełny.*
- *w przeciwnym razie GMININF($\mathbb{B}$) jest w P.*

Klasyfikacja CSP dla języków konserwatywnych [Bul11, Bar11] jest uważana za ważny krok w drodze do pełnej klasyfikacji. Wydaje się, że podobnie może być w przypadku problemu GMININF($\mathbb{B}$). Wyniki z omawianej pracy to nie tylko dychotomia, ale również nowy dowód coNP-trudności oraz nowy ogólny wielomianowy algorytm rozwiązujący minimalny problem inferencji dla szerokiej klasy języków.

5.2 Inne wyniki dotyczące temporalnych kwantyfikowanych problemów spełnialności więzów

W tej sekcji omawiam inne moje wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej kwantyfikowanych problemów spełnialności więzów. Zostały one opublikowane w następujących pracach.

Literatura

[D1] Witold Charatonik and Michał Wrona. Quantified positive temporal constraints. In *Proceedings of Computer Science Logic, CSL'08*, LNCS, pages 94–108. Springer, 2008.

[D2] Witold Charatonik and Michał Wrona. Tractable quantified constraint satisfaction problems over positive temporal templates. In *Proceedings of 15th International Conference on Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning, LPAR'08*, LNCS, pages 543–557. Springer, 2008.

[D3] Manuel Bodirsky, Hubie Chen, and Michał Wrona. Tractability of quantified temporal constraints to the max. *Int. J. Algebra Comput.*, 24(8):1141–1156, 2014.

Manuel Bodirsky oraz Hubie Chen udowodnili w [BC10], że każdy QCSP dla reduktu pierwszego rzędu $(\mathbb{N}; =)$ jest w LOGSPACE, jest NP-zupełny lub coNP-trudny. Mimo, iż ten wynik ukazał się w 2007 roku, dopiero ostatnio [ZM21] udowodniono, że każdy problem coNP-trudny jest również PSPACE-zupełny. Kolejnym krokiem na drodze do zrozumienia złożoności temporalnego QCSP jest klasyfikacja dla pozytywnych języków temporalnych przedstawiona w mojej rozprawie doktorskiej. Mówimy, że język temporalny jest pozytywny jeśli każdą z jego relacji można zdefiniować w logice pierwszego rzędu wyłącznie za pomocą kwantyfikatorów, koniunkcji, dysjunkcji oraz $\leq$. W artykułach [D1, D2] (które w znacznej mierze są częścią mojego doktoratu) udowodniono, że QCSP($\mathbb{B}$) dla pozytywnych języków temporalnych jest albo w LOGSPACE, jest NLOGSPACE-zupełny, P-zupełny, NP-zupełny, albo PSPACE-zupełny. Mimo, iż chciałoby się uzyskać podobną klasyfikację dla wszystkich języków temporalnych, wydaje się, że bardziej realistyczne jest osiągnięcie wcześniej celów pośrednich. W szczególnośći warto zrozumieć dla których wielomianowych temporalnych CSP($\mathbb{B}$), odpowiedni QCSP($\mathbb{B}$) również jest wielomianowy. Problem CSP($\mathbb{B}$) jest wielomianowy [BK09] jeśli $\mathbb{B}$ jest zamknięty na operację stałą lub jedną z ośmiu binarnych operacji: $\min, \max, \mathrm{mx}, \text{dual-mx}, \mathrm{mi}, \text{dual-mi}, \mathrm{ll}, \text{dual-ll}$. Mimo, iż temporalny CSP zamknięty na operację stałą jest trywialny, może być nawet PSPACE-zupełny [D1]. Złożoność problemu QCSP($\mathbb{B}$) dla języków $\mathbb{B}$ zamkniętych na mi lub dual-mi nie jest znana. Jeśli chodzi o ll oraz dual-ll znana jest tylko dychotomia dla dualnie-zamkniętych języków typu OH przedstawiona powyżej. W rzeczy samej. Każdy język typu OH jest zamknięty zarówno na ll jak i dual-ll. Tak jak pokazano w [D3], i o czym więcej w następnym paragrafie, temporalne QCSP zamknięte na min, max, mx lub dual-mx są w P.

Czasami okazuje się, że QCSP($\mathbb{B}$) można zredukować do wielomianowego CSP($\mathbb{B}$). Tego typu rezultaty znane są m.in. dla struktur skończonych zamkniętych na operacje typu near-unanimity [Che] lub typu Maltsev [BBC$^+$09]. W [D3] udowodniliśmy wraz z Manuelem Bodirskym i Hubie Chenem, że podobna redukcja zachodzi dla struktur temporalnych $\mathbb{B}$ zamkniętych na $\min, \max, \mathrm{mx}$ lub dual-mx. Ta praca zawiera również syntaktyczną charakteryzację wszystkich relacji zamkniętych na ww. operacje. W pracy pokazujemy jaka musi być postać formuł pierwszego rzędu definiujących relacje zamknięte na min, max, mx lub dual-mx.

5.3 Złożoność pewnych problemów pokrewnych problemom CSP dla języków równościowych

W tej sekcji omawiam wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemu abdukcji oraz problemu CSP z kwantyfikatorami zliczającymi. Obydwa problemy parametryzowane są językami równościowymi. Ponieważ każdy język równościowy jest reduktem pierwszego rzędu dowolnej struktury ω-kategorycznej, każda poważna klasyfikacja pociąga za sobą klasyfikację dla języków równościowych. Prezentowane wyniki pochodzą z dwóch następujących prac.

Literatura

[C1] Johannes Schmidt and Michał Wrona. The complexity of abduction for equality constraint languages. In *Computer Science Logic 2013 (CSL 2013), CSL 2013*, volume 23 of *LIPIcs*, pages 615–633. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2013.

[C2] Barnaby Martin, András Pongrácz, and Michał Wrona. The complexity of counting quantifiers on equality languages. *Theor. Comput. Sci.*, 670:56–67, 2017. An extended abstract appeared in the Proceedings of the Conference on Computability in Europe (CiE 2016).

5.3.1 Złożoność problemu abdukcji dla języków równościowych

Podobnie jak w przypadku CSP, również w procesie dowodzenia klasyfikacji dla problemu $\mathrm{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$ zdefiniowanego we wstępie możemy używać zarówno pp-definicji jak i polimorfizmów. Korzystając z tych narzędzi wraz z Johannesem Schmidtem uzyskaliśmy w [C1] klasyfikację dla problemów $\mathrm{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$ takich, że $\mathbb{B}$ jest dowolnym językiem równościowym, $\mathcal{HYP}$ oraz $\mathcal{M}$ to $(\mathbb{N}; =, \neq)$.

Twierdzenie 22 *Niech $\mathbb{B}$ będzie językiem równościowym (nad skończoną sygnaturą), $\mathcal{HYP}$ oraz $\mathcal{M}$ to $(\mathbb{N}; =, \neq)$. Wtedy zachodzi dokładnie jedno z poniższych.*

1. *Każda relacja w $\mathbb{B}$ jest negatywna tzn. może zostać zdefiniowana za pomocą koniunkcji, dysjunkcji nierówności postaci $(x_1 \neq y_1 \vee \cdots \vee x_k \neq y_k)$ i równości $(x = y)$. W tym wypadku problem $\mathrm{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$ is in P.*

2. *Każda relacja w $\mathbb{B}$ jest typu* Horn*, tzn. może zostać zdefiniowana jako koniumkcja klauzul postaci*
$$(x_1 \neq y_1 \vee \cdots \vee x_k \neq y_k \vee x \circ y),$$
gdzie $\circ \in \{=, \neq\}$ i zezwala się na to by $k = 0$, i co najmniej jedna relacja nie jest negatywna. W tym wypadku $\mathrm{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$ jest NP-zupełny.

3. *W innym razie $\mathrm{Abduction}(\mathbb{B}, \mathcal{HYP}, \mathcal{M})$ jest Σ_2^P-zupełny.*

5.3.2 CSP z kwantyfikatorami zliczającmi dla języków równościowych

Problem QCSP to uogólnienie problemu CSP, w którym dodatkowo pozwala się na używanie w wejściowej formule kwantyfikatorów uniwersalnych. Kolejnym krokiem może być rozważanie kwantyfikatorów zliczających. Tego typu problemy parametryzowane strukturami skończonymi rozważa się m.in. w [BH15, MMS15, MM18]. W [C2] po raz pierwszy rozważamy ten problem dla języków nieskończonych. Rozważamy kwantyfikator zliczający postaci $\exists^{\geq k}$, który wymusza by znajdująca się za nim formuła była spełniona przez co najmniej k elementów z dziedziny oraz kwantyfikator zliczający postaci $\forall^{>k}$, który wymusza by znajdująca się za nim formuła nie była spełniona dla co najwyżej k elementów w dziedzinie. Zauważmy, że $\exists^{\geq 1}$ to po prostu zwykły kwantyfikator egzystencjalny $\exists$ oraz że $\forall^{>0}$ to po prostu $\forall$. W [C2] otrzymujemy całą gamę klasyfikacji problemu X-CSP($\mathbb{B}$) gdzie $\mathbb{B}$ jest językiem równościowym a $\{\exists^{\geq 1}, \forall^{>0}\} \subseteq X$ zbiorem dostępnych kwantyfikatorów. Zakładamy więc, że zwykłe kwantyfikatory pierwszego rzędu są zawsze dostępne. W celu uzyskania ww. klasyfikacji używaliśmy przede wszystkim pp-definiowalności rozszerzonej ewentualnie o odpowiednie kwantyfikatory z X. Pokazujemy, że kwantyfikatory postaci $\exists^{\geq 2}, \exists^{\geq 3}, \ldots$ zachowują się mniej więcej tak samo. Podobnie rzecz się ma z kwantyfikatorami postaci $\forall^{>2}, \forall^{>3}, \ldots$. Okazuje się również, że $\forall^{>1}$ jest w pewnym sensie specjalny. Tak więc nasze zadanie polegające na przeprowadzeniu nieskończeniu wielu klasyfikacji problemów X-CSP($\mathbb{B}$) sprowadza się do co najwyżej ośmiu przypadków, ośmiu możliwych podzbiorów $\{\exists^{\geq 2}, \forall^{>1}, \forall^{>2}\}$. Ponieważ, jak się okazało w trakcie przeprowadzania dowodu, w dwóch przypadkach $\forall^{>1}$ jest subsumowany przez $\forall^{>2}$. Pokazaliśmy zatem sześć różnych klasyfikacji: trzy dychotomie oraz trzy trychotomie. Jedna z tych klasyfikacji to klasyfikacja dla równościowych QCSP. Te sześć twierdzeń to twierdzenia 1–6 w [C2].

5.4 Stratyfikowane Gramatyki Boolowskie

W tej sekcji omawiana jest zawartość następującej pracy.

Literatura

[E1] Michał Wrona. Stratified boolean grammars. In *Mathematical Foundations of Computer Science 2005, 30th International Symposium, MFCS 2005, Proceedings*, volume 3618 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 801–812. Springer, 2005.

Gramatyki Boolowskie (ang. Boolean grammars) badane po raz pierwszy przez Alexandra Okhotina w [Okh04] to dobrze znane gramatyki bezkontekstowe, w których regułach oprócz konkatenacji i alternatywy dozwolone są również operacje koniunkcji i negacji. Języki generowane przez gramatyki bezkontekstowe zadane są przez najmniejsze rozwiązania odpowiadających im układów równań skonstruowanych przy pomocy operatorów konkatenacji oraz sumy. Te podejście nie może być uogólnione w prosty sposób jeśli w regułach gramatyki występuje negacja, a w odpowiadających im równaniach dopełnienie, gdyż jest to operacja niemonotoniczna. Dlatego też semantykę dla gramatyki Boolowskiej, sposób określania jaki język jest generowany przez daną gramatykę Boolowską należy określać w inny sposób. W [Okh04] wprowadzono semantykę rozwiązania osiągalnego naturalnie (ang. semantics of a naturally reachable solution) oraz semantykę unikalnego rozwiązania w silnym sensie (ang. semantics of a unique solution in the strong sense). Niestety, dla każdej z tych semantyk, problem czy dana na wejściu gramatyka generuje język zgodny z tą semantyką jest nierozstrzygalny (co-RE-zupełny). W mojej pracy definiuję nową — semantykę stratyfikowaną (ang. stratified semantics) dla której rozważany problem decyzyjny może zostać rozwiązany w czasie liniowym w stosunku do rozmiaru gramatyki. Gramatyka jest zgodna z semantyką stratyfikowaną jeśli zbiór wszystkich nieterminali może być podzielony na liniowo uporządkowane warstwy w ten sposób, że w produkcji określającej nieterminal A może pojawić się zanegowany nieterminal B wtedy i tylko wtedy gdy warstwa w której występuje B jest we wspomnianym porządku poniżej warstwy zawierającej A. Tego rodzaju stratyfikacja jest częstym sposobem radzenia sobie z negacją m.in. w programowaniu logicznym. Badania nad semantykami dla gramatyk Boolowskich kontynuowane były m.in. w [KNR09].

5.5 Logiki wielowartościowe

W tej sekcji omawiana jest zawartość następującej pracy.

Literatura

[F1] Witold Charatonik and Michał Wrona. 2-sat problems in some multi-valued logics based on finite lattices. In *37th International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL 2007*, page 21. IEEE Computer Society, 2007.

Logiki wielowartościowe mają wiele zastosowań w informatyce i sztucznej inteligencji szczególnie wtedy, gdy zależy nam na zareprezentowaniu niepełnej, częściowej lub niepewnej wiedzy. Szczególnym zainteresowaniem w kontekście tych zastosowań cieszy się logika (zdaniowa) ze znakami (ang. signed logic), w której zmiennym przypisuje się wartości pochodzące z dowolnego skończonego uporządkowanego zbioru i w której można wyrazić wiele znanych wielowartościowych logik zdaniowych takich jak trójwartościowa logika Łukasiewicza lub czterowartościowa logika Belnapa. Problem 3-SAT jest NP-zupełny już dla zdaniowej logiki Boolowskiej, która jest szczególnym przypadkiem logiki ze znakami. Z drugiej strony problem 2-SAT, który jest wielomianowy dla klasycznej logiki dwuwartościowej, może, zależnie od dozwolonych znaków, być nawet NP-zupełny dla logiki ze znakami [BHM00]. Z tego względu pytanie o to w jakich szczególnych przypadkach problem 2-SAT dla logiki ze znakami jest w P, wydaje się ze wszech miar zasadny. W [F1] dowodzimy, że regularny 2-SAT ze znakami postaci $\uparrow i$ oraz $\downarrow i$, w przypadku gdy porządek na zbiorze wartości jest kratą, da się rozwiązać w czasie kwadratowym w stosunku do rozmiaru wejścia, a w przypadku gdy krata jest parametrem w czasie liniowym w stosunku do długości formuły. W tej pracy pokazujemy również, że problem 2-SAT w wielowartościowych logikach opartych o kraty DeMorgana jest rozstrzygalny w czasie liniowym w stosunku do długości formuły i w czasie kwadratowym w stosunku do rozmiaru danej algebry. Wszystkie nasze algorytmy nie tylko dają odpowiedź TAK/NIE, ale również znajdują wartościowanie spełniające zawsze wtedy kiedy istnieje.

6 Osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne

6.1 Dydaktyka na Uniwersytecie Wrocławskim, Politechnice Wrocławskiej i Uniwersytecie Jagiellońskim

- Kursy przygotowane w pełni przeze mnie:
  - Problemy spełnialności więzów (wykład, ćwiczenia) na Uniwersytecie Wrocławskim.
  - Teoria obliczalności i złożoności obliczeniowej (wykład, ćwiczenia) na Politechnice Wrocławskiej.
  - Sztuczna Inteligencja: Podejście Współczesne (wykład, ćwiczenia, laboratorium) na Uniwersytecie Jagiellońskim.
  - SAT Solvery (wykład, laboratorium) na Uniwersytecie Jagiellońskim.
  - Teoria Modeli Skończonych (wykład oraz ćwiczenia w języku angielskim) na Uniwersytecie Jagiellońskim.
  - Modele Obliczeń (wykład, ćwiczenia) na Uniwersytecie Jagiellońskim.
- Inne zajęcia dydaktyczne (Uniwersytet Wrocławski, Politechnika Wrocławska):
  - Wstęp do Informatyki (ćwiczenia, wykład).
  - Algebra (ćwiczenia).
  - Paradygmaty i zasady programowania (ćwiczenia, laboratorium).
  - Programowanie (wykład, ćwiczenia, laboratorium).
  - Kursy języków programowania: C, C++, Python, Prolog, Haskell, SML, Ada (laboratorium).
  - Logika dla Informatyków (ćwiczenia).
  - Sztuczna Inteligencja (laboratorium).

6.2 Praca promotorska na Uniwersytecie Jagiellońskim

6.2.1 Promowane prace magisterskie

- Maciej Woźniak: **Coffe SAT solver - modern SAT solver implementation**, 2018.

6.2.2 Promowane prace licencjackie

- Marcin Podhajski: **Temporal Constraint Satisfaction Problem Solver**, 2021.
- Wiktor Daniec: **Solving Kakuro Problems with Recurrent Relational Networks**, 2020.
- Magdalena Proszewska: **Interpreting convolutional neural networks with attribution and feature visualization methods**, 2020
- Jakub Dyczek: **Analysis of Deep Q-learning and Proximal Policy Optimization algorithms**, 2020.
- Olha Hnatiuk **Implementation of a Look-Ahead SAT-solver**, 2019
- Bartłomiej Drozd: **Efficiency of counting cards strategy in multi-deck blackjack game** , 2019.
- Kamil Jarosz: **Characterisation of Constraint Satisfaction Problems over edge affine clausal languages, solvable by Datalog**, 2018
- Jakub Zawadzki: **The implementation of modern SAT solver**, 2018.
- Kamil Kropiewnicki: **Value-based methods of deep reinforcement learning**, 2018.
- Piotr Kruk: **Stock market prediction with Recurrent Neural Networks**, 2017.
- Dawid Pyczek: **Convolutional neural networks for recognizing pictures from CIFAR 10 data set**, 2017.

6.3 Organizowanie konferencji

- Wspólnie ze współpracownikami z Instytutu Informatyki Analitycznej na Uniwersytecie Jagiellońskim zorganizowaliśmy *AAA 100 - Arbeitstagung Allgemeine Algebra*, która jest międzynarodową konferencją dla naukowców badających algebrę uniwersalną i jej zastosowania. Naszym celem było zorganizowanie spotkania na miejscu, w Krakowie. Niestety, ze względu na pandemię COVID-19, konferencja odbyła się online. Byłem członkiem zarówno komitetu organizacyjnego jak i programowego tego wydarzenia.

7 Uzyskane granty

- Jestem kierownikiem grantu OPUS na projekt 'Problemy spełnialności więzów dla nieskończonych struktur jednorodnych: w stronę algorytmów'.

Literatura

[All83] James F. Allen. Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, 1983.

[Bar11] Libor Barto. The dichotomy for conservative constraint satisfaction problems revisited. In *Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 301–310. IEEE Computer Society, 2011.

[Bar16] Libor Barto. The collapse of the bounded width hierarchy. *J. Log. Comput.*, 26(3):923–943, 2016.

[BBC$^+$09] Ferdinand Börner, Andrei A. Bulatov, Hubie Chen, Peter Jeavons, and Andrei A. Krokhin. The complexity of constraint satisfaction games and QCSP. *Information and Computation*, 207(9):923–944, 2009.

[BC07a] Manuel Bodirsky and Hubert Chen. Oligomorphic clones. *Algebra Universalis*, 57(1):109–125, 2007.

[BC07b] Manuel Bodirsky and Hubert Chen. Qualitative temporal and spatial reasoning revisited. In *Proceedings of CSL*, pages 194–207, 2007.

[BC10] Manuel Bodirsky and Hubie Chen. Quantified equality constraints. *SIAM Journal on Computing*, 39(8):3682–3699, 2010. A preliminary version of the paper appeared in the proceedings of LICS'07.

[BD13] Manuel Bodirsky and Víctor Dalmau. Datalog and constraint satisfaction with infinite templates. *J. Comput. Syst. Sci.*, 79(1):79–100, 2013.

[BH15] Andrei A. Bulatov and Amir Hedayaty. Galois correspondence for counting quantifiers. *J. Multiple Valued Log. Soft Comput.*, 24(5-6):405–424, 2015.

[BHM00] Bernhard Beckert, Reiner Hähnle, and Felip Manyà. The 2-sat problem of regular signed CNF formulas. In *30th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic, ISMVL 2000, Portland, Oregon, USA, May 23-25, 2000, Proceedings*, pages 331–336, 2000.

[BIL96] Christian Bessière, Amar Isli, and Gerard Ligozat. Global consistency in interval algebra networks: Tractable subclasses. In *12th European Conference on Artificial Intelligence, Budapest, Hungary, August 11-16, 1996, Proceedings*, pages 3–7, 1996.

[BJ17] Manuel Bodirsky and Peter Jonsson. A model-theoretic view on qualitative constraint reasoning. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 58:339–385, 2017.

[BK08] Manuel Bodirsky and Jan Kára. The complexity of temporal constraint satisfaction problems. pages 29–38. ACM, May 2008.

[BK09] Manuel Bodirsky and Jan Kára. The complexity of temporal constraint satisfaction problems. *Journal of the ACM*, 57(2):1–41, 2009. An extended abstract appeared in the Proceedings of the Symposium on Theory of Computing (STOC'08).

[BK14] Libor Barto and Marcin Kozik. Constraint satisfaction problems solvable by local consistency methods. *J. ACM*, 61(1):3:1–3:19, 2014. An extended abstract appeared in the Proceedings of the Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'09).

[BKJ01] Andrei A. Bulatov, Andrei A. Krokhin, and Peter Jeavons. The complexity of maximal constraint languages. In *Proceedings of the Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 667–674, 2001.

[BKJ05] Andrei A. Bulatov, Andrei A. Krokhin, and Peter G. Jeavons. Classifying the complexity of constraints using finite algebras. *SIAM Journal on Computing*, 34:720–742, 2005. A preliminary version of the paper appeared in the proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (ICALP'00).

[BM18] Manuel Bodirsky and Antoine Mottet. A dichotomy for first-order reducts of unary structures. *Logical Methods in Computer Science*, 14(2), 2018. A preliminary version of the paper appeared in the proceedings of LICS'16.

[BMM18] Manuel Bodirsky, Florent R. Madelaine, and Antoine Mottet. A universal-algebraic proof of the complexity dichotomy for monotone monadic SNP. In *Proceedings of the 33rd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2018, Oxford, UK, July 09-12, 2018*, pages 105–114, 2018.

[BMPP19] Manuel Bodirsky, Barnaby Martin, Michael Pinsker, and András Pongrácz. Constraint satisfaction problems for reducts of homogeneous graphs. *SIAM J. Comput.*, 48(4):1224–1264, 2019.

[Bod21] Manuel Bodirsky. *Complexity of Infinite-Domain Constraint Satisfaction*. Lecture Notes in Logic. Cambridge University Press, 2021.

[BP15] Manuel Bodirsky and Michael Pinsker. Schaefer's theorem for graphs. *J. ACM*, 62(3):19:1–19:52, 2015. An extended abstract appeared in the Proceedings of the Symposium on Theory of Computing (STOC'11).

[BP16] Libor Barto and Michael Pinsker. The algebraic dichotomy conjecture for infinite domain constraint satisfaction problems. In *Proceedings of the 31st Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, (LICS)*, pages 615–622, 2016.

[BPP14] Manuel Bodirsky, Michael Pinsker, and András Pongrácz. Projective clone homomorphisms. *CoRR*, abs/1409.4601, 2014.

[BPR20] Manuel Bodirsky, Wied Pakusa, and Jakub Rydval. Temporal constraint satisfaction problems in fixed-point logic. In *LICS '20: 35th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, Saarbrücken, Germany, July 8-11, 2020*, pages 237–251, 2020.

[Bul04] Andrei A. Bulatov. A graph of a relational structure and constraint satisfaction problems. In *Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, Turku, Finland, 2004.

[Bul11] Andrei A. Bulatov. Complexity of conservative constraint satisfaction problems. *ACM Trans. Comput. Log.*, 12(4):24, 2011. An extended abstract appeared in the Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS'03).

[Bul17] Andrei A. Bulatov. A dichotomy theorem for nonuniform csps. In *Proceedings of the Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 319–330. IEEE Computer Society, 2017.

[Che] Hubie Chen. The computational complexity of quantified constraint satisfaction. Ph.D. thesis, Cornell University, August 2004.

[CL94] Marco Cadoli and Maurizio Lenzerini. The complexity of propositional closed world reasoning and circumscription. *J. Comput. Syst. Sci.*, 48(2):255–310, 1994.

[CZ06] Nadia Creignou and Bruno Zanuttini. A complete classification of the complexity of propositional abduction. *SIAM J. Comput.*, 36(1):207–229, 2006.

[Dec92] Rina Dechter. From local to global consistency. *Artificial Intelligence*, 55(1):87–108, 1992.

[DH03] Arnaud Durand and Miki Hermann. The inference problem for propositional circumscription of affine formulas is coNP-complete. In *Proceedings of the Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, pages 451–462. Springer, 2003.

[DHN12] Arnaud Durand, Miki Hermann, and Gustav Nordh. Trichotomies in the complexity of minimal inference. *Theory Comput. Syst.*, 50(3):446–491, 2012. A preliminary version of the paper appeared in the Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS'09).

[EG93] Thomas Eiter and Georg Gottlob. Propositional circumscription and extended closed-world reasoning are IIp2-Complete. *Theor. Comput. Sci.*, 114(2):231–245, 1993.

[EG95] Thomas Eiter and Georg Gottlob. The complexity of logic-based abduction. *J. ACM*, 42(1):3–42, 1995.

[Fre82] E.C. Freuder. A sufficient condition for backtrack-free search. *Journal of the ACM*, 29(1):24–32, 1982.

[FV99] Tomás Feder and Moshe Y. Vardi. The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: a study through Datalog and group theory. *SIAM Journal on Computing*, 28:57–104, 1999. A preliminary version appeared in the proceedings of the Symposium on Theory of Computing (STOC'93).

[IMM+10] Pawel M. Idziak, Petar Markovic, Ralph McKenzie, Matthew Valeriote, and Ross Willard. Tractability and learnability arising from algebras with few subpowers. *SIAM J. Comput.*, 39(7):3023–3037, 2010. A preliminary version of the paper appeared in the proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS'07).

[JCG97] Peter Jeavons, David Cohen, and Marc Gyssens. Closure properties of constraints. *Journal of the ACM*, 44(4):527–548, 1997.

[KK04] Lefteris M. Kirousis and Phokion G. Kolaitis. A dichotomy in the complexity of propositional circumscription. *Theory Comput. Syst.*, 37(6):695–715, 2004. A preliminary version of the paper appeared in the proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS'01).

[KNR09] Vassilis Kountouriotis, Christos Nomikos, and Panos Rondogiannis. Well-founded semantics for boolean grammars. *Inf. Comput.*, 207(9):945–967, 2009.

[Kou97] Manolis Koubarakis. From local to global consistency in temporal constraint networks. *Theoretical Computer Science*, 173(1):89–112, 1997.

[Kre11] Stephan Kreutzer. Algorithmic meta-theorems. In *Finite and Algorithmic Model Theory*, pages 177–270. 2011.

[KZ17] Andrei A. Krokhin and Stanislav Zivný, editors. *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, volume 7 of *Dagstuhl Follow-Ups*. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2017.

[Lad75] Richard E. Ladner. On the structure of polynomial time reducibility. *Journal of the ACM*, 22(1):155–171, 1975.

[LW80] A. H. Lachlan and Robert E. Woodrow. Countable ultrahomogeneous undirected graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 262:51–94, 1980.

[LZ07] B. Larose and L. Zádori. Bounded width problems and algebras. *Algebra Universalis*, 56(3-4):439–466, 2007.

[Mar17] Barnaby Martin. Quantified constraints in twenty seventeen. In *The Constraint Satisfaction Problem: Complexity and Approximability*, pages 327–346. 2017.

[McC80] John McCarthy. Circumscription - A form of non-monotonic reasoning. *Artif. Intell.*, 13(1-2):27–39, 1980.

[MM18] Florent R. Madelaine and Barnaby Martin. Consistency for counting quantifiers. In *43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS 2018, August 27-31, 2018, Liverpool, UK*, pages 11:1–11:13, 2018.

[MMS15] Barnaby Martin, Florent R. Madelaine, and Juraj Stacho. Constraint satisfaction with counting quantifiers. *SIAM J. Discret. Math.*, 29(2):1065–1113, 2015.

[MP20] Antoine Mottet and Michael Pinsker. Smooth approximations and csps over finitely bounded homogeneous structures. *CoRR*, abs/2011.03978, 2020.

[NB95] Bernhard Nebel and Hans-Jürgen Bürckert. Reasoning about temporal relations: A maximal tractable subclass of Allen's interval algebra. *Journal of the ACM*, 42(1):43–66, 1995.

[NJ04] Gustav Nordh and Peter Jonsson. An algebraic approach to the complexity of propositional circumscription. In *Proceedings of the Symposium on Logic in Computer Science (LICS)*, pages 367–376. IEEE Computer Society, 2004.

[NZ08] Gustav Nordh and Bruno Zanuttini. What makes propositional abduction tractable. *Artif. Intell.*, 172(10):1245–1284, 2008.

[Okh04] Alexander Okhotin. Boolean grammars. *Inf. Comput.*, 194(1):19–48, 2004.

[RCC92] David A. Randell, Zhan Cui, and Anthony G. Cohn. A spatial logic based on regions and connection. In *KR*, pages 165–176, 1992.

[Ren12] Jochen Renz. Implicit constraints for qualitative spatial and temporal reasoning. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the Thirteenth International Conference, KR'12*, 2012.

[Ros86] Ivo G. Rosenberg. Minimal clones I: the five types. *Lectures in Universal Algebra (Proc. Conf. Szeged, 1983), Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 43:405–427, 1986.

[Sig10] Mark H. Siggers. A strong Mal'cev condition for varieties omitting the unary type. *Algebra Universalis*, 64(1):15–20, 2010.

[VKvB89] Marc Vilain, Henry Kautz, and Peter van Beek. Constraint propagation algorithms for temporal reasoning: A revised report. *Reading in Qualitative Reasoning about Physical Systems*, pages 373–381, 1989.

[Wro21] Michał Wrona. Tractability frontier for dually-closed temporal quantified constraint satisfaction problems. *CoRR*, abs/2109.02721, 2021.

[Zan03] Bruno Zanuttini. New polynomial classes for logic-based abduction. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 19:1–10, 2003.

[Zhu20] Dmitriy Zhuk. A proof of the CSP dichotomy conjecture. *J. ACM*, 67(5):30:1–30:78, 2020.

[ZM21] Dmitriy Zhuk and Barnaby Martin. The complete classification for quantified equality constraints. *CoRR*, abs/2104.00406, 2021.