

22 listopada 2023

Recenzja dorobku naukowego w postępowaniu habilitacyjnym dr. Andrzeja Grzesika

Dr Andrzej Grzesik przedłożył do oceny osiągnięcia naukowe pod tytułem *Eks-tremalne problemy teorii grafów dotyczące zliczania podgrafów*:

- [A1] Andrzej Grzesik, Daniel Král', László Miklós Lovász, Elusive extremal graphs, *Proceedings of the London Mathematical Society* 121 (2020), 1685–1736.
- [A2] Andrzej Grzesik, On the maximum number of five-cycles in a triangle-free graph, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 102 (2012), 1061–1066.
- [A3] Andrzej Grzesik, Bartłomiej Kielak, On the maximum number of odd cycles in graphs without smaller odd cycles, *Journal of Graph Theory* 99(2) (2022), 240–246.
- [A4] Andrzej Grzesik, Oliver Janzer, Zoltán Lóránt Nagy, The Turán number of blow-ups of trees, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 156 (2022), 299–309.
- [A5] Andrzej Grzesik, Ping Hu, Jan Volec, Minimum number of edges that occur in odd cycles, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 137 (2019), 65–103.
- [A6] Andrzej Grzesik, Jan Volec, Degree conditions forcing directed cycles, *International Mathematical Research Notices* 114 (2022), 1–43.
- [A7] Timothy F.N. Chan, Andrzej Grzesik, Daniel Král', Jonathan A. Noel, Cycles of length three and four in tournaments, *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 175 (2020), 105276.
- [A8] Andrzej Grzesik, Daniel Král', László Miklós Lovász, Jan Volec, Cycles of a given length in tournaments, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 158 (2023), 117–145.

Recenzję rozpocznę od przytoczeniach danych dotyczących liczby publikacji i cytowań kandydata na podstawie bazy MathSciNet. Pierwsza publikacja dr. Grzesika ([A2] na powyższej liście) ukazała się w roku 2012. Od tego czasu dr Grzesik opublikował łącznie 32 artykuły naukowe z czego aż 23 w ostatnich pięciu latach. Zdecydowana większość artykułów ukazała się zarówno w najlepszych czasopismach naukowych z kombinatoryki (takich jak *Journal of Combinatorial Theory, Series A & B*, *Journal of Graph Theory*, *Combinatorics, Probability and Computing*) jak i w ogólnych periodykach matematycznych (po jednym artykule w *Proceedings of the London Mathematical Society* i *International Mathematics Research Notices*). Tak obszerny dorobek naukowy odbił się szerokim echem w środowisku kombinatorycznym. Liczba cytowań kandydata na dzień 20 listopada 2023 roku wynosi 192 cytowania w 176 artykułach, a indeks Hirscha to 6. Należy odnotować, że tylko 11 z tych artykułów zawierają autocytowania. W mojej ocenie przytoczone dane bibliometryczne są wystarczające, aby uznać dorobek dr. Grzesika za bardzo wartościowy i spełniający ustawowe i zwyczajowe wymagania do uzyskania stopnia doktora habilitowanego.

Przejdę teraz do krótkiej merytorycznej oceny osiągnięcia naukowego. Działalność naukowa dr. Grzesika dotyczy głównie ekstremalnej teorii grafów, a w szczególności tak zwanych problemów Turána. Punktem wyjścia tej tematyki jest zarówno twierdzenie Turána jak i jego uogólnienie — twierdzenie Erdősa-Stona o maksymalnej liczbie krawędzi w grafie niezawierającym ustalonego podgrafu. Zainteresowania badawcze dr. Grzesika skupiają się wokół zagadnień związanych z wyznaczaniem maksymalnych wartości parametru grafowego niezawierającego określonych podstruktur.

Kandydat bardzo skrupulatnie i rzetelnie opisał prace [A1-A8] wchodzące w skład dorobku naukowego. Ze względu na niespotykane bogactwo wyników uzyskanych na tak wczesnym etapie kariery naukowej skupię się tutaj tylko na dwóch bardzo ciekawych zagadnieniach.

Pierwsze z nich zawdzięcza swój początek hipotezie Erdősa, który wysunął przypuszczenie (znane w literaturze jako Hipoteza Pięciokątna), iż każdy graf na n wierzchołkach bez cyklu C_3 (tzn. trójkąta), może zawierać co najwyżej $(\frac{n}{5})^5$ cykli długości 5 (czyli pentagonów). Jeśli pamięć mnie nie zawodzi, to jeszcze w trakcie swojego doktoratu dr Grzesik rozwiązał tę hipotezę [A2]. (Hatami, Hladký, Král', Norine i Razborov niezależnie również udowodnili to przypuszczenie.) Na szczególną uwagę zasługuje bardzo nowatorskie w tamtym czasie podejście oparte na metodzie algebr flagowych wprowadzonych przez Razborova. Praca [A2] stała się niejako drogowskazem opisującym jak algebry flagowe razem z programowaniem półokreślonym mogą być wykorzystywane w problemach typu Turána i według bazy MathSciNet była cytowana 70 razy.

Hipoteza Pięciokątna jest szczególnym przypadkiem następującego problemu o wyznaczeniu maksymalnej liczby cykli C_k w dowolnym grafie niezawierającym cyklu C_{k-2} dla nieparzystej liczby k . Razem ze swoim doktorantem, Bartłomiejem Kieliakiem, dr Grzesik pokazał w [A3], że takowa liczba wynosi $(\frac{n}{k})^k + o(n^k)$ dla dowolnego i ustalonego $k \geq 7$. Główna część dowodu oparta jest na sprytnym probabilistycznym próbkowaniu cykli C_k . W końcówce rozumowania autorzy wykorzystują w standardowy sposób Lemat o Regularności wraz z Lematem o Usuwaniu. W pewnym sensie

szokujące jest to, że dość krótki dowód z [A3] nie używa ani algebr flagowych ani wspomaganie komputerowego, aczkolwiek wymaga założenia $k \geq 7$.

Warto odnotować, że problemy związane z wyznaczaniem maksymalnej liczby cykli C_k w grafach niezawierających C_ℓ były rozważane przez bardzo prominentnych matematyków w tym Alona, Bollobása czy Füredięgo.

Drugim zagadnieniem, a właściwie kierunkiem badań dr. Grzesika, jest rozwijanie i zastosowanie granic grafowych. Teoria granic grafowych zastała zapoczątkowana przez Borgsa, Chayesa, Lovásza, Sós, Szegedyego i Vesztergombi, którzy jako pierwsi zdefiniowali zbieżne ciągi grafowe i następnie badali ich granicę. Z biegiem lat okazało się, że to nowatorskie podejście ma bardzo dużo zastosowań w ekstremalnej teorii grafów. Notabene metoda algebr flagowych może być również spostrzegana jako metoda oparta na granicach grafowych.

Jedną z bardziej znanych hipotez w teorii granic grafowych było przypuszczenie Lovásza zakładające, że wszystkie ekstremalne problemy teorii grafów dotyczące liczenia podgrafów mają optimum wymuszone przez gęstości skończenie wielu podgrafów. W [A1], razem z Danielem Králem i László Miklósem Lovászem, dr Grzesik obalił tę hipotezę. Dowód jest relatywnie długi i skomplikowany, a artykuł został opublikowany w prestiżowym periodyku *Proceedings of the London Mathematical Society*. Prawdę powiedziawszy autorzy udowodnili bardziej ogólne twierdzenie, które w prosty sposób implikuje fałszywość hipotezy Lovásza. Twierdzenie to jednak jest zbyt techniczne i jego precyzyjne zacytowanie wymagałoby zdefiniowania wielu pojęć.

W mojej ocenie wszystkie prace kandydata rozwiązują ważne problemy kombinatoryczne. W niektórych przypadkach, nie wahałbym się nawet powiedzieć, że dr Grzesik zajmuje się (i często z sukcesem) rozwiązuje fundamentalne problemy z ekstremalnej teorii grafów wykorzystując do tego celu szeroki wachlarz metod i narzędzi. Bogactwo technik kombinatorycznych jest świadectwem jego erudycji jak i dojrzałości naukowej.

Pozostała działalność naukowa dr. Grzesika również zasługuje na bardzo pozytywną ocenę. Po ukończeniu doktoratu kandydat odbył dziesiątki staży i wizyt naukowych w bardzo renomowanych ośrodkach takich jak chociażby: Alfréd Rényi Institute of Mathematics na Węgrzech, University of Cambridge w Wielkiej Brytanii czy Massachusetts Institute of Technology i Stanford University w Stanach Zjednoczonych. Dr Grzesik wykazuje bardzo dużą aktywność na arenie międzynarodowej i regularnie współpracuje z wieloma badaczami. Kilku z nich należy do czołówki światowej. Dr Grzesik posiada też spore doświadczenie w opiece nad studentami. Obecnie jest promotorem pomocniczym trzech doktorantów. Wypromował też pięciu magistrantów.

Kandydat nie zaniedbuje też działalności popularyzującej matematykę. Prężnie angażuje się w opiekę nad utalentowaną młodzieżą współorganizując wiele warsztatów, wykładów i konkursów matematycznych. Jest wiceprzewodniczącym Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej.

Tak bogata działalność kandydata zyskała duży oddźwięk w polskim środowisku matematycznym czego wyrazem są liczne nagrody. Wspomnę tylko, że dr Grzesik jest laureatem nagrody Open Mind Prize dla młodego polskiego naukowca za wy-

bitne dokonania w zakresie kombinatoryki jak i również Medalu Komisji Edukacji Narodowej za szczególne zasługi dla oświaty i wychowania.

Reasumując, nie mam najmniejszych wątpliwości, że dorobek naukowy dr. Grzesika **spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania do uzyskania stopnia doktora habilitowanego.**

Andrzej Dudek
Professor of Mathematics

