prof. dr hab. Łukasz Kowalik
Instytut Informatyki,
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 29.09.2023

Ocena osiągnięć dr. Andrzeja Grzesika ubiegającego się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

1 Wstęp

W ramach swojego dorobku naukowego dr Andrzej Grzesik wyróżnił poniższy cykl publikacji jako osiągnięcie naukowe p.t. „Ekstremalne problemy teorii grafów dotyczące zliczania podgrafów" (w dalszej części recenzji nazywane krótko osiągnięciem):

[A1] Andrzej Grzesik, Daniel Král', László Miklós Lovász, Elusive extremal graphs, Proceedings of the London Mathematical Society 121 (2020), 1685–1736.

[A2] Andrzej Grzesik, On the maximum number of five-cycles in a triangle-free graph, Journal of Combinatorial Theory, Series B 102 (2012), 1061–1066.

[A3] Andrzej Grzesik, Bartłomiej Kielak, On the maximum number of odd cycles in graphs without smaller odd cycles, Journal of Graph Theory 99(2) (2022), 240–246.

[A4] Andrzej Grzesik, Oliver Janzer, Zoltán Lóránt Nagy, The Turán number of blow-ups of trees, Journal of Combinatorial Theory, Series B 156 (2022), 299–309.

[A5] Andrzej Grzesik, Ping Hu, Jan Volec, Minimum number of edges that occur in odd cycles, Journal of Combinatorial Theory, Series B 137 (2019), 65–103.

[A6] Andrzej Grzesik, Jan Volec, Degree conditions forcing directed cycles, International Mathematical Research Notices rnac114 (2022), 1–43.

[A7] Timothy F.N. Chan, Andrzej Grzesik, Daniel Král', Jonathan A. Noel, Cycles of length three and four in tournaments, Journal of Combinatorial Theory, Series A 175 (2020), 105276.

[A8] Andrzej Grzesik, Daniel Král', László Miklós Lovász, Jan Volec, Cycles of a given length in tournaments, Journal of Combinatorial Theory, Series B 158 (2023), 117–145.

Ponadto, dr Grzesik jest autorem 22 innych prac naukowych. W dalszej części recenzji odniosę się osobno do osiągnięcia (obszerniej) i pozostałego dorobku (krócej).

2 Ocena cyklu publikacji p.t. „Ekstremalne problemy teorii grafów dotyczące zliczania podgrafów”

Przedstawiony cykl publikacji dotyczy teorii grafów ekstremalnych, obszaru badań w ramach teorii grafów zajmującego się znajdowaniem górnych lub dolnych ograniczeń na liczbę wystąpień różnego rodzaju struktur w grafach, z reguły jako funkcji liczby wierzchołków (n), często ograniczając się do pewnej klasy podgrafów, np. zadanej przez zabronione struktury. Cechą charakterystyczną tego fragmentu teorii grafów jest to, że w dowodach stosuje się narzędzia wykraczające poza kombinatorykę.

2.1 Komentarz do poszczególnych prac wchodzących w skład cyklu

Cykl otwiera praca [A1]. Obala ona hipotezę Lovásza z 2008 roku dotyczącą struktury grafów ekstremalnych, tzn. (rodzin, ciągów) grafów osiągających (w granicy) ekstremalną (minimalną, maksymalną) liczbę wystąpień danego podgrafu. Z reguły zamiast liczby wystąpień mówi się o gęstości, tj. liczbie wystąpień podzielonej przez liczbę wszystkich podgrafów odpowiedniej wielkości; ponadto rozważa się gestość niekoniecznie jednego, ale kilku grafów $H_1, \ldots, H_k$. Lovász podejrzewał, że można wymusić unikalność ciągów grafów o zadanych granicznych gęstościach podgrafów $H_1, \ldots, H_k$ przez określenie dodatkowo gęstości skończonej liczby (innych) podgrafów. Autorzy pokazują kontrprzykład, przez skonstruowanie ciągu $H_1, \ldots, H_k$, ich gęstości $d_1, \ldots, d_k$ i pewnej rodziny $\mathcal{W}$ *grafonów*, tj. symetrycznych mierzalnych funkcji $W : [0,1]^2 \to [0,1]$ które reprezentują zbieżne ciągi grafów, o tej własności, że dowolny grafon który realizuje zadane gęstości podgrafów $H_1, \ldots, H_k$ i przy okazji również pewne gęstości innych podgrafów $H'_1, \ldots, H'_r$ jest izomorficzny do pewnego grafonu $W \in \mathcal{W}$, a ponadto rodzina $\mathcal{W}$ zawiera nieskończenie wiele grafonów o tych samych gęstościach $H'_1, \ldots, H'_r$. Uzyskany wynik wydaje się nieco hermetyczny, jest jednak imponującym osiągnięciem pod względem technicznym, a rozwinięte na potrzeby dowodu techniki z dużym prawdopodobieństwem będą inspiracją dla kolejnych badaczy posługujących się grafonami.

Praca [A2] jest głównym wynikiem rozprawy doktorskiej habilitanta. Zawiera ona piękny wynik: dowód hipotezy pięciokątnej Erdősa z 1984 roku, mówiącej że dowolny graf n-wierzchołkowy bez trójkątów (cykli C_3) zawiera co najwyżej $(n/5)^5$ cykli C_5. W tym celu autor zastosował mało jeszcze wówczas (w czasie pisania [A2]) znane podejście algebr flagowych, wprowadzone przez Razborova. Niezależnie, Hatami i inni (praca [59] w autoreferacie) uzyskali taki sam wynik również używając teorii algebr flagowych. Jednakże dowód Andrzeja Grzesika jest strukturalnie prostszy i bardziej elegancki, gdyż używa mniejszej liczby narzędzi: wprowadza pojęcia typu i flagi, a następnie stosuje lemat udowodniony m.in. przez Razborova (Lemma 1), który pozwala na uzyskiwanie górnych ograniczeń na gęstość za pomocą rozwiązania programu półokreślonego. Dzięki temu czytelnik nie musi nawet znać formalizmu algebr flagowych aby w pełni zrozumieć artykuł. Czytając ten dowód wydaje się, że znając podejście Razborova wystarczyło dobrać odpowiednio parametry lematu 1, znaleźć współczynniki odpowiedniego programu dodatnio półokreślonego (co sprowadza się do prostej kombinatoryki wykonanej ręcznie lub z pomocą programu komputerowego), a następnie rozwiązać (z pomocą komputera) ten program.

Jest to jednak częsta w matematyce sytuacja, w której gotowe rozwiązanie wydaje się naturalne i proste do znalezienia: istotnie, Hatami i inni obrali przecież dużo bardziej zawiłą drogę do tego samego celu.

Gdy hipoteza Erdősa została już w [A2] rozstrzygnięta, pojawia się naturalne pytanie, czy podobna własność zachodzi dla dłuższych cykli, można np. spytać czy dla dowolnego $k \geq 5$ graf n-wierzchołkowy bez cykli długości co najwyżej $k-2$ zawiera co najwyżej $(n/k)^k$ cykli C_k . W [A3] Andrzej Grzesik (wspólnie z magistrantem) odpowiada pozytywnie na to pytanie, choć jedynie dla nieparzystych k. Co ciekawe, tym razem zastosowanie podejścia Razborova nie było konieczne, wystarczył „klasyczny", argument probabilistyczny, w którym generujemy k-cykl w grafie w sposób losowy i szacujemy z dołu prawdopodobieńtwo, że ustalony k-cykl zostanie wylosowany. Jednakże, aby ten plan zadziałał, konieczne okazało się wykonanie bardzo nieoczywistej modyfikacji naturalnego algorytmu: losujemy wierzchołki cyklu po kolei, ale po 2-gim wybieramy 4-ty, następnie 3-ci, i dalej już „normalnie" 5-ty, 6-ty itp. W rezultacie autorzy otrzymali zwięzły i elegancki argument.

Praca [A4] dotyczy kolejnej hipotezy Erdősa, tym razem dotyczącej maksymalnej liczby krawędzi w grafach z zabronionym pewnym dwudzielnym grafem r-zdegenerowanym F: Erdős przypuszczał, że krawędzi tych nie może być więcej niż $O(n^{2-1/r})$. Znane są dowody nieco słabszych oszacowań oraz dowody właściwej hipotezy w szczególnych przypadkach, np. gdy F ma maksymalny stopień r z jednej strony (Füredi) lub $F = K_{s,s} \setminus K_{s-r,s-r}$ (Füredi i West). W [A4] pokazano, że hipoteza jest prawdziwa również gdy F jest dowolnym r-zdegenrowanym grafem dwudzielnym o tzw. złożoności co najwyżej 2 oraz gdy F jest (r,t)-rozdmuchaniem (blow-up) drzewa. Obie te klasy grafów wyglądają na nieco sztuczne, mają jednak tę zaletę że uogólniają równocześnie wspomniane wyniki Füredi'ego oraz Füredi'ego-Westa. Ponownie stosowany jest argument probabilistyczny: zakładamy, że nasz graf zawiera zbyt dużo krawędzi i dowodzimy, że pewna losowa procedura znajdująca podgraf z dodatnim prawdopodobieństwem znajdzie zabroniony podgraf F.

Praca [A5] bada postawioną w 1992 roku hipotezę Erdősa, Faudree i Rousseau, mówiącą, że dla dowolnego nieparzystego $k \geq 5$, dowolny n-wierzchołkowy graf o co najmniej $\lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ krawędziach nie tylko zawiera cykl C_k, ale ma co najmniej $\frac{2}{9}n^2 - O(n)$ krawędzi występujących w takich cyklach. W artykule [A5] autorzy uzyskali pełne zrozumienie wspomnianego problemu. Pokazali, że hipoteza jest nieprawdziwa dla $k = 2$, ale staje się prawdziwa gdy $\frac{2}{9}$ zastąpimy przez $\frac{2+\sqrt{2}}{16}$ (i tego ułamka nie da się już poprawić, co też zostało pokazane w [A5]). Natomiast dla $k \geq 3$ hipoteza została w [A5] udowodniona. Autorzy użyli metody algebr flagowych, podobnie jak w [A2]. Inaczej niż w [A2], tym razem nie wystarczyło jednak użyć gotowego lematu Razborova i potrzebne były znacznie bardziej zróżnicowane techniki dowodowe. Autorzy dowodzą (ponownie rozwiązując duży program dodatnio półokreślony) pewnej tożsamości w algebrze flagowej. Ta tożsamość prowadzi do poszukiwanej tezy w przypadku, gdy graf zawiera wiele trójkątów, natomiast w przeciwnym przypadku autorzy dowodzą, że graf jest bliski pełnemu grafowi dwudzielnemu.

Trzy ostatnie prace osiągnięcia dotyczą grafów skierowanych. W [A6] autorzy zajmują się hipotezą Kelly'ego i innych z 2010 roku, która podawała minimalną wartość półstopnia (minimum ze stopnia wchodzącego i wychodzącego) wymuszającą cykl zadanej długości ℓ. Autorzy

[A6] pokazują, że Kelly et al. mieli rację tylko dla $\ell = 3$, natomiast dla $\ell \geq 4$ graniczna wartość jest nieco większa niż podejrzewana. Również i w tym przypadku autorzy pokazują także grafy ekstremalne, wskazujące, że ich oszacowań nie można już poprawić. Dla odmiany, w warstwie technicznej praca [A6] posługuje się głównie technikami kombinatorycznymi, wspomagając się także znanymi lematami o regularności oraz kilkoma wynikami addytywnej teorii liczb.

Praca [A7] zajmuje się z kolei hipotezą Liniala-Morgensterna o tym, jak minimalna liczba skierowanych 4-cykli w turnieju zależy od liczby 3-cykli. Wcześniej zależność ta znana była jedynie dla dwóch konkretnych gęstości 3-cykli ($\frac{1}{16}$ i $\frac{1}{4}$), natomiast praca [A7] podaje odpowiedź dla dowolnej gęstości co najmniej $\frac{1}{36}$. W pracy tej autorzy sięgają po nowy zestaw narzędzi: analizę spektralną i metody optymalizacji (ciągłej). Zauważają mianowicie, że liczba 3-cykli i 4-cykli jest tożsama (odpowiednio, blisko związana) z liczbą homomorfizmów z C_3 i C_4, a te z kolei zależą w prosty sposób od śladu macierzy sąsiedztwa, który z kolei wyraża się przez wartości własne. Autorzy wykorzystują specyficzne własności macierzy sąsiedztwa turniejów, aby z pomocą algebry liniowej otrzymać wynik dla gęstości co najmniej $\frac{1}{16}$. Wskazanie grafów ekstremalnych okazuje się w tym przypadku trudniejsze niż zwykle. W tym celu autorzy wprowadzają nowe pojęcie turnamentonu[1], czyli odpowiednika grafonu dla turniejów oraz podają dokładną charakteryzację turniejonów wybijających pokazaną zależność między gęstościami cykli, co opisuje (dość skomplikowaną, w porównaniu z sytuacjami w innych pracach osiągnięcia) rodzinę turniejów ekstremalnych. Ciekawy jest również przypadek gęstości 3-cykli pomiędzy $\frac{1}{36}$ a $\frac{1}{16}$: aby zrozumieć strukturę odpowiednich wartości własnych, autorzy formułują pewien problem optymalizacyjny, po czym charakteryzują jego rozwiązania optymalne za pomocą mnożników Lagrange'a.

Użycie turnamentonów i analizy spektralnej przyniosło owoce także w ostatniej pracy cyklu, [A8], w której autorzy zajmują się maksymalną liczbą cykli zadanej długości ℓ w turniejach (a więc także dowolnych grafach skierowanych). Wcześniej znane były rozwiązania dla $\ell \leq 7$ oraz postawiono hipotezę określającą maksymalną liczbę ℓ-cykli osobno dla ℓ niepodzielnego przez 4 i podzielnego. Autorom [A8] udało się podać pełną odpowiedź w przypadku niepodzielnym i nowe górne oszacowanie w przypadku podzielnym.

2.2 Ocena całego cyklu

Podsumowując, Andrzej Grzesik w ramach swojego osiągnięcia uzyskał szereg znakomitych wyników w ramach teorii grafów ekstremalnych. Tym samym odpowiedział w ten sposób na szereg ważnych pytań i hipotez, postawionych często wiele lat wcześniej przez wybitnych matematyków (Erdős, Lovasz, Linial). Myślę, że wiele z tych wyników ma potencjał, żeby znaleźć się w przyszłych podręcznikach teorii grafów ekstremalnych. Imponująca, i niezwykle rzadka w postępowaniach habilitacyjnych, jest rozpiętość stosowanych w pracach osiągnięcia technik matematycznych: od kombinatorycznych, przez dyskretny i ciągły rachunek prawdopodobieństwa, algebrę liniową z analizą spektralną, analizę wraz z optymalizacją ciągłą, po addytywną teorię liczb. W pracach [A1]-[A8] autor rozwinął szereg podejść, metod dowodowych i nowych

[1] Tak tłumaczy na język polski słowo tournamenton autor w polskiej wersji autoreferatu, lepszym tłumaczeniem byłby chyba turniejon?

pojęć, z których będą czerpać kolejni badacze. Odzwierciedleniem jakości uzyskanych wyników są prestiżowe miejsca publikacji, wśród których warto wyróżnić *Journal of Combinatorial Theory, Series B* (najlepsze pismo w teorii grafów) oraz *Proceedings of the London Mathematical Society* (znane pismo ogólnomatematyczne o wielkich tradycjach).

3 Ocena pozostałego dorobku

Oprócz prac wchodzących w skład osiągnięcia, dr Grzesik ma w swoim dorobku jeszcze 22 artykuły. Wszystkie opublikowano w dobrej jakości międzynarodowych czasopismach lub sprawozdaniach z recenzowanych międzynarodowych konferencji.

Poniżej napiszę kilka słów o trzech z tych prac, możliwie różnorodnych tematycznie.

Praca [B6] uogólnia klasyczne ograniczenie na liczbę krawędzi w grafie planarnym do 3-krawędziowych ścieżek (odpowiedź dla ścieżek długości 2 była znana). Autorzy stosują metody kombinatoryczne.

W pracy [B8] autorzy podają pierwszy wielomianowy algorytm dla problemu zbioru niezależnego o maksymalnej wadze w grafach bez indukowanej ścieżki P_6. Jest to praca z pogranicza strukturalnej teorii grafów i algorytmiki. Problem zbioru niezależnego jest jednym z najważniejszych problemów NP-trudnych (w ogólności) i praca [B8] wpisuje się w szeroki nurt poszukiwania klas grafów, dla których istnieje algorytm wielomianowy. Praca została przyjęta na czołową światową konferencję algorytmiczną Symposium on Discrete Algorithms (SODA), co należy uznać za prestiżowe osiągnięcie.

Praca [B13] dotyczy algorytmów randomizowanych dla pewnego uogólnienia problemu wyboru sekretarki. Autorzy ustalili (co do rzędu) prawdopodobieństwo sukcesu optymalnego algorytmu.

Ogólnie, pozostały dorobek habilitanta nie wchodzący w skład osiągnięcia stoi na bardzo dobrym poziomie i pokazuje, że habilitant jest w stanie osiągać dobrej jakości wyniki nie tylko w dziedzinie grafów ekstremalnych, ale także w innych obszarach teorii grafów oraz informatyki teoretycznej.

Habilitant poza Uniwersytetem Jagiellońskim pracował także na Uniwersytecie Warszawskim oraz University of Warwick (i dzięki temu spełnia ustawowy warunek pracy w co najmniej dwóch instytucjach naukowych).

Habilitant regularnie aktywnie uczestniczy w konferencjach międzynarodowych (także zaproszone) oraz wygłasza wykłady seminaryjne w licznych uniwersytetach w Polsce i za granicą.

Andrzej Grzesik wydaje się być również znakomitym dydaktykiem. Potwierdzeniem tego przypuszczenia są wysokie oceny prowadzonych przez niego zajęć na UJ, zarówno przedmiotów kursowych (analiza mat., rachunek p-stwa) jak i specjalistycznych (teoria grafów, ekstemalna teoria grafów), a ponadto zaproszenia na zaawansowane mini-kursy dla doktorantów w innych ośrodkach (Warszawa, Brno, Lyon).

Na szczególne podkreślenie zasługuje działalność popularyzatorska i praca z uzdolnioną młodzieżą. Andrzej Grzesik jest jednym z filarów Olimpiady Matematycznej i innych podobnych inicjatyw, jak konkurs Naboj. Wygłosił niezliczone odczyty popularnonaukowe, jest także członkiem komitetu redakcyjnego Delty.

Dr Grzesik ma również sukcesy w zdobywaniu grantów (SONATA 2017-2020 i SONATA BIS 2022-2027). Wypromował 5 prac magisterskich, z których dwie były nagrodzone w ogólnopolskim Konkursie im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą pracę studencką z matematyki organizowanym przez PTM. Obecnie jest promotorem pomocniczym trzech doktorantów. Te fakty sugerują, że habilitant ma zadatki na dobrego promotora prac doktorskich.

4 Podsumowanie

Uważam, że prace wchodzące w skład osiągnięcia stanowią pomyślną realizację spójnego i przemyślanego programu badawczego. Podejmują naturalne pytania, stawiane i badane przez czołowych naukowców (w tym tak znanych jak Erdős, Lovasz czy Linial) i stosują zaawansowane narzędzia kombinatoryki, rachunku prawdopodobieństwa a także analizy i algebry. Uzyskane wyniki świadczą o wyróżniającym się warsztacie matematycznym autora. Część z nich może stać się klasykami w swojej dziedzinie. W mojej ocenie przedstawiony cykl prac z nawiązką spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe w postępowaniach habilitacyjnych. Pozostałe osiągnięcia naukowe są również na dobrym poziomie. Również osiągnięcia organizacyjne, dydaktyczne, popularyzatorskie i aktywność międzynarodowa z dużym nadmiarem spełniają wymagania w postępowaniach habilitacyjnych.

Podsumowując, po szczegółowym przeanalizowaniu przedłożonych materiałów stwierdzam, że dorobek dr. Andrzeja Grzesika stanowi znaczny wkład w dyscyplinę matematyka, w szczególności w teorię grafów ekstremalnych. Jestem przekonany, że dorobek ten **spełnia** z nawiązką zwyczajowe i ustawowe wymagania stawiane w postępowaniach habilitacyjnych. W związku z tym **popieram** wniosek dr. Andrzeja Grzesika o stopień naukowy doktora habilitowanego w dziedzinie nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka. Biorąc pod uwagę jakość osiągniętych wyników i prestiż czasopism w jakich je opublikowano, wnioskuję o **wyróżnienie** tej habilitacji.

Electronically signed by

Łukasz Kowalik; Uniwersytet Warszawski

30.09.2023

10:35:52 +02'00'