AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko: Bogdan Batko
2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:
   - doktor nauk matematycznych: Akademia Pedagogiczna w Krakowie, Instytut Matematyki, czerwiec 2000.
     Tytuł rozprawy: *Stabilność alternatywnych równań funkcyjnych.*
     Promotor: Prof. dr hab. Józef Tabor.
   - magister inżynier informatyki: Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Instytut Informatyki, czerwiec 1997.
   - magister matematyki: Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Krakowie, Instytut Matematyki, czerwiec 1996.
3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych (w porządku odwrotnym do chronologicznego):
   - 2020 – 2021; associate research professor, Rutgers University, USA, Department of Mathematics.
   - 2017 – teraz; adiunkt, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki.
   - 2015 – 2016; starszy wykładowca, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki.
   - 2014 – 2015; wicedyrektor do spraw studenckich, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Instytut Matematyki.
   - 2014 – 2015; starszy wykładowca, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Nowym Sączu, Instytut Techniczny.
   - 2004 – 2014; adiunkt, Wyższa Szkoła Biznesu - National Louis University w Nowym Sączu, Wydział Informatyki.
   - 2004 – 2007; prodziekan, Wyższa Szkoła Biznesu - National Louis University w Nowym Sączu, Wydział Informatyki.
   - 2003 – 2015; adiunkt, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Instytut Matematyki.
   - 2000 – 2004; adiunkt, Wyższa Szkoła Biznesu - National Louis University w Nowym Sączu, Wydział Zarządzania.
   - 1996 – 2003; asystent, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie, Instytut Matematyki.
   - 1996 – 2000; asystent, Wyższa Szkoła Biznesu - National Louis University w Nowym Sączu, Wydział Zarządzania.
4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r.

   a) Tytuł

   TEORIA INDEKSU CONLEYA DLA WIELOWARTOŚCIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH Z CZASEM DYSKRETNYM

   b) Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1 pkt. 2b Ustawy:

   [H1] B. Batko, M. Mrozek. Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **15** (2016), 1143–1162. DOI: 10.1137/15M1046691

   [H2] B. Batko. Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems. Part II: properties of the Index, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **16** (2017), 1587–1617. DOI: 10.1137/16M1097584

   [H3] B. Batko, T. Kaczynski, M. Mrozek and Th. Wanner. Linking combinatorial and classical dynamics: Conley index and Morse decompositions. *Found. Comput. Math.* **20** (2020), 967–1012. DOI: 10.1007/s10208-020-09444-1.

   [H4] B. Batko, K. Mischaikow, M. Mrozek and M. Przybylski. Conley index approach to sampled dynamics. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **19** (2020), 665–704. DOI: 10.1137/19M1254404

   [H5] B. Batko. The Morse equation in the Conley index theory for discrete multivalued dynamical systems, *J. Dyn. Diff. Equat.* (2022). DOI: 10.1007s10884-022-10136-3

c) Opis osiągnięć

W sekcji 4.1 krótko omawiamy motywację oraz cele cyklu prac. Nieco szerszy opis, zawierający najważniejsze wyniki, przedstawiamy w sekcji 4.2.

4.1. Krótkie omówienie cyklu prac

4.1.1. **Wstęp.** Modele większości układów fizycznych oparte są na kontinuum - przyjmuje się, że wartości stanów układu mogą być rzeczywiste. Równocześnie nauka staje się coraz bardziej oparta na danych, a więc na skończonej ilości informacji. Sugeruje to potrzebę posiadania narzędzi, które efektywnie dostarczają informacji o strukturach ciągłych na podstawie skończonych danych i przyczynia się do gwałtownego wzrostu zastosowań metod topologicznej analizy danych (TDA). W tym kontekście również dynamika próbkowana przyciąga zainteresowanie naukowców.

Jednak, co nie jet zaskakujące, istnieją poważne wyzwania związane z rozumieniem dynamiki danych i jak dotąd stosunkowo niewiele osiągnięto w tym zakresie.

W cyklu prac zajmujemy się tym problemem w kontekście dynamiki nieliniowej. Budujemy teorię indeksu Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych i pokazujemy jej zastosowania w dynamice próbkowanej.

Dynamika topologiczna. Fundamentalnymi obiektami badań w układach dynamicznych są *trajektorie* i *zbiory niezmiennicze* - zbiory graniczne trajektorii, które nie uciekają do nieskończoności. Mogą one być proste, jak np. punkty stacjonarne, orbity okresowe, lub bardziej skomplikowane, jak zbiory fraktalne z dynamiką chaotyczną.

Indeks Conleya jest niezmiennikiem topologicznym definiowanym dla *zbioru niezmienniczego izolowanego* - maksymalnego zbioru niezmienniczego w pewnym jego otoczeniu. Stał się on ważnym narzędziem badania własności jakościowych układów dynamicznych. Pierwotna konstrukcja indeksu, należąca do Conleya i jego uczniów [20], dotyczy potoków w lokalnie zwartych przestrzeniach metrycznych; została uogólniona dla dowolnych przestrzeni metrycznych [89, 11] i układów dynamicznych z czasem dyskretnym [86, 67, 23].

Zbiór niezmienniczy izolowany można rozłożyć na skończoną sumę parami rozłącznych zbiorów niezmienniczych izolowanych, zwanych *zbiorami Morse'a*, i orbit łączących, tak że poza zbiorami Morse'a dynamika jest gradientowa. Nazywamy to *rozkładem Morse'a* . Każdy zbiór Morse'a ma indeks Conleya, dlatego można mówić o *grafie Morse'a-Conleya*, ze zbiorami Morse'a jako wierzchołkami i ich indeksami Conleya jako etykietami oraz strzałkami odpowiadającymi połączeniom heteroklinicznym między zbiorami Morse'a. Ponadto każdy zbiór Morse'a może mieć własny rozkład Morse'a.

Równanie Morse'a opisuje związki między indeksem Conleya izolowanego zbioru niezmienniczego a indeksami Conleya jego zbiorów Morse'a. W szczególności z równania można wyprowadzić klasyczne nierówności Morse'a oraz informację o (ko)homologicznie nietrywialnych połączeniach między zbiorami Morse'a.

Dynamika próbkowana. Rośnie zainteresowanie teoriami zdolnymi do ekstrahowania istotnych informacji ukrytych w zaszumionych danych eksperymentalnych. Dotyczy to również dynamiki.

Podejście klasyczne polega na numerycznym badaniu dynamiki równania różniczkowego skonstruowanego na podstawie próbki. Konstrukcja wykorzystuje dane do odkrycia naturalnych praw rządzących dynamiką pozwalających opisać je równaniami [91] lub bezpośrednio interpolować lub aproksymować nieznane pole wektorowe [14]. Ale można też wyeliminować równania różniczkowe i bezpośrednio badać dynamikę danych za pomocą odwzorowania wielowartościowego [61, 100, H4] lub kombinatorycznego układu dynamicznego [35, 34, 87, 54, 75]. Oba te podejścia różnią się zasadniczo od klasycznego. Z jednej strony układy dynamiczne określone równaniami różniczkowymi są szeroko stosowane i pozwalają badać mnogość zachowań dynamicznych, ale kosztem dość zaawansowanych technik matematycznych potrzebnych do ich precyzyjnego opisu. Z drugiej strony modelowanie za pomocą odwzorowania wielowartościowego, czy kompleksu symplicjalnego, znakomicie upraszcza badanie wielu zjawisk dzięki dostępności szybkich algorytmów kombinatorycznych.

Dominującym narzędziem używanym przez społeczność TDA do badania nieznanej przestrzeni topologicznej są homologie persystentne [30]. Jednak istnieją dwa istotne wyzwania związane z tym podejściem. Po pierwsze, obliczenia homologii persystentnych na dużych zbiorach danych mogą być zbyt drogie (trwają intensywne prace na ten temat [25, 80, 44]), a po drugie, teoria persystentna dla odwzorowań jest wciąż na wczesnym etapie badań [26, 31, 10].

Identyfikacja przestrzeni to tylko część wyzwania, jakim jest zrozumienie dynamiki; musimy również uchwycić zachowanie odwzorowania nieliniowego, które generuje dynamikę.

Nowego podejścia dostarcza niedawno opracowana teoria pól multiwektorowych [75, 52, H3], inspirowana pracą Formana [35]. Bezpośrednio z danych konstruuje się kompleks symplicjalny oraz kombinatoryczny układ dynamiczny w postaci iteracji kombinatorycznego odwzorowania wielowartościowego lub potoku wielowartościowego. Teoria pozwala na wprowadzenie pojęcia rozwiązania, w szczególności punktu stacjonarnego, rozwiązania okresowego, połączenia heteroklinicznego i homoklinicznego, a także zbiorów niezmienniczych, atraktorów i repelerów, rozkładów Morse'a i chaotycznych zbiorów niezmienniczych. Stanowi to podwaliny pod nową teorię Conleya dla skończonych przestrzeni topologicznych. Aby pokazać formalne związki między dynamiką kombinatoryczną i klasyczną, niezbędna jest teoria indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych [H3, 52].

Pomysł wykorzystania dynamiki topologicznej i odwzorowań wielowartościowych do badania dynamiki w danych eksperymentalnych sięga wstecz pracy [61]. W celu skonstruowania odwzorowania wielowartościowego grupujemy dane w koszyki. Zaletą jest to, że możemy a priori wybrać koszyki, aby obliczenia homologiczne były wykonalne, biorąc pod uwagę ograniczenia czasowe i pamięciowe. Ponadto, niejako tautologicznie, proces grupowania stanowi technikę redukcji danych. Obiecujące wyniki zawarte w [61] pokazują, że aby móc formułować ścisłe wnioski na temat badanego układu, niezbędna jest teoria indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych z czasem dyskretnym.

4.1.2. **Indeks Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych.**

4.1.2.1. *Konstrukcja indeksu. Wielowartościowy układ dynamiczny z czasem dyskretnym* zadany jest przez iteraty górnie-półciągłego wielowartościowego odwzorowania F przestrzeni topologicznej w siebie, o wartościach zwartych (por. paragraf 4.2.2). Wielowartościowe układy dynamiczne charakteryzują się niejednoznacznymi rozwiązaniami w przód. Zainteresowanie takimi układami zrodziło się w jakościowej analizie równań różniczkowych bez jednoznaczności rozwiązań i inkluzji różniczkowych [4]. Nieco zaskakująco dynamika wielowartościowa jest również ważna w badaniach dynamiki jednowartościowej w kontekście ścisłej analizy numerycznej równań różniczkowych i iterat odwzorowań. Taki sposób analizy zapoczątkowany został w [59] dla istnienia chaosu w układzie Lorenza i od tego czasu był stosowany w wielu konkretnych problemach. Teoria Conleya [20] oferuje niezmiennik topologiczny do badania układów dynamicznych. Jest wykorzystywana do dowodzenia istnienia rozwiązań stacjonarnych i okresowych, połączeń heteroklinicznych oraz chaotycznych zbiorów niezmienniczych. Potencjał teorii Conleya w kontekście danych został zauważony dzięki uogólnieniu dla układów wielowartościowych [50] zaproponowanemu jako narzędzie komputerowo wspieranych dowodów w dynamice. Dynamika wielowartościowa staje się w takim podejściu narzędziem badania klasycznej dynamiki (jednowartościowej) [62, 101, 78]. Niestety, choć podejście zaproponowane w [50] dowiodło, że teoria Conleya w dynamice odwzorowań wielowartościowych jest wykonalna, szybko okazało się, że definicja izolacji przyjęta w [50] jest zbyt restrykcyjna dla zastosowań. Przypomnijmy, że w przypadku klasycznej dynamiki jednowartościowej otoczenie izolujące jest zbiorem zwartym N takim, że jego maksymalny podzbiór niezmienniczy, oznaczony $\operatorname{Inv} N$, spełnia $\operatorname{Inv} N \subset \operatorname{int} N$. Definicja otoczenia izolującego N przyjęta w [50] dla przypadku dynamiki wielowartościowej jest znacznie mocniejsza. Wymaga ona, aby część niezmiennicza N była odseparowana od brzegu N o odległość większą niż średnica wartości F. W zastosowaniach uczynienie tej średnicy wystarczająco małą jest niewykonalne ze względu na ograniczenia istniejącej mocy obliczeniowej i dostępność danych. Ponadto na wczesnym etapie badań, które ostatecznie doprowadziły do [H3], wbrew pierwotnym nadziejom okazało się, że teoria opracowana w [50] jest zbyt słaba, aby zbudować formalne związki między teorią klasyczną a teorią kombinatoryczną. Wszystko to dało motywację do poszukiwania zupełnie nowej teorii, zorientowanej na zastosowania i doprowadziło do serii artykułów na ten temat, poczynając od [H1, H2]. W [H1] definicja otoczenia izolującego pokrywa się z definicją dla klasycznego przypadku jednowartościowego: zbiór zwarty N jest *otoczeniem izolującym* dla F, jeśli $\operatorname{Inv} N \subset \operatorname{int} N$. Takie podejście powoduje jednak, że pary indeksowe, będące głównym narzędziem w konstrukcji indeksu Conleya, przestają być przydatne, ponieważ otoczenia izolujące w nowym sensie nie gwarantują ich istnienia. Dlatego potrzebna była nowa konstrukcja indeksu. Definicja indeksu Conleya przedstawiona w [H1] oparta jest na *słabych parach indeksowych* [H1, Definicja 4.7]. Wymaga to zupełnie nowych dowodów.

4.1.2.2. *Własności indeksu.* Praca [H2] jest kontynuacją [H1] i jest poświęcona własnościom zdefiniowanego tam indeksu Conleya. Dowodzimy własności *Ważewskiego*, własności *addytywności*, własności *homotopii (kontynuacji)* oraz własności *przemienności*.

[H2, Rozdział 4] zawiera definicję bloku izolującego dla dyskretnego wielowartościowego układu dynamicznego. Blok izolujący pozwala na łatwe skonstruowanie słabej pary indeksowej [H2, Theorem 4.4], co jest wygodne z obliczeniowego punktu widzenia i zostało wykorzystane w [H4]. W [H2, Section 5] omawiamy własność Ważewskiego i własność addytywności. Okazuje się, że w przeciwieństwie do przypadku jednowartościowego lub wielowartościowego, ale dla zbiorów niezmienniczych silnie izolowanych, suma dwóch rozłącznych zbiorów niezmienniczych izolowanych nie musi być zbiorem niezmienniczym izolowanym [H2, Example 5.2]. Co więcej, jeśli nawet suma dwóch rozłącznych zbiorów niezmienniczych izolowanych jest zbiorem niezmienniczym izolowanym, jego indeks Conleya nie musi być równy iloczynowi jego składowych [H2, Example 5.4]. Powodem jest to, że definicja otoczenia izolującego nie kontroluje w pełni obrazu zbioru niezmienniczego izolowanego dla F. W konsekwencji suma dwóch zbiorów niezmienniczych izolowanych może zawierać trajektorię łączącą składowe. Jeśli jednak zbiory niezmiennicze izolowane są wystarczająco dobrze odseparowane, w tym sensie, że obraz żadnego z nich nie przecina drugiego, to pożądana własność zachodzi [H2, Theorem 5.3]. W [H2, Section 6] omawiamy własność kontynuacji (homotopii) indeksu Conleya [H2, Theorem 6.1]. Przedstawiamy również jego proste zastosowanie do wiodącego przykładu [H1] pokazujące, że indeks Conleya wielowartościowego układu dynamicznego skonstruowanego na podstawie próbki pokrywa się z indeksem próbkowanego jednowartościowego układu dynamicznego, zgodnie z oczekiwaniem [H2, Example 6.7, 6.8]. W ostatnim rozdziale zajmujemy się własnością przemienności.

4.1.2.3. *Rozkłady Morse'a i równanie Morse'a.* W [H5] kontynuujemy program rozpoczęty w [H1, H2]. Przyglądamy się wewnętrznej strukturze zbiorów niezmienniczych izolowanych. Jednym z deskryptorów, które temu służą jest rozkład Morse'a i związane z nim równanie Morse'a.

Klasyczne nierówności Morse'a dotyczą niezdegenerowanych punktów krytycznych potoku gradientowego na rozmaitości zwartej i pokazują odpowiedniość między k-tą liczbą Bettiego rozmaitości a liczbą punktów krytycznych o indeksie Morse'a k, czyli punktów krytycznych z k-wymiarową niestabilną rozmaitością niezmienniczą [13]. Jedno z uogólnień klasycznych nierówności Morse'a i Smale'a [92] w teorii indeksu Conleya zostało zaproponowane przez Conleya i Zehndera dla potoków [21]. Następnie równanie Morse'a w teorii indeksu Conleya zostało udowodnione dla semipotoków przez Rybakowskiego [90], a dla czasu dyskretnego przez Franksa [36] i Mrozka [70].

Załóżmy, że dany jest układ dynamiczny (z czasem ciągłym lub dyskretnym) w lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej. W kohomologicznej teorii indeksu Conleya ze zbiorem niezmienniczym izolowanym wiąże się specjalną parę zbiorów, zwaną parą indeksową. Kohomologiczny indeks Conleya zbioru S jest definiowany jako kohomologie Alexandera-Spaniera pary indeksowej. Dowodzi się, że jest to niezmiennik S. Zatem z S możemy związać szereg Poincar'e $p(t, S)$, tzn. szereg potęgowy względem t z rzędami modułów kohomologii jako współczynnikami. Załóżmy teraz, że $\mathcal{M} := \{M_i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ jest rozkładem Morse'a S. Stąd w szczególności zbiory M_i są parami rozłącznymi podzbiorami niezmienniczymi izolowanymi zbioru S. Wtedy równanie Morse'a przybiera postać

$$\sum_{i=1}^{n} p(t, M_i) = p(t, S) + (1 + t)Q(t),$$

gdzie Q jest formalnym szeregiem potęgowym o współczynnikach całkowitych nieujemnych [21]. Z równania tego wynikają klasyczne nierówności Morse'a. Wyrazy szeregu Q dostarczają informacji o nietrywialnych połączeniach między parami zbiorów Morse'a.

W [H5] rozszerzamy teorię rozkładów Morse'a i dowodzimy równania Morse'a w teorii indeksu Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych. Definiujemy zbiory α- i ω-graniczne, atraktory, repelery i pary repeler-atraktor. Pojęcia te uogólniają odpowiednie pojęcia w przypadku jednowartościowym, jednak nie są identyczne. Na przykład definiujemy zbiór ω-graniczny dla rozwiązania przechodzącego przez dany punkt x, a nie dla samego x, ponieważ dynamika wielowartościowa dopuszcza wiele rozwiązań w przód przez x. Charakteryzujemy zbiory Morse'a za pomocą ciągu (filtracji) atraktorów [H5, Theorem 3.9, Theorem 3.11]. W klasycznej teorii Conleya kluczowym narzędziem dowodzenia równania Morse'a jest trójka indeksowa. Przypomnijmy, że w przypadku wielowartościowym pary indeksowe nie są przydatne - otoczenia izolujące nie gwarantują istnienia par indeksowych [H1], a konstrukcja indeksu opiera się na słabych parach indeksowych. Dlatego dla pary repeler-atraktor konstruujemy słabą trójkę indeksową [H5, Theorem 4.7]. Wykorzystując ją dowodzimy równania Morse'a [H5, Theorem 5.2], które uogólnia klasyczne nierówności Morse'a [H5, Corollary 5.4].

4.1.3. **Zastosowania w dynamice próbkowanej.**

4.1.3.1. *Odwzorowanie wielowartościowe.* Krótko przedstawimy schemat wykorzystania wielowartościowych układów dynamicznych do badania dynamiki próbkowanej. Rozpoczynamy od skonstruowania kostkowej reprezentacji przestrzeni fazowej X w taki sposób, aby każda kostka maksymalnego wymiaru Q zawierała pewną liczbę punktów próbki. Następnie konstruujemy kostkowe odwzorowanie wielowartościowe $F : X \multimap X$, czyli odwzorowanie $X \ni x \mapsto F(x) \subset X$, takie że posyła ono kostkę Q w możliwie mały acykliczny kostkowy nadzbiór $\{Q \mid f(x) \in Q\}$, gdzie $f(x)$ oznacza zaobserwowaną wartość badanego układu dynamicznego w punkcie x i może być zaszumiona. Można byłoby się obawiać, że dyskretyzacja przestrzeni może spowodować sztywność modelu. Na szczęście tak nie jest, ponieważ odwzorowania wielowartościowe z natury dopuszczają niejednoznaczne rozwiązania nie tylko wstecz, ale także w przód, co czyni je bardzo elastycznym materiałem do modelowania skomplikowanej dynamiki. Ponadto niezmienniki topologiczne są stabilne. W związku z tym, utrzymując rozmiar kostek na rozsądnym poziomie, można oczekiwać, że dynamika wielowartościowa jest w stanie odzwierciedlić modelowaną dynamikę. Wreszcie, grupując dane sprawiamy, że model jest odporny na małe perturbacje. Jest to szczególnie ważne, gdy dane są zaszumione lub niepewne, jak ma to miejsce w większości eksperymentów fizycznych.

Po skonstruowaniu odwzorowania wielowartościowego F możemy skorzystać z teorii indeksu Conleya dla F, znaleźć otoczenia izolujące, obliczyć interesujące nas niezmienniki. Zauważmy, że obliczenia są wykonalne, ponieważ odwzorowania kostkowe pozwalają na kombinatoryzację. Z punktu widzenia badania dynamiki powyższe obliczenia należy traktować jako czysto formalne, które same w sobie nie gwarantują istnienia funkcji ciągłej, która generowałaby dynamikę zgodną ze znalezionymi indeksami Conleya. Większość pracy [H4] poświęcona jest zagwarantowaniu, że te formalne obliczenia faktycznie prowadzą do istnienia rodziny odwzorowań, które generują obserwowaną dynamikę. Warto podkreślić, że ani w definicji indeksu Conleya, ani w metodach opisanych powyżej nie potrzebujemy ciągłego selektora odwzorowania F. W szczególności F nie musi mieć żadnego ciągłego selektora. Jest to istotne w zastosowaniach naszej metody, czego doświadczyliśmy już podczas pracy nad [9].

Przyjmijmy następującą notację. W produkcie przestrzeni unormowanych $X \times X$ rozważamy normę maksimum. Przez $B(F, \varepsilon) \subset X \times X$ oznaczmy otwartą ε-otoczkę wykresu F. Za [43, 41] mówimy, że funkcja ciągła $f : X \to X$ jest *ciągłą ε-aproksymacją (wykresu)* $F : X \multimap X$, jeśli $f \subset B(F, \varepsilon)$. Zbiór ciągłych ε-aproksymacji F oznaczamy przez $a_\varepsilon(F)$. Pokazujemy, że indeks Conleya obliczony dla acyklicznego górnie półciągłego odwzorowania kostkowego $F\colon X \multimap X$ pokrywa się z indeksem dla dowolnej funkcji $f \in a_\varepsilon(F)$, dla wszystkich $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$. Ponadto podajemy dolne ograniczenie dla ε_0.

Indeks Conleya dostarcza informacji o dynamice między innymi dzięki temu, że można go użyć do konstruowania semisprzężenia ze znaną dynamiką. Interesujące są semisprzężenia ze znaną dynamiką, bo oznacza to, że badana dynamika jest co najmniej tak samo skomplikowana. W [H4] fakty te ilustrujemy przykładami dla szeregów czasowych pochodzących z iteracji odwzorowań typu Hénona. W szczególności zastosowaliśmy naszą metodę do pokazania dynamiki chaotycznej oraz orbit okresowych.

4.1.3.2. *Dynamika kombinatoryczna.* Od czasu, gdy Forman [35, 34] zaproponował kombinatoryczne pola wektorowe na kompleksach symplicjalnych, znalazły one liczne zastosowania. Jeden z powodów tego sukcesu ma swoje korzenie w pierwotnej motywacji Formana. W swoich pracach starał się przenieść bogate teorie dynamiczne Morse'a [63] i Conleya [20] z przypadku ciągłego na skończony przypadek kombinatoryczny kompleksu symplicjalnego. Okazało się to niezwykle przydatne do uzyskania wyników kombinatorycznych za pomocą pomysłów pochodzących z układów dynamicznych.

W szczególności teoria Formana stanowi alternatywę podczas badania próbkowanych układów dynamicznych. Można wyeliminować konstruowanie równań różniczkowych jako etapu pośredniego w klasycznym podejściu do dynamiki próbkowanej i bezpośrednio badać kombinatoryczną dynamikę pochodzącą z próbki [35, 34, 87, 54, 75]. Aby zrozumieć jakie podejście jest właściwe w konkretnym przypadku, pomocne może być wyjście poza wymianę abstrakcyjnych idei, co leży u podstaw licznych badań i szukać precyzyjnego związku między dwiema teoriami - czysto kombinatoryczną i klasyczną. W pracy [52] zapoczątkowano badania nad formalnymi związkami między dynamiką wielowartościową w przypadku kombinatorycznym i w przypadku ciągłym. Wybór dynamiki wielowartościowej jest naturalny, ponieważ kombinatoryczne pola wektorowe w naturalny sposób generują dynamikę wielowartościową. Co więcej, w przypadku skończonym takie zjawiska dynamiczne, jak związki homokliniczne lub heterokliniczne, nie są możliwe w dynamice jednowartościowej. W [52] dowiedziono, że dla dowolnego kombinatorycznego pola wektorowego na kolekcji sympleksów kompleksu symplicjalnego można skonstruować odwzorowanie wielowartościowe o wartościach acyklicznych, górnie półciągłe, określone na geometrycznej realizacji kompleksu, którego dynamika na poziomie zbiorów niezmienniczych wykazuje taką samą złożoność jak dynamika pola wektorowego. Dokładniej, wprowadzając pojęcie zbiorów niezmiennych izolowanych w przypadku dyskretnym pokazano, że każdy zbiór niezmienniczy izolowany kombinatoryczne pole wektorowe odpowiada pewnemu zbiorowi niezmienniczemu izolowanemu w klasycznym wielowartościowym sensie. Przedstawiono również odpowiedniość między kombinatoryczną i klasyczną dynamiką wielowartościową na poziomie trajektorii.

Okazało się, że aby pokazać formalne związki na poziomie indeksu Conleya, potrzebna jest teoria indeksu Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych zaproponowana w [H1]. W [H3] rozszerzamy badania wykazując, że opisana powyżej korespondencja pozostaje w mocy dla indeksów Conleya odpowiadających sobie zbiorów niezmienniczych izolowanych oraz globalnych deskryptorów dynamiki - rozkładów Morse'a i grafów Conleya-Morse'a [3, 15].

4.1.4. **Perspektywy badawcze.** Rozwijana teoria otwiera perspektywy dla dalszych badań. W [9] proponujemy nową procedurę, która mając rzadkie dane generowane przez stacjonarny deterministyczny nieliniowy układ dynamiczny potrafi scharakteryzować szczegółowe lokalne i/lub globalne zachowania dynamiczne z równoczesnym ścisłym oszacowaniem gwarancji probabilistycznych. Precyzyjniej, startując od rzadkich danych konstruujemy model statystyczny oparty na procesach gaussowskich (GP). GP jest używany, by zdefiniować wielowartościowy układ dynamiczny. Dynamika modelu jest badana z użyciem rozwijanej teorii indeksu Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych oraz metod kombinatorycznych i charakteryzowana jest za pomocą indeksów Conleya i rozkładów Morse'a. Rozkłady zmiennych losowych procesu gaussowskiego a posteriori dostarczają ograniczenia od dołu na ufność statystyczną, że te niezmienniki topologiczne, a zatem charakterystyka dynamiki, obowiązują dla badanego układu dynamicznego. W pracy tej skupiamy się na opisaniu idei, dlatego przedstawiamy przykłady układów jednowymiarowych i pokazujemy jak uchwycić istnienie punktów stałych, orbit okresowych, orbit łączących, bistabilności i dynamiki chaotycznej.

Wyniki teoretyczne w [9] są zasadniczo niezależne od wymiaru. Zastosowania dla układów wyżej wymiarowych są w toku. Zauważamy, że im wyższy wymiar, tym bardziej istotne jest to, że teoria indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych nie wymaga restrykcyjnej izolacji ani istnienia ciągłych selektorów. Dzięki temu model wielowartościowy nie prowadzi do nadmiernych przeszacowań.

Dalsze badania dotyczące dynamiki próbkowanej łączą modelowanie statystyczne z kombinatorycznymi polami multiwektorowymi. We wspólnej pracy z doktorantem Damianem Sadowskim, używając procesu gaussowskiego dopasowanego do danych, konstruujemy kombinatoryczne pole multiwektorowe, z którego dostajemy deskryptory dynamiki. Eksperymenty są obiecujące. Rozkłady a posteriori dają nadzieję na uzyskanie oszacowań ufności obliczanych niezmienników topologicznych.

4.2. Szersze omówienie wyników

4.2.1. **Wprowadzenie.** Niech $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$ i $\mathbb{Z}^-$ oznaczają odpowiednio zbiory liczb całkowitych, całkowitych nieujemnych i całkowitych niedodatnich. Przez przedział w $\mathbb{Z}$ rozumiemy przecięcie $\mathbb{Z}$ z domkniętym przedziałem w $\mathbb{R}$. Niech $I_n := \{1, 2, \dots, n\}$ dla $n \geqslant 1$ i niech $\mathbb{Z}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$, dla $p \geqslant 2$, oznacza grupę topologiczną z dodawaniem modulo p i topologią dyskretną.

Jeśli A jest podzbiorem przestrzeni topologicznej X, to przez $\operatorname{int}_X A$ i $\operatorname{cl}_X A$ oznaczamy odpowiednio *wnętrze* i *domknięcie* A w X. Opuszczamy oznaczenie przestrzeni ilekroć jasno wynika ona z kontekstu. Często rozważamy pary przestrzeni topologicznych, dlatego dla prostoty oznaczamy je jedną wielką literą. Wówczas pierwszy i drugi element pary są oznaczane tą samą literą z indeksem dolnym odpowiednio 1 i 2. Innymi słowy, jeśli P jest parą przestrzeni, to $P = (P_1, P_2)$ i P_1, P_2 są przestrzeniami topologicznymi. Konsekwentnie regułę tę rozszerzamy na dowolną relację R między parami P i Q, tzn. dowolne stwierdzenie, że pary P i Q są w relacji R oznacza, że P_i jest w relacji R z Q_i dla $i = 1, 2$. Zgodnie z tą ogólną zasadą, ilekroć mówimy, że F jest odwzorowaniem par P i Q, oznacza to, że F odwzorowuje P_i w Q_i dla $i = 1, 2$.

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi. Przez $F\colon X \multimap Y$ oznaczamy funkcję wielowartościową, czyli funkcję $F\colon X \ni x \mapsto F(x) \in \mathcal{P}(Y)$, gdzie $\mathcal{P}(Y)$ jest zbiorem potęgowym zbioru Y. Odwzorowanie wielowartościowe F jest *górnie półciągłe*, jeśli *duży przeciwobraz* przez F dowolnego zbioru domkniętego $B \subset Y$, tzn. zbiór $F^{-1}(B) := \{x \in X \mid F(x) \cap B \neq \emptyset\}$, jest domknięty. Jest to równoważne temu, że zbiór $\{x \in X \mid F(x) \subset B\}$, zwany *małym przeciwobrazem* B, jest otwarty dla dowolnego zbioru otwartego $B \subset Y$. Przypomnijmy, że każde odwzorowanie górnie półciągłe o wartościach zwartych ma domknięty wykres i posyła zbiory zwarte w zbiory zwarte. Jeśli F jest górnie półciągłe, to jego *efektywna dziedzina*, czyli zbiór $\operatorname{dom}(F) := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$, jest domknięta. *Funkcją odwrotną* do funkcji wielowartościowej $F : X \multimap Y$ jest funkcja wielowartościowa $F^{-1} : Y \multimap X$ dana warunkiem

$$x \in F^{-1}(y) \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad y \in F(x).$$

Obraz zbioru $A \subset X$ przez F definiujemy jako $F(A) := \bigcup\{F(x) \mid x \in A\}$. Jeśli $F : X \multimap Y$ i $G : Y \multimap Z$, to *złożenie* $G \circ F : X \multimap Z$ zdefiniowane jest jako

$$(G \circ F)(x) := \bigcup\{G(y) \mid y \in F(x)\} \text{ dla } x \in X.$$

W całej pracy utożsamiamy odwzorowanie F z jego *wykresem* $\{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$. Zainteresowani będziemy odwzorowaniami wielowartościowymi przestrzeni w siebie $F\colon X \multimap X$. Wówczas przez F^k, dla $k \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}$, rozumiemy złożenie k kopii F, gdy k jest dodatnie lub $-k$ kopii odwzorowania odwrotnego do F, gdy k jest ujemne.

4.2.2. **Praca** [H1]**: Słabe pary indeksowe i indeks Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych.** Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Przypomnijmy, że górnie półciągłe odwzorowanie wielowartościowe $F : X \times \mathbb{Z} \multimap X$ o wartościach zwartych nazywamy *dyskretnym wielowartościowym układem dynamicznym* [50, Definition 2.1], gdy:

(i) dla każdego $x \in X$, $F(x, 0) = \{x\}$,
(ii) dla wszystkich $n, m \in \mathbb{Z}$ takich, że $nm \geqslant 0$ i wszystkich $x \in X$, $F(F(x, n), m) = F(x, n + m)$,
(iii) dla wszystkich $x, y \in X$, $y \in F(x, -1) \Leftrightarrow x \in F(y, 1)$.

Dla wygody nadużywamy notacji, kładąc $F(x) := F(x, 1)$. Mając przedział $I \subset \mathbb{Z}$ (niekoniecznie ograniczony) zawierający 0, odwzorowanie jednowartościowe $\sigma : I \to X$ nazywamy *rozwiązaniem dla F przez $x \in X$*, gdy $\sigma(0) = x$ i $\sigma(n + 1) \in F(\sigma(n))$ dla $n, n + 1 \in I$. Zauważmy, że może istnieć wiele rozwiązań przez dany punkt $x \in X$. Dla zbioru zwartego $N \subset X$ definiujemy jego część niezmienniczą $\operatorname{Inv} N := \{x \in N \mid \exists\, \sigma : \mathbb{Z} \to X$ rozwiązanie dla F przez x, takie że $\operatorname{im} \sigma \subset N\}$. Mówimy, że $S \subset X$ jest *niezmienniczy*, jeśli $S = \operatorname{Inv} N$.

Istnieje wiele układów dynamicznych, dla których ani obliczenia analityczne, ani ścisła analiza numeryczna, nie są możliwe. Może tak być z wielu powodów. Całkowity brak modelu matematycznego, niewystarczająca znajomość parametrów lub skomplikowane globalne nieliniowości, mogą całkowicie uniemożliwić obliczenia. A gdy model jest dostępny, wrażliwa zależność od warunków początkowych, puchnące oszacowania błędów lub brak wystarczającej mocy obliczeniowej, mogą uniemożliwić ścisłą analizę numeryczną. Dlatego, często, próbkowanie układu dynamicznego jest jedynym sposobem na wydobycie jakiejkolwiek wiedzy o systemie. Przez próbkowanie rozumiemy kolekcjonowanie skończonej ilości punktów i ich przybliżonych obrazów przez generator układu dynamicznego. Może to zostać zrobione poprzez eksperyment fizyczny lub numeryczny, jeśli dostępne są wystarczające informacje o układzie. Wówczas rodzi się pytanie, czy ta skończona ilość danych wystarczy, aby uzyskać pewną globalną, ogólną informację na temat układu i jak to zrobić. W pełnej ogólności jest to trudne, szczególnie w przypadku dynamiki chaotycznej, gdy swoiste problemy układów chaotycznych potęgowane są przez szum, dryft parametrów i błędy eksperymentalne.

W tej sytuacji zgrubność niezmienników topologicznych, takich jak indeks Conleya, czy homologie persystentne [32], okazują się pomocne. W szczególności [61] pokazuje, że indeks Conleya w połączeniu z podejściem wielowartościowym mogą być wystarczające, by wykryć dynamikę chaotyczną w danych eksperymentalnych. Natomiast w [31] pokazano, że wartości własne odwzorowania indukowanego w homologiach można zrekonstruować na podstawie bardzo małej próbki funkcji ciągłej za pomocą techniki zwanej persystencją. Oba artykuły dotyczą podobnej sytuacji, którą z grubsza można opisać w następujący sposób.

Załóżmy, że $X \subset \mathbb{R}^d$ jest nieznaną przestrzenią, $f : X \to X$ jest generatorem nieznanego układu dynamicznego, $A \subset X$ jest skończonym zbiorem powstałym przez próbkowanie X i $g := f_{|A} : A \to X$ jest próbką wartości f na A. Zauważmy, że w bardziej realistycznej sytuacji zbiór A może leżeć jedynie w pobliżu X, a wykres g w pobliżu wykresu f. Podobnie jak w [61], próbka taka może być efektem szeregu pomiarów. Rekonstrukcja może przyjąć formę odwzorowania symplicjalnego, jak w [31], albo odwzorowania wielowartościowego, jak w [61], skonstruowanego w następujący sposób. W $\mathbb{R}^d$ rozważamy siatkę - kolekcję zwartych acyklicznych zbiorów, np. kostek (formalną definicję siatki znaleźć można np. w [73]). Załóżmy, że dla skończonej rodziny $\mathcal{A}$ elementów siatki potrafimy skonstruować możliwie mały zbiór acykliczny $\operatorname{ac}\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ taki, że $\bigcup \mathcal{A} \subset \operatorname{ac}\mathcal{A}$. W przypadku siatki kostkowej może to być najmniejszy prostopadłościan zawierający wszystkie kostki zbioru $\mathcal{A}$. Niech $\mathcal{K}$ oznacza rodzinę elementów siatki, której przecięcie z A jest niepuste i załóżmy, że elementy siatki i/lub próbka A są wystarczająco duże, aby $X \subset \bigcup \mathcal{K}$. Zdefiniujmy kombinatoryczne odwzorowanie wielowartościowe

$$\mathcal{G} : \mathcal{K} \ni Q \mapsto \{\, P \in \mathcal{K} \mid \exists x \in Q : \ g(x) \in P \,\} \subset \mathcal{K}.$$

i odwzorowanie wielowartościowe

$$F : X \ni x \mapsto \operatorname{ac}\left(\bigcup_{x \in Q \in \mathcal{K}} \mathcal{G}(Q) \right) \subset \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Nie jest trudno udowodnić, że F jest górnie półciągłe i $g(x) \in F(x)$ dla $x \in A$. Nie możemy jednak oczekiwać, że f będzie selektorem F, tzn. $f(x) \in F(x)$ dla każdego $x \in X$. Co gorsza, nie możemy oczekiwać, że F w ogóle ma jakikolwiek ciągły selektor.

Natomiast w metodzie zaproponowanej w [61] wymaga się istnienia ciągłego selektora, ponieważ podejście opiera się na indeksie Conleya dla odwzorowań (jednowartościowych) ciągłych, a nie na indeksie Conleya dla odwzorowań wielowartościowych. Odwzorowanie wielowartościowe F używane jest w [61] tylko po to, aby skonstruować tak zwaną parę indeksową. Jest ona potrzebna do obliczenia indeksu Conleya dla ciągłego selektora. W praktyce wymóg istnienia ciągłego selektora często zawodzi z powodu niewystarczającej ilości danych i lokalnej zmienności f. Jako środek zaradczy można próbować powiększyć wartości F, aby zagwarantować istnienie selektora ciągłego. Jednak takie powiększenie często prowadzi do przeszacowania i utraty izolowania. Alternatywą jest zastosowanie teorii indeksu Conleya bezpośrednio do odwzorowania wielowartościowego F skonstruowanego z danych eksperymentalnych i rozszerzenie wyników na nieznany generator f za pomocą własności kontynuacji. Konstrukcja indeksu w [50, 96] nie wymaga istnienia ciągłych selektorów. Niestety, oparta jest na bardzo restrykcyjnej definicji otoczenia izolującego. Przypomnijmy, że zgodnie z [50], zbiór zwarty N jest otoczeniem izolującym dla odwzorowania wielowartościowego F, jeśli

$$\operatorname{dist}(\operatorname{Inv} N, \operatorname{bd} N) > \max\{\operatorname{diam} F(x) \mid x \in N\}. \tag{2}$$

W praktyce trudno jest spełnić ten warunek, ponieważ kontrolowanie rozmiaru wartości F jest albo bardzo drogie albo po prostu niemożliwe. Aby uniknąć niejednoznaczności, odtąd otoczenie izolujące w sensie (2) nazywać będziemy *otoczeniem silnie izolującym*.

Celem naszej pracy jest opracowanie teorii indeksu Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych przy minimalnych wymaganiach dotyczących odwzorowań wielowartościowych, w szczególności nie będziemy zakładać istnienia ciągłych selektorów oraz przy znacznie słabszym warunku izolowania.

Definition 1. [H1, Definition 4.1, 4.2] Zbiór zwarty $N \subset X$ jest *otoczeniem izolującym* dla F, jeśli $\operatorname{Inv} N \subset \operatorname{int} N$. Zbiór zwarty $S \subset X$ nazywamy *niezmienniczym* względem F, gdy $S = \operatorname{Inv} S$. Nazywamy go *zbiorem niezmienniczym izolowanym*, jeśli istnieje otoczenie izolujące N dla F takie, że $S = \operatorname{Inv} N$.

Rozpocznijmy od zilustrowania problemu naszymi przykładami: [H1, Example 2.1], [H1, Example 2.2] oraz przykładem wprowadzającym w [H4] (por. [H4, Figure 1]).

W [H1, Example 2.1] definiujemy funkcję wielowartościową kostkową sfery w siebie $F : S^1 \multimap S^1$, taką że: F nie ma ciągłego selektora, F ma niepusty zbiór niezmienniczy izolowany S (zawierający 0) z otoczeniem izolującym N, N nie jest otoczeniem silnie izolującym dla F oraz N przestaje być otoczeniem izolującym, jeśli powiększymy wartości F, tak by F dopuszczało ciągły selektor. Odwzorowanie F jest skonstruowane przez próbkowanie funkcji $f : S^1 \to S^1$ danej wzorem $f(x) = 2x$. Próbka składa się z 16 punktów. Indeks Conleya zbioru S dla F jest taki sam jak indeks Conleya $\{0\}$ dla f [H1, Example 8.1]. Pokazuje to, że tak skonstruowane F i N dla kilku punktów wystarczają, aby poprawnie zidentyfikować hiperboliczny punkt stały względem f, podczas gdy nie jest to możliwe ani przy użyciu teorii Conleya dla selektorów ciągłych, ani teorii dla silnie izolowanych zbiorów niezmienniczych.

W [H1, Example 2.2] używamy tych samych odwzorowań f i F. Znajdujemy zbiór niezmienniczy izolowany S, który nie jest zbiorem niezmienniczym silnie izolowanym i zawiera 2-okresową orbitę dla f. W [H1, Example 8.2] pokazujemy, że indeks Conleya zbioru S dla F jest taki sam jak indeks Conleya dla orbity 2-okresowej względem f. Zatem siatka składająca się z 16 równych przedziałów wystarczy, aby wybrać S jako zbiór izolowany niezmienniczy, ale nie jako zbiór silnie izolowany niezmienniczy.

W [H4] wyjaśniamy filozofię naszego podejścia do problemu rekonstrukcji dynamiki kolejnym przykładem (por. [H4, Figure 1]). Załóżmy, że zebraliśmy próbkę $\{\, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \,\}$ pochodzących z pewnego nieznanego układu dynamicznego na przedziale jednostkowym. Interpretujemy te dane jako źródło informacji o wykresie funkcji ciągłej $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ i zadajemy sobie pytanie: *czy z tych danych możemy wydobyć informację o dynamice generowanej przez* f? Odpowiedź jest twierdząca. Rzeczywiście, przy niewielkich założeniach możemy stwierdzić, że istnieją atraktory, które zawierają punkty stałe w przedziałach $[0, \frac{1}{4}]$ i $[\frac{3}{4}, 1]$ oraz istnieje niestabilny zbiór niezmienniczy, również zawierający punkt stały w przedziale $[\frac{3}{8}, \frac{5}{8}]$. Wyniki te uzyskujemy konstruując na podstawie danych górnie półciągłą acykliczną funkcję wielowartościową $F : [0, 1] \multimap [0, 1]$. Otrzymana funkcja F nie ma ciągłego selektora. Co więcej, najmniejsze jej rozszerzenie dopuszczające ciągły selektor spełniający $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ skutkuje zbyt zgrubnym przybliżeniem dynamiki, tzn. nie dopuszcza otoczenia izolującego dla punktu stałego $x = \frac{1}{2}$, ponieważ identyczność jest jednym z selektorów.

Głównym narzędziem konstruowania indeksu Conleya zarówno dla potoków jak i dyskretnych układów dynamicznych jest para indeksowa [H1, Definition 4.5]. Para indeksowa jest również skutecznym narzędziem w badaniu dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych, gdy rozważa się otoczenia silnie izolujące. Jednak, jak pokazuje [H1, Example 4.6], narzędzie to nie jest dla nas przydatne, ponieważ zbiory niezmiennicze izolowane w sensie definicji 1 ([H1, Definition 4.1]) nie gwarantują istnienia par indeksowych. Aby pokonać tę przeszkodę, adaptujemy do naszych potrzeb pojęcie słabej pary indeksowej wprowadzone w [74], co uogólnia pojęcie pary indeksowej [H1, Theorem 4.8].

Definition 2. [H1, Definition 4.7] Parę $P = (P_1, P_2)$ zbiorów zwartych $P_2 \subset P_1 \subset N$ nazywamy *słabą parą indeksową* w N, gdy

(a) $F(P_i) \cap N \subset P_i$ dla $i \in \{1, 2\}$,
(b) $\operatorname{bd}_F P_1 := \operatorname{cl} P_1 \cap \operatorname{cl}(F(P_1) \setminus P_1) \subset P_2$,
(c) $\operatorname{Inv} N \subset \operatorname{int}(P_1 \setminus P_2)$,
(d) $P_1 \setminus P_2 \subset \operatorname{int} N$.

Konstrukcja indeksu Conleya w [H1] opiera się na słabych parach indeksowych. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest następujące twierdzenie.

Theorem 3. [H1, Theorem 4.12] *Niech N będzie otoczeniem izolującym dla F. Dla każdego otoczenia W zbioru* $\operatorname{Inv} N$ *istnieje słaba para indeksowa P w N taka, że $P_1 \setminus P_2 \subset W$.*

Wymagamy, aby generator $F : X \multimap X$ dyskretnego wielowartościowego układu dynamicznego, obcięty do odpowiednich par zbiorów, indukował homomorfizm w kohomologiach. Dlatego zakładamy, że F jest *określone przez dany morfizm* (determined by morphism) (por. [42, 41]). Przypomnijmy, że do tej klasy należy w szczególności dowolna jednowartościowa funkcja ciągła, jak również dowolne złożenie funkcji acyklicznych, tzn. funkcji górnie półciągłych o zwartych i acyklicznych wartościach.

Dla słabej pary indeksowej P w otoczeniu izolującym N kładziemy

$$T(P) := T_N(P) := (P_1 \cup (X \setminus \operatorname{int} N), P_2 \cup (X \setminus \operatorname{int} N)).$$

Lemma 4. [H1, Lemma 6.1] *Jeśli P jest słabą parą indeksową dla F w N, to*

(i) *$F(P) \subset T(P)$,*
(ii) *inkluzja $i_{P,T(P)} : P \to T(P)$ indukuje izomorfizm w kohomologiach Alexandera-Spaniera.*

Zatem obcięcie F do P jest odwzorowaniem par $F_{P,T(P)} : P \multimap T(P)$ i możemy zdefiniować endomorfizm $I_P : H^*(P) \to H^*(P)$ wzorem $I_P := H^*(F_{P,T(P)}) \circ H^*(i_P)^{-1}$, zwany *odwzorowaniem indeksowym* związanym ze słabą parą indeksową P [H1, Definition 6.2].

Para $(H^*(P), I_P)$ jest przykładem obiektu z *kategorii endomorfizmów* $\operatorname{Endo}(\mathcal{E})$ zdefiniowanej w następujący sposób. Mając kategorię $\mathcal{E}$, obiekty w $\operatorname{Endo}(\mathcal{E})$ są parami (E, e) z E jako obiektem w $\mathcal{E}$ i $e : E \to E$ jako morfizmem w E. Morfizm $\varphi : (E, e) \to (E', e')$ w $\operatorname{Endo}(\mathcal{E})$, to morfizm $\varphi : E \to E$ w $\mathcal{E}$, taki że $\varphi e = e'\varphi$. Aby wydobyć informację z pary $(H^*(P), I_P)$, która jest niezmiennikiem $\operatorname{Inv} N$, potrzebny jest *funktor normalny* $N : \operatorname{Endo}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}'$, czyli funktor który posyła endomorfizm e, rozpatrywany jako morfizm $e : (E, e) \to (E, e)$ w $\operatorname{Endo}(\mathcal{E})$, w izomorfizm w $\mathcal{E}'$. Istnienie uniwersalnego funktora normalnego dla dowolnej kategorii $\mathcal{E}$ gwarantuje wynik A. Szymczaka [98]. W praktyce wybiera się funktor normalny, który jest łatwy do obliczenia. Przykładem takiego funktora normalnego jest *functor Leray* [67]. Niech $\operatorname{Mono}(\mathcal{E})$ i $\operatorname{Auto}(\mathcal{E})$ oznaczają pełne podkategorie $\operatorname{Endo}(\mathcal{E})$, których obiekty mają postać (E, e), gdzie e jest odpowiednio mono– lub izomorfizmem w $\mathcal{E}$. Połóżmy $LM(E, e) := (E/\operatorname{gker} e, e')$, gdzie $\operatorname{gker} e = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ker e^n$ i e' to odwzorowanie indukowane w przestrzeni ilorazowej. To definiuje funktor $LM : \operatorname{Endo}(\mathcal{E}) \to \operatorname{Mono}(\mathcal{E})$. Definiujemy kolejny funktor $LI : \operatorname{Mono}(\mathcal{E}) \to \operatorname{Auto}(\mathcal{E})$, jako $LI(M, m) := (\operatorname{gim} m, m'')$, gdzie $\operatorname{gim} m = \bigcap_{n=1}^{\infty} m^n(M)$ i m'' to obcięcie m do $\operatorname{gim} m$. Wtedy funktor Leray $L : \operatorname{Endo}(\mathcal{E}) \to \operatorname{Auto}(\mathcal{E})$ dany jest jako złożenie $L := LI \circ LM$. Po więcej informacji na temat funktorów normalnych i ich zastosowaniach w konstrukcji indeksu Conleya odsyłamy czytelnika do [71, 72].

Funktor Leray pozwala nam zdefiniować *(ko)homologiczny indeks Conley'a* zbioru niezmienniczego izolowanego S.

Definition 5. [H1, Definition 6.3]. Moduł $L(H^*(P), I_P)$ nazywamy *kohomologicznym indeksem Conleya zbioru S* i oznaczany przez $C(S, F)$ lub po prostu przez $C(S)$, jeśli F wynika jasno z kontekstu.

Poprawność definicji gwarantują twierdzenie 3 [H1, Theorem 4.12] i następujące twierdzenie.

Theorem 6. [H1, Theorem 5.5]. *Niech S będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym. Wtedy $C(S, F)$ nie zależy od wyboru otoczenia izolującego N dla S ani od słabej pary indeksowej P w N.*

Warto zauważyć, że funktor Leray lub inny funktor normalny jest potrzebny tylko do konstrukcji indeksu Conleya dla układów dynamicznych z czasem dyskretnym (iteracje odwzorowań). Powodem jest to, że w przeciwieństwie do przesunięcia wzdłuż trajektorii potoku, funkcja nie musi być homotopijna z identycznością. Jeśli odwzorowanie jest homotopijne z identycznością, to można pokazać, że odwzorowanie indukowane w $H^*(P)/\operatorname{gker} I_P$ jest identycznością i w konsekwencji redukcja Leray $(H^*(P), I_P)$ może być utożsamiona z $H^*(P)$ [69].

Większość pracy [H1] poświęcona jest dowodowi twierdzenia 6 [H1, Theorem 5.5]. Wymagało to udowodnienia szeregu lematów pomocniczych pokazujących różne własności słabych par indeksowych.

Zaproponowana definicja indeksu Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych w [H1] uogólnia wcześniejsze definicje [H1, Theorem 6.5].

Słaba para indeksowa wprowadzona w [H1] dla wielowartościowych dyskretnych układów dynamicznych jest bezpośrednim rozszerzeniem słabej pary indeksowej wprowadzonej w [74] dla jednowartościowych dyskretnych układów dynamicznych. W przypadku jednowartościowym słabe pary indeksowe nie są potrzebne żeby skonstruować indeks Conleya. Zostały one wprowadzone w celu poprawy skuteczności obliczania indeksu Conleya. Jak już wspominaliśmy, inaczej jest w przypadku wielowartościowym, w którym klasyczne pary indeksowe mogą nie istnieć, chyba że przyjmiemy bardzo restrykcyjną silną izolację. Ale odpowiednia modyfikacja przestrzeni fazowej i wielowartościowego układu dynamicznego poza otoczeniem zbioru niezmienniczego izolowanego gwarantuje istnienie pary indeksowej. Modyfikacja polega na trzymaniu dynamiki wychodzącej z otoczenia izolującego N z dala od N. Technika użyta do skonstruowania zmodyfikowanej dynamiki pochodzi z [66, 77, 96], gdzie jest używana do przezwyciężenia nieco innych trudności technicznych. Załóżmy, że X jest lokalnie zwartą przestrzenią normalną, a $F : X \multimap X$ jest dyskretnym wielowartościowym układem dynamicznym. Dla zbioru niezmienniczego izolowanego S, otoczenia izolującego N i słabej pary indeksowej P w N, można skonstruować przestrzeń $\bar{X}$ i dyskretny wielowartościowy układ dynamiczny $\bar{F} : \bar{X} \multimap \bar{X}$, dla którego istnieje zbiór niezmienniczy izolowany $\bar{S} \subset \bar{X}$, taki że $C(S, F) = C(\bar{S}, \bar{F})$ [H1, Theorem 7.6] oraz $\bar{S}$ jest silnie izolowany dla $\bar{F}$ [H1, Theorem 7.7]. W konsekwencji $\bar{S}$ dopuszcza parę indeksową.

4.2.3. **Praca** [H2]**: Własności indeksu.** W [H2] badamy własności indeksu Conleya zdefiniowanego w [H1]. Dowodzimy własności: Ważewskiego, addytywności, homotopii (kontynuacji) i przemienności. Ponadto przedstawiamy prostą konstrukcję słabej pary indeksowej w bloku izolującym.

4.2.3.1. *Słabe pary indeksowe w blokach izolujących.* Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, a $F : X \multimap X$ dyskretnym wielowartościowym układem dynamicznym.

Definition 7. [H2, Definition 4.1] Zbiór zwarty N jest *blokiem izolującym* względem F, jeśli

$$N \cap F(N) \cap F^{-1}(N) \subset \operatorname{int} N,$$

gdzie $F^{-1}(N)$ oznacza duży przeciwobraz N względem F.

Blok izolujący jest otoczeniem izolującym (implikacja przeciwna nie zachodzi) [H2, Theorem 4.2], więc dopuszcza słabą parę indeksową. Ale w bloku izolującym jej konstrukcja jest znacznie prostsza.

Theorem 8. [H2, Theorem 4.4] *Niech N będzie blokiem izolującym względem F i niech U będzie otwartym otoczeniem $F(N) \cap F^{-1}(N) \cap N$ z $\operatorname{cl} U \subset \operatorname{int} N$. Wtedy pary $P_1 := (F(N) \cap N) \cup \operatorname{cl} U$ i $P_2 := F(N) \cap \operatorname{bd} N$ tworzą słabą parę indeksową $P := (P_1, P_2)$ w N.*

Założenie, że P_1 zawiera zwarte otoczenie $F(N) \cap F^{-1}(N) \cap N$, jest konieczne [H2, Example 4.5]. Z twierdzenia 8 [H2, Theorem 4.4] korzystamy w [H4].

4.2.3.2. *Własność Ważewskiego i własność addytywności indeksu Conleya.* Załóżmy, że X jest lokalnie zwartą przestrzenią metryzowalną, a $F : X \multimap X$ jest dyskretnym wielowartościowym układem dynamicznym.

Własność Ważewskiego. Własność Ważewskiego jest odpowiednikiem zasady Ważewskiego w teorii indeksu Conleya. Jest to podstawowe kryterium lokalizacji niepustych zbiorów niezmiennych.

Theorem 9. (**Właściwość Ważewskiego**) *Niech S będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym względem F. Jeśli $C(S,F) \neq 0$, to $S \neq \emptyset$.*

Podobnie jak w przypadku jednowartościowym, dowód jest natychmiastowy.

Własność addytywności. [H2, Example 5.2] pokazuje, że inaczej niż dla jednowartościowych układów dynamicznych lub wielowartościowych dla zbiorów niezmienniczych silnie izolowanych, suma dwóch rozłącznych zbiorów niezmienniczych izolowanych nie musi być zbiorem niezmienniczym izolowanym. Niemniej jednak, zachodzi odpowiednio przeformułowana właściwość addytywności.

Theorem 10. [H2, Theorem 5.3] (**Właściwość addytywności**) *Niech zbiór niezmienniczy izolowany S dla dyskretnego wielowartościowego układu dynamicznego F na lokalnie zwartej przestrzeni metryzowalnej będzie rozłączną sumą dwóch zbiorów niezmienniczych izolowanych S_1 i S_2. Załóżmy, że*

$$F(S_i) \cap S_j = \emptyset \text{ dla } i, j = 1, 2, i \neq j. \tag{3}$$

Wtedy $C(S,F) = C(S_1,F) \times C(S_2,F)$ (definicja iloczynu $\times$ - por. [67, Proposition 4.5]) .

Zauważmy, że jeśli F jest funkcją jednowartościową, to rozłączność zbiorów niezmienniczych izolowanych S_1 i S_2 implikuje warunek (3). Łatwo zauważyć, że jest tak również dla wielowartościowych układów dynamicznych dla zbiorów niezmienniczych silnie izolowanych. Jednak [H2, Example 5.4] pokazuje, że w pełnej ogólności warunek (3) jest istotny dla właściwości addytywności. Nawet jeśli suma dwóch rozłącznych zbiorów niezmienniczych izolowanych jest zbiorem niezmienniczym izolowanym, jego indeks Conleya niekoniecznie jest równy iloczynowi jego składników. Powodem jest to, że suma dwóch zbiorów niezmienniczych izolowanych może zwierać trajektorie łączące oba zbiory.

Dla dowodu twierdzenia 10 [H2, Theorem 5.3] nie możemy powtórzyć rozumowania użytego w przypadku jednowartościowym, ponieważ w dowodzie [67, Theorem 2.12] istotne jest, że dla dowolnych rozłącznych zbiorów niezmienniczych izolowanych S_1, S_2 można wybrać otoczenia izolujące i pary indeksowe P^1, P^2, tak że $F(P^1_2)$ i $F(P^2_2)$ są rozłączne, wtedy pary $P^1_i \cup F(P^1_2)$ i $P^2_i \cup F(P^2_2)$, $i = 1, 2$, użyte do budowy odwzorowań indeksowych są rozłączne. Nazwijmy tymczasowo takie odwzorowania indeksowe *odseparowanymi.* Zauważmy, że w przypadku wielowartościowym tak nie jest, nawet jeśli rozłączne zbiory niezmiennicze izolowane spełniają warunek (3). Aby pokonać tę przeszkodę, w naszym dowodzie używamy konstrukcji rozszerzonego dyskretnego wielowartościowego układu dynamicznego zaproponowanej w [H1, Section 7]. Konstruujemy przestrzeń $X(P)$ dla odpowiednio małego otoczenia izolującego N sumy $S_1 \cup S_2$ i słabe pary indeksowej P w N. Następnie rozważamy odpowiednie włożenia ${S_i}'$ wyjściowych zbiorów niezmienniczych izolowanych S_i, $i = 1, 2$, w $X(P)$ - jedno z nich na poziomie 0, a drugie na poziomie 1. Włożenia są zdefiniowane w taki sposób, że są zbiorami niezmienniczymi izolowanymi względem F^P i zachodzą równości $C({S_i}', F^P) = C(S_i, F)$ i $C({S_1}' \cup {S_2}', F^P) = C(S_1 \cup S_2, F)$. Nie gwarantuje to jeszcze, że odpowiednie odwzorowania indeksowe są odseparowane przy dowolnych słabych parach indeksowych $P^{i'}$ dla S'_i. Zwróćmy uwagę, że w definicji odwzorowań indeksowych w przypadku wielowartościowym używamy par przestrzeni $T(P^{1'})$ i $T(P^{2'})$, które nie są rozłączne. Mimo to, dzięki specyficznym własnościom rozszerzonego układu dynamicznego F^P, jesteśmy w stanie znaleźć takie słabe pary indeksowe, które umożliwiają skonstruowanie odwzorowań pomocniczych, które są izomorficzne z danymi odwzorowaniami indeksowymi, a jednocześnie odseparowane. Okazuje się, że to wystarcza do dowodu [H2, Theorem 5.3].

4.2.3.3. *Własność homotopii indeksu Conleya.* Właściwość kontynuacji odgrywa kluczową rolę w naszym podejściu do dynamiki próbkowanej. Stosujemy teorię indeksu Conleya bezpośrednio do wielowartościowego układu dynamicznego F skonstruowanego dla próbki nieznanego układu dynamicznego f, a następnie rozszerzamy wyniki na f. Ponieważ F może nie mieć żadnego ciągłego selektora (w szczególności nie oczekujemy, że f jest selektorem F), dlatego informację o indeksie Conleya funkcji f uzyskujemy za pomocą właściwości homotopii.

Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią metryzowalną, niech $\Lambda \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zwartym i niech górnie półciągłe odwzorowanie $F : \Lambda \times X \multimap X$ o wartościach zwartych będzie określone przez morfizm. Załóżmy, że dla każdego $\lambda \in \Lambda$, $F_\lambda : X \multimap X$ dane przez $F_\lambda(x) := F(\lambda, x)$ jest dyskretnym wielowartościowym układem dynamiczny. Rodzina $\{F_\lambda\}$ będzie określana jako parametryzowana rodzina dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych. W skrócie piszemy λ zamiast F_λ, ilekroć F_λ występuje jako parametr. Można zauważyć, że jeśli $N \subset X$ jest otoczeniem izolującym dla F_{λ_0}, to jest nim również dla F_λ, dla $\lambda \in \Lambda$ wystarczająco bliskich λ_0 [H2, Lemma 6.2]. Głównym wynikiem jest następujące twierdzenie.

Theorem 11. [H2, Theorem 6.1] (**Własność homotopii** (**kontynuacji**)) *Niech $\Lambda \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem zwartym i niech $F_\lambda : X \multimap X$ będzie parametryzowaną rodziną dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych. Jeśli N jest otoczeniem izolującym dla każdego $\lambda \in \Lambda$, to $C(\mathrm{Inv}(N, \lambda))$ nie zależy od $\lambda \in \Lambda$.*

Do jego dowodu potrzebujemy kilku lematów. Kluczowe znaczenie ma istnienie wstępującej rodziny słabych par indeksowych.

Lemma 12. [H2, Lemma 6.4] *Jeśli N jest otoczeniem izolującym dla F, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieją słabe pary indeksowe $P^1, \ldots, P^n$ w N, takie że $P^i \subset \mathrm{int}_N P^{i+1}$, dla $i = 1, \ldots, n-1$.*

Zaczynając od trzech takich par P, Q i R dla μ możemy znaleźć parę indeksową $P \subset P(\lambda) \subset R$ dla λ, jeśli λ jest wystarczająco blisko μ [H2, Lemma 6.5]. Lemat ten rozszerzyć można na odwzorowania indukowane przez inkluzje w kohomologiach [H2, Lemma 6.6], co prowadzi do dowodu twierdzenia 11 [H2, Theorem 6.1].

4.2.3.4. *Własność przemienności indeksu Conleya.* W tym paragrafie X i Y są lokalnie zwartymi przestrzeniami metryzowalnymi.

Theorem 13. [H2, Theorem 7.1] (**Własność przemienności**) *Niech $F : X \multimap X$ i $G : Y \multimap Y$ będą dyskretnymi wielowartościowymi układami dynamicznymi i niech $\varphi : X \to Y$ i $\Psi : Y \multimap X$ będą funkcjami częściowymi, takimi że φ jest ciągła i różnowartościowa, dziedzina* $\mathrm{dom}\, \varphi$ *jest zwarta, Ψ jest górnie półciągłe, $F = \Psi\varphi$ i $G = \varphi\Psi$. Załóżmy, że $S \subset X$ jest zbiorem niezmienniczym izolowanym dla F oraz że dziedziny φ i Ψ zawierają otoczenia odpowiednio S i $\varphi(S)$. Wtedy $\varphi(S)$ jest zbiorem niezmienniczym izolowanym dla G i $C(S, F) = C(\varphi(S), G)$.*

Założenie, że φ jest różnowartościowe, jest istotne. Mianowicie, inaczej niż w przypadku jednowartościowym, obraz zbioru niezmienniczego izolowanego S przez nieróżnowartościowe φ nie musi być zbiorem niezmienniczym izolowanym [H2, Example 7.2]. Nawet jeśli obraz $\varphi(S)$ jest zbiorem niezmienniczym izolowanym, jego indeks Conleya może różnić się od indeksu Conleya S [H2, Example 7.3]. Natomiast, jeśli zbiór niezmienniczy izolowany S jest silnie izolowany, to własność przemienności jest prawdziwa dla dowolnego ciągłego φ, niekoniecznie różnowartościowego [H2, Theorem 7.5]

Twierdzenie 13 [H2, Theorem 7.1] możemy zastosować do obcięcia danego dyskretnego wielowartościowego układu dynamicznego do podprzestrzeni niezmienniczej.

Theorem 14. [H2, Theorem 7.4] *Niech $A \subset X$ będzie lokalnie zwartym podzbiorem X, takim że $F(X) \subset A$. Jeśli S jest zbiorem niezmienniczym izolowanym względem F, to S jest zbiorem niezmienniczym izolowanym względem $F_{|A}$ i $C(S, F) = C(S, F_{|A})$.*

4.2.4. **Praca** [H5]**: Równanie Morse'a.**

4.2.4.1. *Rozkłady Morse'a i pary repeler–atraktor.* Dla rozwiązania $\sigma : \mathbb{Z} \to X$ górnie półciągłego odwzorowania $F : X \multimap X$ definiujemy jego *zbiory α– i ω–graniczne*, odpowiednio jako

$$\alpha(\sigma) := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{cl}\, \sigma((-\infty, k]), \qquad \omega(\sigma) := \bigcap_{k \in\ ZZ} \mathrm{cl}\, \sigma([k, +\infty)).$$

Zauważmy, że inaczej niż w przypadku jednowartościowym, definiujemy zbiory α– i ω–graniczne dla rozwiązania σ przez $x \in X$, a nie dla x, z powodu niejednoznaczności rozwiązań w przód i w tył.

Definition 15. [H3, Definition 3.9] Niech S będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym dla $F : X \multimap X$. Mówimy, że rodzina $\mathcal{M} := \{M_r \mid r \in \mathbb{P}\}$ indeksowana przez zbiór częściowo uporządkowany $(\mathbb{P}, \leqslant)$ jest *rozkładem Morse'a zbioru* S, jeśli spełnione są następujące warunki:

(1) elementy $\mathcal{M}$ są parami rozłącznymi podzbiorami niezmienniczymi izolowanymi zbioru S,
(2) dla każdego pełnego rozwiązania σ w X istnieją $r, r' \in \mathbb{P}$, $r \leqslant r'$, takie że $\alpha(\sigma) \subset M_{r'}$ i $\omega(\sigma) \subset M_r$,
(3) jeśli dla pełnego rozwiązania σ w X i $r \in \mathbb{P}$ mamy $\alpha(\sigma) \cup \omega(\sigma) \subset M_r$, to $\operatorname{im} \sigma \subset M_r$.

Porządek częściowy $\leqslant$ w $\mathbb{P}$ nazywamy porządkiem *dopuszczalnym* rozkładu Morse'a $\mathcal{M}$. Należy zauważyć, że nie jest on wyznaczony jednoznacznie. Ponadto istnieje „ekstremalny" dopuszczalny porządek $\leqslant_F$, dany przez $p \leqslant_F q$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg różnych elementów $p = r_0, r_1, \ldots, r_k = q$ w $\mathbb{P}$, taki że dla dowolnego $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ istnieje rozwiązanie σ dla F z $\alpha(\sigma) \subset M_{r_j}$ i $\omega(\sigma) \subset M_{r_{j-1}}$. Porządek $\leqslant_F$ jest ekstremalny w tym sensie, że każde dopuszczalne uporządkowanie $\mathcal{M}$ jest rozszerzeniem $\leqslant_F$. Można zauważyć, że dla każdego dopuszczalnego porządku $\leqslant$ istnieje jego liniowe rozszerzenie, które również jest dopuszczalne. W takim przypadku, czyli gdy dopuszczalny porządek jest liniowy, dla uproszczenia piszemy $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$.

Definition 16. [H5, Definition 3.3] Mówimy, że otoczenie izolujące T dla F jest *obszarem pułapkowym*, jeśli $F(T) \subset T$. Podzbiór A zbioru niezmienniczego izolowanego S jest nazywany *atraktorem* (w S), jeśli dopuszcza obszar pułapkowy T, który izoluje A (względem S). Mając atraktor A w S, zbiór $A^* := \{x \in S \mid \text{istnieje rozwiązanie } \sigma : \mathbb{Z} \to S \text{ przez } x, \text{ takie że } \omega(\sigma) \cap A = \emptyset\}$ będzie nazywany *repelerem* dualnym do A, a para (A^*, A) będzie nazywana *parą repeler–atraktor* w S.

[H5, Example 3.2] jest wiodącym przykładem w [H5]. Dla funkcji wielowartościowej $F : [0, 1] \multimap [0, 1]$ z [H5, Figure 1] znajdujemy zbiór niezmienniczy izolowany S, jego rozkład Morse'a $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, M_3\}$, wstępujący ciąg atraktorów $\emptyset = A_1 \subset A_2 \subset A_3 = S$ i związany z nim ciąg dualnych repelerów $S = A_0^* \supset A_1^* \supset A_2^* \supset A_3^* = \emptyset$. Zauważmy, że obiekty te spełniają warunki przyszłych twierdzeń: twierdzenia 17 [H5, Theorem 3.9], stwierdzenia 18 [H5, Proposition 3.10] i twierdzenia 19 [H5, Theorem 3.11]. W [H5, Section 3] prezentujemy szereg lematów oraz następujące trzy twierdzenia.

Theorem 17. [H5, Theorem 3.9] *Niech* $\mathcal{M} := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ *będzie rozkładem Morse'a zbioru izolowanego niezmienniczego* S *względem górnie półciągłego odwzorowania* $F : X \multimap X$*. Wtedy istnieje wstępująca rodzina atraktorów* $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = S$ *w* S*, taka że* $M_j = A_j \cap A_{j-1}^*$*, dla* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, gdzie* A_j^* *jest repelerem dualnym do* A_j*.*

Proposition 18. [H5, Proposition 3.10] *Niech* $\mathcal{M} := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ *będzie rozkładem Morse'a zbioru niezmienniczego izolowanego* S *względem górnie półciągłego odwzorowania* $F : X \multimap X$ *i niech* $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = S$ *będzie ciągiem atraktorów. Wtedy* (M_j, A_{j-1}) *jest parą repeler-atraktor w* A_j*, dla* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Następujące twierdzenie może być traktowane jako przeciwne do twierdzenia 17 [H5, Theorem 3.9].

Theorem 19. [H5, Theorem 3.11] *Niech* S *będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym względem górnie półciągłego odwzorowania* $F : X \multimap X$ *i niech* $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = S$ *będzie ciągiem atraktorów w* S*. Wówczas* $\mathcal{M} := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$*, gdzie* $M_j = A_j \cap A_{j-1}^*$ *i* A_j^* *jest repelerem dualnym do* A_j*, dla* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$*, jest rozkładem Morse'a zbioru* S*. Co więcej,* $A_k = \{x \in S \mid \exists \sigma : \mathbb{Z} \to S \text{ rozwiązanie przez } x, \text{ takie że } \alpha(\sigma) \subset M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k\}$*,* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Powyższe wyniki wyglądają podobnie jak ich jednowartościowe odpowiedniki, jednak dowody są inne. Nie możemy powtarzać tych samych rozumowań, głównie dlatego że w dynamice wielowartościowej istnieje wiele rozwiązań w przód.

4.2.4.2. *Trójki indeksowe.* W całym paragrafie zakładamy, że X jest lokalnie zwartą przestrzenią metryczną, a $F : X \multimap X$ jest górnie półciągłą funkcją wielowartościową określoną przez morfizm.

Definiujemy ogólniejszą wersję słabej pary indeksowej, którą nazywamy F–parą.

Definition 20. [H5, Definition 4.3] Powiemy, że para $R = (R_1, R_2)$ zbiorów zwartych w X jest *F–parą*, jeśli istnieje zbiór zwarty M taki, że $R_2 \subset R_1 \subset M$ i

(Fp1) R_1, R_2 są dodatnio niezmiennicze względem F w M,
(Fp2) $\mathrm{cl}(R_1 \setminus R_2)$ jest otoczeniem izolującym,
(Fp3) $R_1 \setminus R_2 \subset \operatorname{int} M$.

Stosując podobne rozumowanie jak dla słabej pary indeksowej, możemy zdefiniować *odwzorowanie indeksowe* powiązane z F–parą R, tzn. endomorfizm $I_R := F_R^* \circ (i_R^*)^{-1}$ na $H^*(R)$ [H5, Lemma 4.4]. Związek między słabą parą indeksową a F–parą przedstawia następujące stwierdzenie.

Proposition 21. [H5, Proposition 4.5] *Niech R będzie F–parą z $R_1 \setminus R_2 \subset \operatorname{int} M$ i niech $S := \mathrm{Inv}(\mathrm{cl}(R_1 \setminus R_2), F)$. Jeśli $N \subset M$ jest otoczeniem izolującym S takim, że $R_1 \setminus R_2 \subset \operatorname{int} N$, to*

(i) *$P := R \cap N$ jest słabą parą indeksową dla F w N,*
(ii) *inkluzja $i_{PR} : P \to R$ indukuje izomorfizm w kohomologiach Alexandera-Spaniera,*
(iii) *odwzorowania indeksowe I_{F_P} i I_R są sprzężone.*

W konsekwencji $C(S, F) = L(H^*(R), I_R)$.

Następne twierdzenie jest głównym wynikiem w tym paragrafie.

Theorem 22. [H5, Theorem 4.7] *Niech S będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym względem F i niech N będzie jego otoczeniem izolującym. Załóżmy, że (A^*, A) jest parą repeler-atraktor w S. Wtedy istnieje trójka (P_0, P_1, P_2) zwartych podzbiorów $P_2 \subset P_1 \subset P_0$ zbioru N, taka że*

(i) *(P_0, P_2) jest słabą parą indeksową dla F i $C(S, F) = L(H^*(P_0, P_2), I_{(P_0,P_2)})$,*
(ii) *(P_1, P_2) jest F–parą i $C(A, F) = L(H^*(P_1, P_2), I_{(P_1,P_2)})$,*
(iii) *(P_0, P_1) jest F–parą i $C(A^*, F) = L(H^*(P_0, P_1), I_{(P_0,P_1))})$.*

[H5, Example 4.8] przedstawia przykład słabej trójki indeksowej dla wiodącego przykładu pracy.

4.2.4.3. *Równanie Morse'a.* Istnienie słabych trójek indeksowych gwarantowanych przez twierdzenie 22 [H5, Theorem 4.7] prowadzi do następującego stwierdzenia.

Proposition 23. [H5, Proposition 5.1] *Załóżmy, że (A^*, A) jest parą repeler-atraktor w zbiorze niezmienniczym izolowanym S względem górnie półciągłego odwzorowania $F : X \multimap X$. Wówczas*

$$p(t, A^*) + p(t, A) = p(t, S) + (1 + t)Q(t), \tag{4}$$

dla pewnego szeregu potęgowego Q z nieujemnymi współczynnikami całkowitymi.

Jesteśmy gotowi, by przedstawić główny wynik pracy.

Theorem 24. [H5, Theorem 5.2] *Niech $\mathcal{M} := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ będzie rozkładem Morse'a zbioru niezmienniczego izolowanego S względem górnie półciągłego $F : X \multimap X$. Wówczas*

$$\sum_{i=1}^{n} p(t, M_i) = p(t, S) + (1 + t)Q(t), \tag{5}$$

gdzie Q jest formalnym szeregiem potęgowym o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Ponadto

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t),$$

gdzie

$$(1 + t)Q_i(t) = p(t, M_i) + p(t, A_{i-1}) - p(t, A_i). \tag{6}$$

Jeśli $Q_i \neq 0$, to istnieje rozwiązanie $\sigma : \mathbb{Z} \to S$ z $\alpha(\sigma) \subset M_i$ i $\omega(\sigma) \subset M_j$, dla pewnego $j < i$.

Dla jego dowodu wykorzystujemy przytoczone wyniki. Na podstawie twierdzenia 17 [H5, Theorem 3.9] i stwierdzenia 18 [H5, Proposition 3.10] możemy rozważyć skojarzony ciąg atraktorów, taki że (M_i, A_{i-1}) jest parą repeler–atraktor w A_i. Następnie, stosując stwierdzenie 23 [H5, Proposition 5.1] do każdej takiej pary, otrzymujemy formalny szereg potęgowy Q_i z nieujemnymi współczynnikami całkowitymi, spełniający równość (4). Wykorzystując wszystkie te równości dostajemy pierwszą tezę. Dla dowodu drugiej tezy kluczowe jest użycie własności addytywności indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych (twierdzenie 10 [H2, Theorem 5.3]).

W [H5, Example 5.3] przedstawiamy równanie Morse'a dla przewodniego przykładu pracy.

Równanie Morse'a (twierdzenie 24 [H5, Theorem 5.2]) uogólnia klasyczne nierówności Morse'a [H5, Corollary 5.4].

4.2.5. **Praca** [H4]**: Zastosowanie indeksu Conleya w dynamice próbkowanej.** W pracy [H4] skupiamy się na teoretycznych wynikach potrzebnych dla rozwijanej metody badania dynamiki próbkowanej. [H4, Theorems 1.2 – 1.4] mają na celu jedynie jej zilustrowanie. Aby jednak przedstawić nasze cele, wygodnie jest zacząć od przedstawienia jednego z nich.

Theorem 25. [H4, Theorem 1.2] *Rozważmy szereg czasowy* $\bar{x} = (x_i)_{i=100}^{20689}$ *wygenerowany przez iterowanie odwzorowania Hénona*

$$H : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (1 - ax^2 + by, x) \in \mathbb{R}^2,$$

z parametrami $a = 1,65$*,* $b = 0,1$ *i warunkiem początkowym* $(x_0, y_0) = (0, 0)$*. Niech*

$$A_{\bar{x}} := \{ (x_i, x_{i+1}) \mid i = 100, \ldots, 20688 \}$$

i niech $g_{\bar{x}} \colon A_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^2$ *będzie dane przez* $g_{\bar{x}}(x_i, x_{i+1}) = (x_{i+1}, x_{i+2})$*. Ustalmy siatkę w* $\mathbb{R}^2$ *o rozmiarze* $\delta := 0,008127$ *i niech* $F := F^s_{g_{\bar{x}},\delta} \colon K_\delta(A_{\bar{x}}) \multimap \mathbb{R}^2$ *będzie otoczką słonecznikową* $g_{\bar{x}}$*. Niech* $\varepsilon = \delta/2$*.*

Wówczas $a_\varepsilon(F) \neq \emptyset$*. Ponadto istnieje zbiór zwarty* $N \subset \mathbb{R}^2$ *(por.* [H4, Rysunek 1.2]*), taki że dla dowolnego* $f \in a_\varepsilon(F)$*,*

(i) *N jest otoczeniem izolującym względem f,*

(ii) *istnieje semisprzężenie* $\theta_f : \operatorname{Inv}(N, f) \to \Sigma_A$ *z dynamiką subhiftu na sześciu symbolach z macierzą przejść*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

takie że dla każdego okresowego $a \in \Sigma_A$ *istnieje punkt okresowy względem* f *w* $\theta_f^{-1}(a)$*.*

W szczególności f ma dodatnią entropię topologiczną na $\operatorname{Inv}(N, f)$*.*

Należy przypomnieć, że otoczka słonecznikowa jest pewną specyficzną funkcją kostkową, będącą otoczką danej funkcji [H4, page 669].

Pozostałe zastosowania naszej metody przedstawiają [H4, Theorem 1.3] i [H4, Theorem 1.4]. Mają podobną strukturę i dotyczą odpowiednio dynamiki chaotycznej dla odwzorowania Hénona w przestrzeni trójwymiarowej i istnienia 2-okresowej orbity dla odwzorowania Hénona na płaszczyźnie.

4.2.5.1. *ε-Aproksymacje.* [H4, Section 3] zawiera wyniki dotyczące otoczeń izolujących w kontekście górnie półciągłych odwzorowań wielowartościowych. [H4, Section 4] wykorzystuje wyniki [H4, Section 3] do określenia warunków, przy których funkcje ciągłe z wykresami leżącymi w sąsiedztwie wykresu górnie półciągłego odwzorowania wielowartościowego F o wypukłych i zwartych wartościach, dzielą z nim otoczenia izolujące i odpowiadające im indeksy Conleya.

Theorem 26. [H4, Theorem 4.1] *Niech Y będzie przestrzenią unormowaną i niech $X \subset Y$ będzie zwarty. Załóżmy, że $F : X \multimap X$ jest odwzorowaniem górnie półciągłym o wartościach wypukłych i zwartych, a N jest otoczeniem izolującym względem F. Wówczas:*

(i) *istnieje* $\varepsilon_0 > 0$*, takie że dla każdego* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *istnieje* $f \in a_\varepsilon(F)$*, taka że* N *jest otoczeniem izolującym względem* f *oraz* $C(\mathrm{Inv}(N,F),F) = C(\mathrm{Inv}(N,f),f)$*;*
(ii) *jeśli* X *jest ANRem, to istnieje* $\varepsilon > 0$*, takie że dla dowolnej funkcji* $g \in a_\varepsilon(F)$ *mamy* $C(\mathrm{Inv}(N,F),F) = C(\mathrm{Inv}(N,g),g)$*.*

Dla jego dowodu kluczowa jest właściwość homotopii indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych (twierdzenie 11 [H2, Theorem 6.1]).

Wyniki tej postaci są istotne, ponieważ obliczenia otoczeń izolujących i indeksów Conleya w [H4, Theorems 1.2, 1.3, 1.4] są wykonywane przy użyciu otoczki słonecznikowej F, a jesteśmy zainteresowani dynamiką generowaną przez funkcje ciągłe należące do $a_\varepsilon(F)$. Istotne również jest to, że [H4, Theorems 1.2, 1.3, 1.4] precyzyjnie określają zbiór funkcji, tzn. $a_\varepsilon(F)$ z $\varepsilon = \delta/2$, a δ to rozmiar kostki.

[H4, Section 5] dostarcza informacji o dziedziczeniu właściwości topologicznych i dynamicznych przez funkcje ciągłe leżące w pobliżu funkcji kostkowej F. Następujące twierdzenie jest odpowiednikiem twierdzenia 26 [H4, Theorem 4.1] dla funkcji kostkowych.

Theorem 27. [H4, Theorem 5.10] *Załóżmy, że* $F : X \multimap X$ *jest górnie półciągłym odwzorowaniem kostkowym o wartościach ściągalnych do punktu i* $\varepsilon < \frac{1}{2}\delta$*. Wówczas* $a_\varepsilon(F) \neq \emptyset$*. Ponadto, jeżeli* N *jest kostkowym otoczeniem izolującym dla* F*, to* N *jest otoczeniem izolującym dla dowolnego* $f \in a_\varepsilon(F)$ *oraz* $C(\mathrm{Inv}(N,f),f) = C(\mathrm{Inv}(N,F),F)$*.*

Szczegóły dotyczące słabych par indeksowych i odwzorowań indeksowych są następujące.

Theorem 28. [H4, Theorem 5.13] *Niech* $F\colon X \multimap X$ *będzie odwzorowaniem wielowartościowym kostkowym górnie półciągłym o wartościach ściągalnych do punktu. Załóżmy, że* $N \subset X$ *jest kostkowym otoczeniem izolującym dla* F*,* P *jest kostkową słabą parą indeksową w* N *i* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\delta$*. Wówczas* $a_\varepsilon(F) \neq \emptyset$ *oraz dla każdej* ε*-aproksymacji* F*,* N *jest otoczeniem izolującym, a* $R := \bar{B}_\varepsilon(P) \cap N$ *jest słabą parą indeksową. Ponadto odwzorowania indeksowe* I_{F_P} *i* I_{f_R} *są sprzężone.*

4.2.5.2. *Semisprzężenia z dynamiką shiftu.* Tezy [H4, Theorems 1.2 and 1.3] mówią o istnieniu semisprzężenia z dynamiką shiftu. Jak wspomnieliśmy, uzyskujemy to za pomocą indeksu Conleya. Ponieważ używamy odwzorowań wielowartościowych górnie półciągłych, które nie muszą mieć ciągłych selektorów, musimy pracować ze słabymi parami indeksowymi. Klasyczny wynik Szymczaka [99, 100], który dowodzi istnienia semisprzężenia z dynamiką symboliczną, opiera się na silniejszej definicji pary indeksowej, dlatego nie możemy go zastosować bezpośrednio. [H4, Section 9] przedstawia twierdzenia będące rozwinięciem wyników Szymczaka dla słabych par indeksowych.

Niech $\Sigma_n := \{\, s : \mathbb{Z} \to I_n \,\}$ będzie przestrzenią dwustronnie nieskończonych ciągów o wyrazach z I_n, z topologią produktową. Dla macierzy $A \in \{0,1\}^{I_n \times I_n}$, niech Σ_A oznacza podprzestrzeń ciągów A-dopuszczalnych. Łatwo zauważyć, że *odwzorowanie shiftu* $\sigma : \Sigma_n \to \Sigma_n$, dane przez $\sigma(s)_i := s_{i+1}$, jest homeomorfizmem i $\sigma(\Sigma_A) \subset \Sigma_A$. Dlatego σ jest generatorem układu dynamicznego na Σ_A.

Theorem 29. [H4, Theorem 9.1] *Załóżmy, że* N *jest otoczeniem izolującym względem* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$*, a* P *jest słabą parą indeksową dla* f *w* N*. Ponadto załóżmy, że* $N = \bigcup_{i=1}^n N_i$*, gdzie* N_i *są parami rozłącznymi, zwartymi podzbiormi* N*, a odwzorowanie indeksowe* $I_{f_P} : H^*(P) \to H^*(P)$ *jest zupełne w sensie Lefschetza (por.* [H4, Section 9]*) względem rozkładu* $N = \bigcup_{i=1}^n N_i$*. Wtedy istnieje semisprzężenie* ρ *funkcji* f *na podzbiorze* $S := \mathrm{Inv}(\bigcup_{i=1}^n N_i, f)$ *z dynamiką shiftu* σ *na* Σ_A*, gdzie* A *jest macierzą przejść* I_{f_P}*. Ponadto dla każdego okresowego* $s \in \Sigma_A$ *istnieje punkt okresowy dla* f *w* $\rho^{-1}(s)$*.*

[H4, Sections 6–8] stanowią przygotowanie niezbędne dla wyników zawartych w [H4, Section 9]. Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią metryzowalną i niech $f : X \to X$ będzie dyskretnym układem dynamicznym. Załóżmy, że N, N_i i P są takie jak w twierdzeniu 29. Oznaczmy $P^i := P \cap N_i$. Niech $p \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma := (\sigma_0, \ldots, \sigma_{p-1}) \in I_n^{\mathbb{Z}_p}$. Rozważmy endomorpfizm $I_\sigma : \bigtimes_{i=0}^{p-1} H^*(P^{\sigma_i}) \to \bigtimes_{i=0}^{p-1} H^*(P^{\sigma_i})$ dany przez $I_\sigma := \times_{i=0}^{p-1} \left(\pi_{\sigma_i} \circ I_{f_P} \circ \iota_{\sigma_{i+1}}\right)$, gdzie $\pi_i : H^*(P) \to H^*(P^i)$ są rzutowaniami, a $\iota_i : H^*(P^i) \to H^*(P)$ inkluzjami. Definiujemy przestrzeń $\bar{X} := X \times \mathbb{Z}_p$, z topologią produktową i układ dynamiczny $\bar{f} : \bar{X} \to \bar{X}$ wzorem $\bar{f} : \bar{X} \ni (x,i) \longmapsto (f(x), i+1) \in \bar{X}$. Dla $\sigma \in I_n^{\mathbb{Z}_p}$ położmy

$N_\sigma := \bigcup_{i=0}^{p-1}(N_{\sigma_i} \times \{i\})$. Okazuje się, że używając endomorfizmu I_σ, z odwzorowania indeksowego dla f jesteśmy w stanie wydobyć informację, która jest wystarczająca, by dowieść istnienia orbity dla f przychodzącej przez składowe N w zadanym porządku.

Theorem 30. [H4, Theorem 7.5] *Załóżmy, że $N = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$, gdzie N_i są parami rozłącznymi i zwartymi podzbiorami N, N jest otoczeniem izolującym względem f, a P jest słabą parą indeksową dla f w N. Niech $p \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma := (\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}) \in I_n^{\mathbb{Z}_p}$. Jeśli endomorpfizm I_σ nie jest nilpotentny, to istnieje trajektoria $\tau : \mathbb{Z} \to \operatorname{Inv}(\bigcup_{i=0}^{p-1} N_{\sigma_i}, f)$ względem f, taka że $\tau(i + kp) \in N_{\sigma_i}$ dka $i \in I_p$, $k \in \mathbb{Z}$.*

[H4, Theorem 7.6] jest odpowiednikiem twierdzenia 30 [H4, Theorem 7.5] dla złożenia endomorfizmów $g_i := I_{f_P} \circ \iota_i \circ \pi_i$ na $H^*(P)$.

Naszym głównym narzędziem do znajdowania orbit okresowych jest następujące twierdzenie (por. również [H4, Theorem 8.6]).

Theorem 31. [H4, Theorem 8.5] *Niech $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ będzie dyskeretnym układem dynamicznym. Załóżmy, że $N = \bigcup_{i=1}^{n} N_i$, gdzie N_i są parami rozłącznymi i zwartymi podzbiorami N, N jest otoczeniem izolującym względem f, a P jest słabą parą indeksową dla f w N. Niech $p \in \mathbb{N}$ i niech $\sigma := (\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}) \in I_n^{\mathbb{Z}_p}$. Jeśli*

$$\Lambda(I_\sigma^p) \neq 0, \tag{7}$$

to istnieje punkt p-okresowy $x \in N_{\sigma_0}$ dla f, taki że $f^{i+kp}(x) \in N_{\sigma_i}$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

W dowodzie wykorzystujemy układ dynamiczny $\bar{f}$ i stosujemy twierdzenie Srzednickiego o punkcie stałym typu Lefschetza [94, Theorem 9]. To wymaga szeregu wyników pomocniczych: skonstruowania słabych par indeksowych będących ANRami [H4, Proposition 8.4], co uzyskujemy wykorzystując [99, Lemma 5.1]; pokazania, że stała Lefschetza odwzorowania indeksowego jest niezależna od wyboru słabej pary indeksowej [H4, Proposition 8.1]; oraz pokazania, że stała Lefschetza odwzorowania indeksowego $p$tej iteraty $\bar{f}$ pokrywa się ze stałą Lefschetza $p$tej iteraty endomorfizmu I_σ [H4, Proposition 8.2].

4.2.5.3. *Dowody głównych twierdzeń.* [H4, Section 10] zawiera dowody [H4, Theorems 1.2–1.4]. Pokazują one jak działa nasza metoda, dlatego krótko omówimy dowód twierdzenia 25 [H4, Theorems 1.2]. Jest jasne, że F jest odwzorowaniem kostkowym. Górna półciągłość F wynika z [41, Proposition 14.5]. Używając redukcji elementarnych [49] sprawdzamy, że F ma wartości ściągalne do punktu. Używając algorytmów z [100], formuły z twierdzenia 8 [H2, Theorem 4.4] i technik jak w [82], znajdujemy kostkowy blok izolujący N dla F składający się z pięciu parami rozłącznych składowych zwartych $N_1, \dots, N_5$, kostkową słabą parę indeksową P w N i odwzorowanie indeksowe I_{F_P} [H4, Figure 1]. Bezpośrednie obliczenia pokazują, że $H^1(P_1, P_2) \cong \mathbb{Z}^5$ i $H^q(P_1, P_2) = 0$ dla $q \neq 1$. Dokładniej, niech $\xi^1, \dots, \xi^5$ będą generatorami grup kohomologii $H^1(P)$ takie, że $H^1(P_1^i, P_2^i) = \langle \xi^i \rangle$, gdzie $P^i := P \cap N_i$, $i = 1, \dots, 5$. Z generatorami $\xi^1, \dots, \xi^5$ jako bazą, obliczenia z algorytmami [60] dają macierz A odwzorowania indeksowego. Na podstawie twierdzenia 28 [H4, Theorem 5.13] istnieje $f \in a_\varepsilon(F)$ oraz każda $f \in a_\varepsilon(F)$ dzieli z F otoczenie izolujące i odwzorowanie indeksowe, z dokładnością do sprzężenia. Własność (ii) jest natychmiastową konsekwencją twierdzenia 31 [H4, Theorem 8.5] (lub [H4, Theorem 8.6]), jeśli macierz przejść A jest nieredukowalna [49, Definition 10.22, Proposition 10.25] i dla dowolnego A-dopuszczalnego ciągu okresowego σ zachodzi warunek (7) (lub [H4, (37)]). Weryfikujemy to wykonując obliczenia algorytmiczne, które opisane są w [81].

W końcu używając macierzy A pokazujemy, że entropia topologiczna f jest większa niż $\ln 1.2599$.

4.2.6. **Praca** [H3]**: Związki między dynamiką kombinatoryczną a klasyczną: indeks Conleya i rozkłady Morse'a.**

4.2.6.1. *Główny wynik.* Niech $\mathcal{X}$ oznacza rodzinę sympleksów skończonego abstrakcyjnego kompleksu symplicjalnego. Relacja bycia ścianą na $\mathcal{X}$ definiuje na $\mathcal{X}$ topologię T_0 Alexandrova [1]. Podzbiór $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ jest *otwarty* w tej topologii, gdy wszystkie kościany dowolnego elementu $\mathcal{A}$ są również w $\mathcal{A}$. Domknięcie $\mathcal{A}$, oznaczone jako $\operatorname{Cl} \mathcal{A}$, jest rodziną wszystkich ścian wszystkich sympleksów w $\mathcal{A}$

[H3, Section 3.1]. *Kombinatoryczne pole wektorowe* $\mathcal{V}$ na $\mathcal{X}$ jest podziałem $\mathcal{X}$ na niepuste podzbiory liczności co najwyżej dwa, takie że każdy podzbiór o liczności dwa (dubleton) składa się z sympleksu σ i kościany σ o kowymiarze jeden. Sympleks należący do singletona w $\mathcal{V}$ jest nazywany *komórką krytyczną*. Dubleton w $\mathcal{V}$, uporządkowany w parę z niżej wymiarowym sympleksem na pierwszym miejscu, jest określany jako *wektor*. W dalszej części, aby uprościć język, identyfikujemy singleton z komórką krytyczną, którą zawiera i dubleton z powiązanym wektorem [H3, Figure 1].

Z kombinatorycznym polem wektorowym $\mathcal{V}$ wiążemy dynamikę wielowartościową daną jako iteracje odwzorowania wielowartościowego $\Pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{X} \multimap \mathcal{X}$, zwanego *kombinatorycznym przepływem wielowartościowym*, posyłającego każdy krytyczny sympleks we wszystkie jego ściany, każdy początek wektora w jego koniec i każdy koniec wektora we wszystkie ściany końca inne niż jego początek i koniec. Odwzorowanie wielowartościowe $\Pi_{\mathcal{V}}$ można traktować jako graf skierowany $G_{\mathcal{V}}$, z wierzchołkami w $\mathcal{X}$ i strzałką od sympleksu σ do sympleksu τ, ilekroć $\tau \in \Pi_{\mathcal{V}}(\sigma)$. Graf skierowany $G_{\mathcal{V}}$ dla kombinatorycznego pola wektorowego [H3, Figure 1] przedstawia [H3, Figure 2].

Podzbiór $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ jest *niezmienniczy* względem $\mathcal{V}$, jeśli każdy element zbioru $\mathcal{A}$ jest zarówno początkiem, jak i końcem strzałki w $G_{\mathcal{V}}$, która łączy wierzchołki w $\mathcal{A}$. Element $\sigma \in \operatorname{Cl} \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}$ jest *stycznością wewnętrzną* $\mathcal{A}$, jeśli dopuszcza obie strzałki: rozpoczynającą się w σ, a kończącą w $\mathcal{A}$ i strzałkę zakończoną w σ z początkiem w $\mathcal{A}$. Zbioru $\operatorname{Ex} \mathcal{A} := \operatorname{Cl} \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}$ nazywamy *zbiorem wyjścia* zbioru $\mathcal{A}$ [52, Definition 3.4] lub *mouth* $\mathcal{A}$ [75, Section 4.4]. Zbiór niezmienniczy $\mathcal{S}$ jest *zbiorem niezmienniczym izolowanym*, jeśli $\operatorname{Ex} \mathcal{S}$ jest domknięty i nie dopuszcza wewnętrznych styczności [H3, Definition 3.3]. Chociaż pojęcie wewnętrznej styczności może na pierwszy rzut oka wydawać się dziwne, motywowane jest klasyczną sytuacją, w której zbiory niezmiennicze izolowane są zawarte we wnętrzu bloków izolujących, które nie mogą mieć żadnych wewnętrznych styczności. W sytuacji kombinatorycznej nie ma wystarczająco dużo miejsca, by definicję tę przenieść dosłownie, ale cel tego pojęcia jest taki sam.

Zauważmy, że sam $\mathcal{X}$ jest izolowanym zbiorem niezmienniczym wtedy i tylko wtedy, gdy jest niezmienniczy. *(Ko)homologiczny indeks Conleya* zbioru niezmienniczego izolowanego $\mathcal{S}$ definiujemy jako singularne (ko)homologie relatywne pary $(\operatorname{Cl} \mathcal{S}, \operatorname{Ex} \mathcal{S})$ z topologią indukowaną z topologii Alexandrova w X. Zauważmy, że $(\operatorname{Cl} \mathcal{S}, \operatorname{Ex} \mathcal{S})$ to para podkompleksów symplicjalnych kompleksu symplicjalnego $\mathcal{X}$. Dlatego, zgodnie z twierdzeniem McCorda [58], (ko)homologie singularne pary $(\operatorname{Cl} \mathcal{S}, \operatorname{Ex} \mathcal{S})$ są izomorficzne z homologiami symplicjalnymi pary $(\operatorname{Cl} \mathcal{S}, \operatorname{Ex} \mathcal{S})$ (por. wiodący przykład pracy [H3, Figure 1, 2]).

Połączeniem od zbioru niezmienniczego izolowanego $\mathcal{S}_1$ do zbioru niezmienniczego izolowanego $\mathcal{S}_2$ jest ciąg wierzchołków na ścieżce $G_{\mathcal{V}}$ rozpoczynającej się w $\mathcal{S}_1$ i kończącej się w $\mathcal{S}_2$. Rodzina $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_p \mid p \in \mathbb{P}\}$, indeksowana przez poset $\mathbb{P}$ i składająca się z parami rozłącznych podzbiorów niezmienniczych izolowanych zbioru niezmienniczego izolowanego $\mathcal{S}$, jest *rozkładem Morse'a* zbioru $\mathcal{S}$, jeśli dowolne połączenie między elementami w $\mathcal{M}$, które nie jest zawarte w całości w żadnym z elementów $\mathcal{M}$, zaczyna się w $\mathcal{M}_{q'}$ i kończy w $\mathcal{M}_q$ dla $q' > q$ [H3, Definition 3.9]. Zbiory niezmiennicze izolowane w $\mathcal{M}$ nazywamy *zbiorami Morse'a*. Powiązany z rozkładem *graf Conleya-Morse'a* jest porządkiem częściowym indukowanym na $\mathcal{M}$ przez istnienie połączeń i reprezentowany jako graf skierowany etykietowany indeksami Conleya zbiorów niezmienniczych izolowanych w $\mathcal{M}$. Zazwyczaj etykiety są pisane jako wielomiany Poincaré, czyli wielomiany, których $i$ty współczynnik jest równy $i$tej liczbie Bettiego indeksu Conleya.

Głównym wynikiem pracy jest następujące twierdzenie.

Theorem 32. [H3, Theorem 2.1] *Dla każdego kombinatorycznego pola wektorowego $\mathcal{V}$ na kompleksie symplicjalnym $\mathcal{X}$ istnieje górnie półciągłe acykliczne odwzorowanie wielowartościowe $F : |\mathcal{X}| \multimap |\mathcal{X}|$ na geometrycznej realizacji $|\mathcal{X}|$ kompleksu $\mathcal{X}$, które indukuje identyczność w homologiach, i takie że*

(i) *dla dowolnego rozkładu Morse'a $\mathcal{M}$ pola $\mathcal{V}$ istnieje rozkład Morse'a M układu dynamicznego indukowanego przez F,*
(ii) *graf Conleya-Morse'a rozkładu M jest izomorficzny z grafem Conleya-Morse'a dla $\mathcal{M}$,*
(iii) *każdy element rozkładu M jet zawarty w geometrycznej reprezentacji odpowiadającego elementu rozkładu $\mathcal{M}$.*

Twierdzenie to jest konsekwencją bardziej szczegółowych twierdzeń w [H3, Section 5].

4.2.6.2. *Rozkład komórkowy.* Rozpoczynamy od zaprezentowania specjalnego kompleksu komórkowego dla $X = |\mathcal{X}|$, którego używamy podczas konstrukcji odwzorowania wielowartościowego F. Potrzebujemy kilku pojęć. Niech d oznacza maksymalny wymiar sympleksów w $\mathcal{X}$. Ustalmy $\lambda \in \mathbb{R}$, takie że $0 \leqslant \lambda < \frac{1}{d+1}$ oraz punkt $x \in X$. λ-*sygnatura* x jest funkcja

$$\operatorname{sign}^\lambda x : \mathcal{X}_0 \ni v \mapsto \operatorname{sgn}(t_v(x) - \lambda) \in \{-1, 0, 1\},$$

gdzie $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ to funkcja signum. Sympleks $\sigma \in \mathcal{X}$ jest *sympleksem* λ-*charakterystycznym* x, jeśli $\operatorname{sign}^\lambda x|_\sigma \geqslant 0$ i $(\operatorname{sign}^\lambda x)^{-1}(\{1\}) \subset \sigma$. Rodzinę takich sympleksów oznaczamy $\mathcal{X}^\lambda(x)$. Dla $\lambda \geqslant 0$ zbiór $(\operatorname{sign}^\lambda x)^{-1}(\{1\})$ jest sympleksem. Nazywamy go *minimalnym sympleksem* λ-*charakterystycznym* x i oznaczamy $\sigma^\lambda_{min}(x)$. Jeśli $\lambda > 0$, to zbiór $(\operatorname{sign}^\lambda x)^{-1}(\{0, 1\})$ też jest sympleksem, *maksymalnym sympleksem* λ-*charakterystycznym* x i oznaczamy $\sigma^\lambda_{max}(x)$. W konstrukcji odwzorowania wielowartościowego $F = F_\mathcal{V} : X \multimap X$ specjalną rolę odgrywają λ-*komórki generowane przez* σ

$$\langle\sigma\rangle_\lambda := \{x \in X \mid t_v(x) > \lambda \text{ dla wsystkich } v \in \sigma \text{ i } t_v(x) < \lambda \text{ dla wszystkich } v \notin \sigma\}.$$

λ-komórki są otwarte w $|\mathcal{X}|$, parami rozłączne [H3, Proposition 4.3] i $|\mathcal{X}| = \bigcup_{\sigma\in\mathcal{X}} \operatorname{cl}\langle\sigma\rangle_\lambda$. Komórki $\langle\sigma\rangle_\lambda$, dla różnych λ, przedstawia [H3, Figure 8].

4.2.6.3. *Odwzorowania F_σ i F.* Przypomnijmy za [52] konstrukcję silnie górnie półciągłego odwzorowania F związanego z kombinatorycznym polem wektorowym. Ustalmy

$$0 < \delta' < \delta < \gamma < \epsilon < \frac{1}{d+1}.$$

Dla $\sigma \in \mathcal{X}$ definiujemy zbiory domknięte

$$\begin{aligned} A_\sigma &:= \left\{x \in \sigma^+ \mid t_v(x) \geqslant \gamma \text{ dla wszystkich } v \in \sigma^-\right\} \cup \sigma^-, \\ B_\sigma &:= \left\{x \in \sigma^+ \mid \text{istnieje } v \in \sigma^-, \text{ takie że } t_v(x) \leqslant \gamma\right\}, \end{aligned}$$

odwzorowanie wielowartościowe $F_\sigma : X \multimap X$

$$F_\sigma(x) := \begin{cases} \emptyset & \text{, gdy } \sigma \notin \mathcal{X}^\epsilon(x), \\ A_\sigma & \text{, gdy } \sigma \in \mathcal{X}^\epsilon(x), \ \sigma \neq \sigma^\epsilon_{max}(x)^+, \text{ i } \sigma \neq \sigma^\epsilon_{max}(x)^-, \\ B_\sigma & \text{, gdy } \sigma = \sigma^\epsilon_{max}(x)^+ \neq \sigma^\epsilon_{max}(x)^-, \\ A_\sigma \cap B_\sigma & \text{, gdy } \sigma = \sigma^\epsilon_{max}(x)^- \neq \sigma^\epsilon_{max}(x)^+, \\ \sigma & \text{, gdy } \sigma = \sigma^\epsilon_{max}(x)^- = \sigma^\epsilon_{max}(x)^+ \end{cases}$$

oraz $F : X \multimap X$, wzorem

(8) $$F(x) := \bigcup_{\sigma\in\mathcal{X}} F_\sigma(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in X = |\mathcal{X}|.$$

Odwzorowanie F jest silnie górnie półciągłe i dla $x \in X$ zbiór $F(x)$ jest niepusty i ściągalny do punktu [52, Theorem 4.12]. [H3, Figure 7] przedstawia wykres tak skonstruowanego odwzorowania F dla pola wektorowego [H3, Figure 1].

4.2.6.4. *Odpowiedniość zbiorów niezmienniczych izolowanych.* Dla $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ i stałej β, takiej że $0 < \beta < \frac{1}{d+1}$, kładziemy

(9) $$N_\beta(\mathcal{A}) := \bigcup_{\sigma\in\mathcal{A}} \operatorname{cl}\langle\sigma\rangle_\beta.$$

Niech $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ będzie zbiorem niezmienniczym izolowanym kombinatorycznego pola wektorowego $\mathcal{V}$ w sensie [H3, Definition 3.3]. Z $\mathcal{S}$ możemy związać blok izolujący $N := N_\delta := N_\delta(\mathcal{S})$ względem F. Jest on otoczeniem izolującym dla F [52, Theorem 5.7], co pozwala nam związać z $\mathcal{S}$ zbiór niezmienniczy izolowany $S(\mathcal{S}) := \operatorname{Inv} N_\delta$, względem F. [H3, Figure 9] przedstawia blok izolujący dla F danego wzorem (8), odpowiadający kombinatorycznemu zbiorowi niezmienniczemu izolowanemu [H3, Figure 4].

4.2.6.5. *Indeks Conleya $S(\mathcal{S})$.* By porównać indeksy Conleya zbiorów $\mathcal{S}$ i $S(\mathcal{S})$ musimy skonstruować słabą parę indeksową dla F w N_δ.

Theorem 33. [H3, Theorem 5.2] *Para $P = (P_1, P_2)$, gdzie $P_1 := N_\delta \cap N_{\delta'}$ i $P_2 := N_{\delta'} \cap \operatorname{bd} N_\delta$, jest słabą parą indeksową dla F i otoczenia izolującego $N = N_\delta$.*

Dowód znajduje się w [H3, Section 6]. Słabą parę indeksową dla bloku izolującego [H3, Figure 9] przedstawia [H3, Figure 10].

Zauważmy, że F dana przez (8) zasadniczo nie dopuszcza par indeksowych. Dlatego teoria indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych, zaproponowana w [H1, H2], jest niezbędna dla [H3].

Przypomnijmy, że indeks Conleya zbioru $S(\mathcal{S})$ względem F dany jest przez $\operatorname{Con}(S(\mathcal{S}), F) := L(H^*(P), I_P)$, gdzie L jest redukcją Leray (ko)homologii relatywnych modułu z gradacją $H^*(P) = H^*(P_1, P_2)$ pary P, a I_P jest odwzorowaniem indeksowym na $H^*(P)$.

Theorem 34. [H3, Theorem 5.3] *Mamy*

$$\operatorname{Con}(S(\mathcal{S}), F) \cong (H^*(P), \operatorname{id}_{H^*(P)}),$$

gdzie $\operatorname{id}_{H^*(P)}$ jest odwzorowaniem identycznościowym. Innymi słowy, podobnie jak dla potoków, indeks Conleya $S(\mathcal{S})$ względem F możemy zdefiniować jako (ko)homologie relatywne $H^*(P)$.

Ponieważ redukcja Leray identyczności jest identycznością, wystarczy pokazać, że odwzorowanie indeksowe I_P jest identycznością. Osiągamy to konstruując górnie półciągłe odwzorowanie G o wartościach acyklicznych, którego wykres zawiera zarówno wykres F jak i wykres identyczności [H3, Section 7].

4.2.6.6. *Odpowiedniość indeksów Conleya.* Przypomnijmy, że indeks Conleya $\mathcal{S}$ względem $\Pi_\mathcal{V}$, to

$$\operatorname{Con}(\mathcal{S}) := H^*(\operatorname{Cl}\mathcal{S}, \operatorname{Ex}\mathcal{S})\ .$$

W [H3, Section 8] dowodzimy twierdzenia, które rozszerza odpowiedniość zbiorów izolowanych niezmienniczych $\mathcal{S}$ i $S(\mathcal{S})$ na indeksy Conleya.

Theorem 35. [H3, Theorem 5.4] *Mamy*

$$H^*(P_1, P_2) \cong H^*(\operatorname{Cl}\mathcal{S}, \operatorname{Ex}\mathcal{S})\ .$$

W konsekwencji

$$\operatorname{Con}(S(\mathcal{S})) \cong \operatorname{Con}(\mathcal{S})\ .$$

Dla jego dowodu konstruujemy pomocniczą parę (Q_1, Q_2) [H3, Figure 12] i pokazujemy, że $H^*(P_1, P_2) \cong H^*(Q_1, Q_2)$. Następnie konstruujemy ciągłą surjekcję $\psi : (Q_1, Q_2) \to (|\operatorname{Cl}\mathcal{S}|, |\operatorname{Ex}\mathcal{S}|)$ [H3, Figure 13] o włóknach ściągalnych do punktu i stosujemy twierdzenie Vietorisa-Begle'a [93, Chapter 6.9].

4.2.6.7. *Odpowiedniość rozkładów Morse'a.* Dla rozkładu Morse'a $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_r \mid r \in \mathbb{P}\}$ zbioru $\mathcal{X}$ względem potoku kombinatorycznego $\Pi_\mathcal{V}$ definiujemy zbiory

$$M_r := N_\epsilon^r \cap \langle \mathcal{M}_r \rangle,$$

gdzie $N_\epsilon^r := N_\epsilon(\mathcal{M}_r)$ jest dany przez (9), tzn. $N_\epsilon^r = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{M}_r} \operatorname{cl} \langle \sigma \rangle_\epsilon$.

Theorem 36. [H3, Theorem 5.5] *Rodzina $M := \{M_r \mid r \in \mathbb{P}\}$ jest rozkładem Morse'a X względem F. Ponadto dla każdego $r \in \mathbb{P}$ mamy*

$$\operatorname{Con}(\mathcal{M}_r) = C(M_r)$$

i grafy Conleya-Morse'a rozkładów Morse'a $\mathcal{M}$ i M pokrywają się.

Łatwo można zauważyć, że twierdzenie 32 [H3, Theorem 2.1], główny wynik pracy [H3], jest konsekwencją twierdzenia 35 [H3, Theorem 5.4] i twierdzenia 36 [H3, Theorem 5.5].

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

   (a) Wykaz innych (nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w pkt. 4.) opublikowanych prac naukowych.

[b1] B. Batko, Jacek Tabor. Stability of an alternative Cauchy equation on a restricted domain, *Aequationes Math.* **57** (1999), 221–232.

[b2] B. Batko, Jacek Tabor. Stability of the generalized alternative Cauchy equation, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.* **69** (1999), 67–73.

[b3] B. Batko. An alternative Cauchy equation almost everywhere, *Roczn. Nauk.-Dyd. AP w Krakowie* **204** (2000), Prace Matematyczne 17, 41–48.

[b4] B. Batko, Jacek Tabor, Z. Kominek. Generalized norms and convexity, *Publ. Math. Debrecen* **60** (2002), 63–73.

[b5] B. Batko. Stability of Dhombres' equation, *Bull. Austral. Math. Soc.* **70** (2004), 499–505.

[b6] B. Batko. On the stability of an alternative functional equation, *Math. Inequal. Appl.* **8** (4) (2005), 685-691.

[b7] B. Batko. On the stability of Mikusiński's equation, *Publ. Math. Debrecen* **66** (2005), 17–24.

[b8] B. Batko, M. Mrozek. The Euler-Poincaré characteristic of index maps, *Topol. Appl.* **154** (2007), 859–866.

[b9] B. Batko. On approximation of approximate solutions of Dhombres' equation, *J. Math. Anal. Appl.* **340** (2008), 424–432.

[b10] B. Batko. Stability of an alternative functional equation, *J. Math. Anal. Appl.* **339** (2008), 303–311.

[b11] M. Mrozek, B. Batko. Coreduction homology algorithm, *Discrete Comput. Geom.* **41/1** (2009), 96–118.

[b12] M. Mrozek, B. Batko. Homology of representable sets, *Ann. Pol. Mat.* **97.3** (2010), 243–252.

[b13] B. Batko. Note on superstability of Mikusiński's functional equation, *in: Functional Equations in Mathematical Analysis, Springer Optim. Appl.* **52** (2012), 15–17.

[b14] B. Batko. The stability of Dhombres' equation in Riesz spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **406** (2013), 261–265.

[b15] B. Batko, J. Brzdęk. A fixed point theorem and the Hyers-Ulam stability in Riesz spaces, *Adv. Differ. Equ.* **2013** (2013):138.

[b16] B. Batko. On approximate solutions of functional equations in vector lattices, *Abstr. Appl. Anal.* **2014** (2014), Art. ID. 547673.

[b17] B. Batko. Stability of the exponential functional equation in Riesz algebras, *Abstr. Appl. Anal.* **2014** (2014), Art. ID. 848540.

[b18] B. Batko, J. Brzdęk. A remark on some simultaneous functional inequalities in Riesz spaces, *in: Topics in Mathematical Analysis and Applications* **94** (2014), 111–117.

[b19] B. Batko Spectral representation theory and stability of the multiplicative Dhombres functional equation in f-algebras, *Aequationes Math.*, **89** (2015), 543–554.

[b20] B. Batko. Superstability of the Cauchy equation with squares in finite-dimensional normed algebras, *Aequationes Math.* **89** (2015), 785–789.

   (b) Omówienie dorobku naukowego nie wchodzącego w skład jednotematycznego cyklu publikacji:

Powyższa lista zawiera prace związane z moimi obecnymi zainteresowaniami naukowymi, które opisane są w paragrafach 4.5.7-4.5.8 oraz wcześniejsze prace dotyczące głównie rozwiązań przybliżonych równań funkcyjnych, które krótko opisane są w kolejnych paragrafach.

4.5.7. **Algorytm koredukcji obliczania homologii.** W pracach [b12, b11] prezentujemy nowy algorytm redukcji do obliczania homologii dla dużych kompleksów kostkowych lub symplicjalnych.

Algorytm bazuje na teorii homologii jednej przestrzeni (one space homology theory), która umożliwia dualny proces koredukcji. Złożoność algorytmu jest liniowa, zarówno względem rozmiaru, jak i wymiaru danych wejściowych. Wyniki eksperymentów oparte na implementacji dla zbiorów kostkowych pokazują, że algorytm pracuje znacznie lepiej od innych dostępnych algorytmów homologicznych, Oszacowania złożoności dotyczące przeskalowań ustalonego zbioru kostkowego pokazują, że algorytm jest lepszy od innych algorytmów homologicznych, szczególnie dla zbiorów o niskim wymiarze, niezależnie od wymiaru przestrzeni.

Klasyczny algorytm obliczania homologii bazuje na diagonalizacji Smitha macierzy homomorfizmu brzegu [79, Section 1.11]. Złożoność obliczeniowa najlepszego dostępnego algorytmu diagonalizacji Smitha wynosi $O(n^{3.376\dots})$ [97]. Liczni autorzy proponują różne warianty lub alternatywy dla tego klasycznego podejścia [38, 8, 32, 29, 103]. Niestety, wyniki nie są wystarczająco satysfakcjonujące do zastosowań w ścisłych obliczeniach numerycznych w układach dynamicznych i analizie obrazów metodami topologicznymi [49, 76]. Zastosowania takie wymagały nowych idei.

Jednakże obliczanie homologii jest zagadnieniem topologii obliczeniowej, a nie ogólnie algebry obliczeniowej, dlatego można mieć nadzieję, że owocne mogą być metody uwzględniające specyfikę problemu. Metody redukcji kompleksów łańcuchowych, zaproponowane w [51], a następnie rozwijane w [53, 49, 60], stanowią takie podejście.

W pracach [b11, b12] pokazujemy jak można wykorzystać koredukcje elementarne w obliczaniu homologii. Robimy to w oparciu o teorię homologii jednej przestrzeni, tzn. teorii homologii, która nie wymaga homologii relatywnych do budowania długiego ciągu dokładnego dla pary przestrzeni topologicznych [95, 57].

Ponieważ redukcja lub koredukcja elementarna zajmuje jedynie stały czas, złożoność algorytmu, który przechodząc przez wszystkie generatory wykonuje redukcje i/lub koredukcje, jeżeli są możliwe, jest liniowa. Dlatego złożoność algorytmu obliczania homologii, poprzedzonego redukcjami lub koredukcjami elementarnymi, zależy od rozmiaru pozostałego po preprocesingu. Eksperymenty numeryczne oraz częściowe wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej pokazują, że inaczej niż w przypadku redukcji elementarnych, koredukcje elementarne mogą być prowadzone bardzo głęboko, co skutkuje szybkim algorytmem obliczania homologii.

Pierwsze, czysto topologiczne podejście do kombinatorycznej idei koredukcji dla zbiorów kostkowych, bazujące na kryterium lokalnej zwartości dla zbiorów reprezentowalnych, zaprezentowane zostało w pracy [b12]. Podejście bardziej ogólne, dla regularnych podzbiorów S-compleksów oraz szczegóły dotyczące algorytmu i eksperymenty numeryczne, zawarte są w pracy [b11].

Zacznijmy od przypomnienia pojęcia S-kompleksu Niech S będzie zbiorem skończonym z gradacją S_q, i że $S_q = \emptyset$ dla $q < 0$. Wtedy ciąg $R(S_q)$ jest gradacją modułu $R(S)$ w kategorii modułów nad pierścieniem z jednością R. Jedyną liczbę q, taką że $s \in S_q$, nazywamy *wymiarem* s i oznaczamy $\dim s$. Z S powiązany jest *indeks koincydencji* $\kappa : S \times S \to R$, taki że $\dim s = \dim t + 1$, gdy $\kappa(s,t) \neq 0$. Indeks koincydencji koduje relację bycia ścianą w S. Jeśli $\kappa(s,t) \neq 0$, to mówimy że t jest *ścianą* s i s jest *kościaną* t. Mówimy, że (S,κ) jest S-kompleksem, jeśli $(R(S), \partial^\kappa)$ z $\partial^\kappa : R(S) \to R(S)$ zdefiniowanym na generatorach $s \in S$ przez

$$\partial^\kappa(s) := \sum_{t \in S} \kappa(s,t)t$$

jest wolnym kompleksem łańcuchowym z bazą S. Przez homologie S-kompleksu (S,κ) rozumiemy homologie kompleksu łańcuchowego $(R(S), \partial^\kappa)$. Dwoma najważniejszymi przykładami takich S-kompleksów są kompleksy symplicjalne i kompleksy kostkowe.

Dla $A \subset S$ kładziemy

$$\begin{aligned} \mathrm{bd}_S A &:= \{\, t \in S \mid \kappa(s,t) \neq 0 \text{ dla pewnego } s \in A \,\} \\ \mathrm{cbd}_S A &:= \{\, s \in S \mid \kappa(s,t) \neq 0 \text{ dla pewnego } t \in A \,\}. \end{aligned}$$

By uprościć dany S-kompleks, w kroku redukcyjnym chcemy zastąpić zbiór generatorów S przez podzbiór $S' \subset S$, który wraz z indeksem koincydencji $\kappa' := \kappa|_{S' \times S'}$ stanowi inny S-kompleks o tych samych homologiach i nie potrzeba obliczać κ, by skonstruować S'. W [b11] specyfikujemy te wymagania. Przypomnijmy, że $S' \subset S$ nazywamy *domkniętym* w S, gdy $\mathrm{bd}_S S' \subset S'$. $S' \subset S$ jest *otwarty* w S, jeżeli $S \setminus S'$ jest domknięty S. Jeśli $S' \subset S$ jest taki, że dla dowolnych $s, u \in S'$ i $t \in S$, $t \in \mathrm{bd}_S s$ i $u \in \mathrm{bd}_S t$ pociąga $t \in S'$, to S' nazywamy *regularnym* podzbiorem S. Podzbiór regularny $T \subset S$ nazywamy *zbiorem zerowym (nullset)* w S, pod warunkiem że T jest domknięty lub otwarty w S oraz $H(T) = 0$. Z [b11, Theorem 3.4, Theorem 3.5] wynika, że $H(R(S))$ i $H(R(S \setminus T))$ są izomorficzne, jeśli tylko T jest zbiorem zerowym w S [b11, Corollary 3.6]. Dlatego jeśli umiemy znaleźć zbiór zerowy w S, to możemy usunąć go nie zmieniając homologii S.

Podobnie jak w [51], mówimy że para (a, b) of elementów S jest parą redukcji, gdy $\kappa(b, a)$ jest odwracalne w R. Para redukcji (a, b) nazywana jest *parą redukcji elementarnej*, gdy $\mathrm{cbd}_S a = \{b\}$. W takim przypadku będziemy również mówili, że a jest *wolną ścianą* w S. Podobnie definiujemy *parę koredukcji elementarnej*, jako parę redukcji (a, b), taką że $\mathrm{bd}_S b = \{a\}$ i wtedy b nazywamy *wolną kościaną* w S. [b11, Theorem 4.1] mówi, że jeśli (a, b) jest parą redukcji elementarnej, to $\{a, b\}$ jest otwarty S; jeśli (a, b) jest parą koredukcji elementarnej, to $\{a, b\}$ jest domknięty w S. Ponadto, w obu przypadkach, $\{a, b\}$ jest zbiorem zerowym. Stąd wniosek, że $H(R(S))$ i $H(R(S \setminus \{a, b\}))$ są izomorficzne, pod warunkiem że (a, b) jest parą redukcji lub koredukcji elementarnej w S [b11, Corollary 4.2].

Algorytm koredukcji [b11, Algorithm 6.1] wykorzystuje te fakty. Wywołany z S-kompleksem S zwraca podzbiór S' zbioru S, taki że $H(S) \cong H(S')$ [b11, Theorem 6.2]. Algorytm wykonuje się w czasie $O(2M^2 n)$, jeśli S jest zaimplementowany jako tablica bitowa (bitmapa) i w czasie $O(2M^2 n \log n)$, gdy S jest zaimplementowany jako drzewo wyszukiwania binarnego (BST); M jest wspólnym górnym ograniczeniem mocy $\mathrm{bd}_S s$ i $\mathrm{cbd}_S s$, dla wszystkich $s \in S$, a n oznacza moc S. W szczególności w przypadku kompleksów kostkowych implementowanych jako bitmapa [b11, Algorithm 6.1] wykonuje się w czasie $O(2d^2 n)$, gdzie d oznacza wymiar przestrzeni zawierającej zbiór kostkowy [b11, Corollary 6.3].

W [b11, Section 7] prezentujemy eksperymenty numeryczne. Wykonaliśmy porównania algorytmu ze wszystkimi algorytmami dla homologii kostkowych dostępnymi na stronie internetowej Computational Homology Project [104]. Eksperymenty pokazują, że algorytm koredukcji zachowuje się znacznie lepiej od konkurencji, szczególnie dla zbiorów niskiego wymiaru w przestrzeni wysoko wymiarowej.

4.5.8. **Charakterystyka Eulera-Poincaré odwzorowań indeksowych.** W pracy [b8] stosujemy charakterystykę Eulera-Poincaré oraz liczbę okresowości do odwzorowania indeksowego zbioru niezmienniczego izolowanego, celem uzyskania kryterium istnienia punktów okresowych funkcji ciągłej w danym zbiorze.

Jednym z fundamentalnych problemów w teorii dyskretnych układów dynamicznych jest poszukiwanie punktów stałych i punktów okresowych. Twierdzenie Lefschetza o punkcie stałym jest klasycznym przykładem tego, jak niezmiennik topologiczny, liczba Lefschetza, może być użyty do zagwarantowania istnienia punktów stałych. W roku 1953 Fuller [37] pokazał, że każdy homeomorfizm wielościanu spójnego z niezerową charakterystyką Eulera-Poincaré ma punkt okresowy. Powyższy wynik został uogólniony w roku 1969 przez Bowszyca [17], który wprowadził liczbę Eulera i liczbę okresowości dla ciągłego przekształcenia zwartego wielościanu i pokazał, że jeżeli jedna z tych liczb jest niezerowa, wówczas przekształcenie to ma punkt okresowy. Celem pracy [b8] jest uogólnienie tych rezultatów na przypadek izolowanego zbioru niezmienniczego.

Niech X będzie zwartą przestrzenią metryczną i niech $f : X \to X$ będzie funkcją ciągłą. Przypomnijmy, że (ko)homologiczny indeks Conelya zbioru niezmienniczego izolowanego S ma postać pary (E, e), gdzie E jest modułem z gradacją, a e jest automorfizmem na E. Jeżeli X jest ANRem [12], np. wielościanem, to E jest skończonego typu, tzn. wszystkie E_k mają skończony wymiar i prawie wszystkie są zerowe [69]. Dla takiego E definiuje się charakterystykę Eulera-Poincaré, jako

$$\chi(E) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dim E_k. \tag{10}$$

W [b8] dowodzimy, że jeśli X jest zwartym ANRem i charakterystyka Eulera-Poincaré indeksu Conleya zbioru S jest niezerowa, to f ma punkt okresowy w S [b8, Theorem 1].

W szczególnym przypadku, gdy X jest zwartym wielościanem, a zbiór niezmienniczy izolowany S jest całą przestrzenią X, charakterystyka Eulera-Poincaré indeksu Conleya sprowadza się do liczby Eulera funkcji. Jeżeli dodatkowo założy się, że f jest homeomorfizmem, sprowadza się do charakterystyki Eulera-Poincaré wielościanu.

Główną trudnością w przypadku indeksu Conleya jest konieczność pracy z ANRami, by charakterystyka Eulera-Poincaré miała sens. Istnienie par indeksowych będących ANRami dowiedzione jest dla izolowanych zbiorów niezmienniczych w przestrzeni Euklidesowej [100] oraz kostce Hilberta [88], ale dla dowolnego ANRa odpowiedź nie jest znana. Ponadto można podać przykład zbioru niezmienniczego izolowanego w zwartym ANR, dla którego istnieją pary indeksowe składające się ze zbiorów nie będących ANRami. Homologie takich par indeksowych mogą nie być skończonego typu, pomimo tego że indeks Conleya S jest skończonego typu [69]. By pokonać tę trudność używamy otwartych par indeksowych wprowadzonych w [68], ponieważ otwarte podzbiory ANRów zawsze są ANRami. Ponieważ dotąd nie pokazano, że otwarte pary indeksowe mogą być wykorzystane do policzenia indeksu Conleya, dowodzimy, że w każdym otoczeniu izolowanego zbioru niezmienniczego istnieje para par indeksowych, jedna otwarta, jedna domknięta, których automorfizmy indeksowe są sprzężone. Wystarcza to do pokazania [b8, Theorem 1].

4.5.9. **Rozwiązania przybliżone alternatywnego równania Cauchyego.** Teoria stabilności Hyersa-Ulama równań funkcyjnych zapoczątkowana została problemem Ulama [46, 102] i odpowiedzią Hyersa [46], dotyczącymi równania Cauchy'ego

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{11}$$

Prace [b1, b2, b3] poświęcone są równaniu alternatywnemu

$$|f(x+y)| = |f(x) + f(y)|. \tag{12}$$

W [b1, b2] badamy jego stabilność w sensie Hyersa-Ulama, a w [b3] badamy funkcje spełniające (12) prawie wszędzie w sensie aksjomatycznie zdefiniowanej rodziny zbiorów małych.

W [b1] wprowadzamy pojęcie zbioru słabo ograniczonego w półgrupie przemiennej $(S, +)$, uogólniające pojęcie zbioru ograniczonego w przestrzeni liniowo topologicznej [b1, s. 222]. Niech V będzie słabo ograniczony i niech $f : S \to \mathbb{R}$ spełnia, dla pewnego $\delta > 0$ i wszystkich $(x, y) \in S \times S \setminus V \times V$, nierówność $\big| |f(x+y)| - |f(x)+f(y)| \big| \leqslant \delta$. Dowodzimy, że istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $\gamma : S \to \mathbb{R}$, taka że $|f(x) - \gamma(x)| \leqslant K\delta$ dla $x \in S$, gdzie $K = 3$. Ponadto jeśli $V = \emptyset$, to możemy położyć $K = 1$ [b1, Theorem 1]. Stała 3δ w [b1, Theorem 1] jest najlepsza [b1, Example 1].

Przypomnijmy, że każda funkcja z grupy w ściśle wypukłą przestrzeń unormowaną E, spełniająca równanie Fischera-Muszély'ego (równanie Cauchy'ego (11) z normami), jest addytywna [40]. Ponadto [b1, Theorem 1] mówi, że równanie to jest stabilne w przypadku, gdy $E = \mathbb{R}$. Natomiast zaskakująco, nawet gdy $E = \mathbb{R}^2$ z normą euklidesową, równanie Fischera-Muszély'ego nie jest stabilne [b1, Proposition 1].

W [b2] dowodzimy stabilności równania (12) w przestrzeniach Riesza [b2, Theorem 1].

Praca [b3] inspirowana jest problemem Erdösa [33]. W półgrupie przemiennej S aksjomatycznie definiujemy rodzinę $\mathcal{I}$ "zbiorów małych", zwaną właściwym σ-ideałem w S [55]. Mając rodzinę $\mathcal{I}$ podzbiorów S, mówimy że pewien warunek spełniony jest $\mathcal{I}$-prawie wszędzie w S ($\mathcal{I}$-(p.w.)), jeśli istnieje zbiór $A \in \mathcal{I}$, taki że warunek ten zachodzi dla wszystkich $x \in S \setminus A$. Mając ideał $\mathcal{I}$ w S można zdefiniować następujące właściwe σ-ideały w $S \times S$:

$$\Omega(\mathcal{I}) = \{M \subset S \times S \mid \{y \in S \mid (x, y) \in M\} \in \mathcal{I} \ \mathcal{I} - (p.w.) \text{ w } S\},$$

$$\Pi(\mathcal{I}) = \{A \subset S \times S \mid A \subset (U \times S) \cup (S \times U),\ U \in \mathcal{I}\}.$$

[b3, Theorem 1] mówi, że jeśli $f : S \to \mathbb{R}$ spełnia (12) $\Omega(\mathcal{I})$-(p.w.) w $S \times S$, to istnieje funkcja addytywna równa f $\mathcal{I}$-(p.w.) w S.

Hartman [45] i de Bruijn [18] zauważyli, że rozwiązanie uogólnionego problemu Erdösa może być wzmocnione, gdy odpowiednio ograniczymy rodzinę zbiorów małych, tzn. każda funkcja z grupy w grupę, która jest $\Pi(\mathcal{I})$-prawie addytywna jest homomorfizmem. Jak pokazuje [b3, Example 1], dokładny odpowiednik tego twierdzenia dla równania (12) nie zachodzi. Jednak prawdziwa jest odpowiednia modyfikacja tego twierdzenia [b3, Theorem 2].

4.5.10. **Rozwiązania przybliżone warunkowych równań funkcyjnych.** W cyklu prac [b7, b5, b6, b20] łączymy dwa nurty badawcze. Jeden to stabilność Hyersa-Ulama, drugi to równania funkcyjne postulowane warunkowo. Skupiamy się na warunkowych równaniach Cauchy'ego, tzn. postulujemy równanie Cauchy'ego (11) dla argumentów spełniających pewien warunek, który zależy od funkcji f będącej niewiadomą w równaniu. Zgodnie z naszą wiedzą stabilność takich równań badana była w [b7, b5, b6] po raz pierwszy.

Pewne rozważania geometryczne doprowadziły Mikusińskiego do równania funkcyjnego

$$f(x+y)(f(x+y)-f(x)-f(y))=0, \tag{13}$$

które również często zapisywane jest warunkowo

$$f(x+y)\neq 0 \implies f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{14}$$

Rozwiązania równania (14) opisuje [28, Theorem 1].

W pracy [b7] badamy stabilność równania Mikusińskiego. Pokazujemy, że każda funkcja f z grupy abelowej G w przestrzeń Banacha, spełniająca

$$||f(x+y)||>\delta \implies ||f(x+y)-f(x)-f(y)||\leqslant\varepsilon, \quad x,y\in G, \tag{15}$$

dla pewnych $\delta,\varepsilon\geqslant 0$, jest jednostajnie przybliżana na G przez dokładne rozwiązanie równania Mikusińskiego, z dokładnością $2\varepsilon+3\delta$ w normie supremum [b7, Theorem 2]. Podwójna (δ,ε)-perturbacja w naszym podejściu jest nowatorska i wydaje się być właściwa, ponieważ jako natychmiastową konsekwencję [b7, Theorem 2] dostajemy stabilność równania Mikusińskiego (13) w postaci iloczynowej [b7, Theorem 2]. To samo dotyczy pozostałych badanych równań. W [b13] wykorzystujemy [b7, Theorem 2], by pokazać superstabilność równania (13) dla funkcji zespolonych, w sensie Bakera, tzn. że jeśli f spełnia $|f(x+y)(f(x+y)-f(x)-f(y))|\leqslant\varepsilon$, to jest addytywna lub ograniczona [b13, Theorem 1].

Równanie Dhombres'a jest symetrycznym odpowiednikiem równania Mikusińskiego

$$f(x)+f(y)\neq 0 \implies f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{16}$$

W [b5] dowodzimy jego stabilności z podwójną (δ,ε)-perturbacją [b5, Theorem 1] oraz superstabilności jego wersji iloczynowej [b5, Theorem 1].

Praca [b6] poświęcona jest stabilności równania alternatywnego

$$f(x+y)+f(x)+f(y)\neq 0 \implies f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{17}$$

Wywodzi się ono od równania Cauchy'ego z kwadratami $f(x+y)^2=(f(x)+f(y))^2$ dla funkcji rzeczywistej f i jest również zapisywane z wartością bezwzględną (12). Jego postać warunkowa pozwala na zastosowanie (δ,ε)-perturbacji w problemie stabilności, co ma miejsce w [b6, Theorem 1]. Jako konsekwencję [b6, Theorem 1] dostajemy stabilność równania Cauchy'ego z kwadratami [b6, Theorem 2]. W [b20] dowodzimy superstabilności równania Cauchy'ego z kwadratami dla funkcji o wartościach w pewnej klasie algebr unormowanych [b20, Theorem 2].

4.5.11. **Rozwiązania przybliżone równań funkcynych z funkcjami kontrolnymi.** Aoki [2] pokazał, że jeśli funkcja $f:X\to Y$ między przestrzeniami Banacha spełnia

$$||f(x+y)-f(x)-f(y)||\leqslant\Phi(x,y), \quad x,y\in X, \tag{18}$$

gdzie $\Phi(x,y)=K(||x||^p+||y||^p)$, $(K\geqslant 0,\ 0\leqslant p<1)$, to istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $a: X\to Y$, taka że $||f(x)-a(x)||\leqslant 2K||x||^p/(2-2^p)$ dla $x\in X$. Wynik ten można uważać za uogólnienie twierdzenia Hyersa, w tym sensie że dopuszcza się, by różnica Cauchy'ego była nieograniczona. Pomimo tego wczesnego wyniku, intensywny rozwój badań w tym kierunku miał miejsce po publikacji Rassiasa, [84], który w (18), w roli funkcji kontrolnych, też (niezależnie) rozważał funkcje potęgowe z $0\leqslant p<1$.

Ten sam dowód przechodzi również dla $p \in (-\infty, 1)$. Przypadek $p \in [1, \infty)$ udowodniony został w [39], przy czym stabilność nie zachodzi dla $p = 1$. W następstwie rozważane były rozmaite inne funkcje kontrolne (por. np. [83, 85, 48]).

Celem prac [b9, b10] jest rozwiązanie podobnego problem dla warunkowych równań funkcyjnych z warunkiem zależnym od funkcji niewiadomej. Używamy dwóch funkcji kontrolnych, w ślad za podwójnym zaburzeniem wprowadzonym w [b5, b6, b7].

W [b9] badamy równanie Dhombres'a (16) i jego wersję iloczynową. Niech $(S, +)$ będzie półgrupą abelową, $(X, ||\cdot||)$ przestrzenią Banacha i niech $f : S \to X$. Rozważamy dwa warunki dla funkcji kontrolnych:

(p1) szereg $\sum_{k=0}^{\infty} \Phi_2(2^k x, 2^k x)/2^k$ jest zbieżny dla każdego $x \in S$ i $\lim_{k\to\infty} \Phi_i(2^k x, 2^k y)/2^k = 0$ dla $x, y \in S$ $(i \in \{1, 2\})$.

(p2) S jest jednoznacznie podzielna przez 2, szereg $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \Phi_2\left(x/2^k, x/2^k\right)$ jest zbieżny dla każdego $x \in S$ i $\lim_{k\to\infty} 2^k \Phi_i\left(x/2^k, y/2^k\right) = 0$ dla $x, y \in S$ $(i \in \{1, 2\})$.

[b9, Theorem 1] mówi, że jeśli zachodzi implikacja $||f(x) + f(y)|| > \Phi_1(x, y) \Rightarrow ||f(x + y) - f(x) - f(y)|| \leqslant \Phi_2(x, y)$, dla $x, y \in S$, z pewnymi $\Phi_1, \Phi_2 : S \times S \to \mathbb{R}_+$ spełniającymi $(p1)$ lub $(p2)$, to f jest jednostajnie przybliżana na S przez rozwiązanie $a : S \to X$ równania Dhombres'a $||f(x)-a(x)|| \leqslant \Psi(x)$ dla $x \in S$. Ponadto podajemy wzór na Ψ, która zależy od Φ_1 i Φ_2, i nie zależy od funkcji f. Jeśli $(S, +)$ jest grupą abelową, to funkcja a jest jedynym rozwiązaniem (16) przybliżającym f [b9, Remark 1]. Z [b9, Theorem 1] wyprowadzamy stabilność równania Dhombres'a w postaci iloczynowej dla funkcji zespolonych [b9, Theorem 2].

Funkcje kontrolne występujące w [b9, Theorem 1] są na tyle ogólne, że pokrywają jako szczególne przypadki funkcje kontrolne rozważane do równania Cauchy'ego w [85, 48] [b9, Corollary 1, Corollary 2, Corollary 3]. W szczególności, w [b9, Corollary 3] zakładamy, że $f : X \to Y$, gdzie $(X, ||\cdot||)$ jest przestrzenią unormowaną, a $(Y, ||\cdot||)$ jest przestrzenią Banacha, spełnia dla pewnych $\delta, \varepsilon > 0$ i $p, q > 1$ lub $p, q < 1$, warunek $||f(x) + f(y)|| > \delta(||x||^p + ||y||^p) \Rightarrow ||f(x + y) - f(x) - f(y)|| \leqslant \varepsilon(||x||^q + ||y||^q), x, y \in X$. Dowodzimy, że istnieje rozwiązanie równania Dhombres'a $a : X \to Y$ oraz stałe $K, L > 0$, takie że $||f(x) - a(x)|| \leqslant K||x||^p + L||y||^q$ dla $x \in X$. Ponadto pokazujemy, że [b9, Corollary 3] nie można rozszerzyć dla przypadku $q = 1$ [b9, Theorem 3].

W [b10] badamy równanie alternatywne (17). Głównym pozytywnym wynikiem jest [b10, Theorem 1], z którego dostajemy wnioski dla szeregu funkcji kontrolnych [b10, Corollaries 1 - 4]. Również tu mamy szczególne wartości parametrów, przy których brak stabilności [b10, Theorem 2, Theorem 3]. Gdy f jest funkcją rzeczywistą, równanie (17) możemy przedstawić z wartością bezwzględną (12) lub z kwadratami. Wyniki dotyczące tych równań przedstawiają [b10, Theorem 4, Theorem 5] uzyskane jako wnioski z [b10, Theorem 1]. Tu rozwiązania przybliżone dane są odpowiednio przez $||f(x+y)| - |f(x) + f(y)|| \leqslant \Phi(x, y)$ i $|f(x + y)^2 - (f(x) + f(y))^2| \leqslant \Phi(x, y)$.

4.5.12. **Zbiory aproksymatywnie wypukłe i funkcje aproksymatywnie wypukłe.** W [b4] badamy zbiory i funkcje aproksymatywnie wypukłe. Uzyskujemy wyniki podobne do [19] i [55], ale dostajemy lepszą stałą aproksymacji. Używamy pojęcia normy uogólnionej (g-normy), tzn. takiej, która może przyjmować wartości nieskończone. Do jej definicji [b4, Definition 1] adaptujemy pojęcie metryki uogólnionej [22]. Niech E będzie przestrzenią z g-normą i niech $D \subset E$ będzie wypukły. Przypomnijmy [55, p. 430], że $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ε-wypukła*, jeśli dla dowolnych $x, y \in D$ i $\alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) + \varepsilon.$$

W głównym wyniku [b4] dotyczącym zbiorów aproksymatywnie wypukłych pokazujemy, że jeśli zbiór V jest ε-wypukły w n-wymiarowej g-unormowanej przestrzeni, tzn. $\alpha x + (1 - \alpha)y \in V + B(0, \varepsilon)$ dla $x, y \in V$ i $\alpha \in [0, 1]$ [b4, Definition 2], to $\mathrm{conv}(V) \subset V + K_{n+1}B(0, \varepsilon)$, gdzie $\mathrm{conv}(V)$ oznacza obwiednię wypukłą V, a ciąg $(K_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ dany jest wzorem

$$K_n := l - \frac{k}{n},$$

z jedynymi nieujemnymi całkowitymi k, l, takimi że $k < 2^{l-1}$ i $n = 2^l - k$ [b4, Theorem 2]. Zaletą użycia g-norm jest możliwość lepszego zrozumienia własności nadwykresu funkcji f, tzn. zbioru $\operatorname{epi}(f) := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$. W konsekwencji jesteśmy w stanie przenieść stabilność zbiorów wypukłych na stabilność funkcji wypukłych. Jest tak, bo w pewnej g-normie nadwykres funkcji jest ε-wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja jest ε-wypukła [b4, Proposition 2] (dla zwykłych norm równoważność ta nie zachodzi [b4, Example 1]). To geometryczne podejście pozwala nam poprawić wynik dotyczący stabilność funkcji wypukłych uzyskany przez Hyersa i Ulama [47] oraz Cholewę [19]. Precyzyjniej, dowodzimy że jeśli $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ jest ε-wypukła, to istnieje funkcja wypukła $g : D \to \mathbb{R}$, taka że

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) + K_{n+1}\varepsilon,$$

dla $x \in D$ [b4, Theorem 3]. W [b4, Example 2] pokazujemy, że stała $K_2 = 1$ jest najlepsza. W [b4] pokazujemy również, że stałą aproksymacji w [b4, Theorem 3] jest niemal ostra i lepsza niż ta w [19]. W szczególności dowodzimy, że brak stabilności, gdy E jest nieskończenie wymiarowa [b4, Example 3].

Pisząc pracę nie wiedzieliśmy, że nasza stała K_{n+1} w [b4, Theorem 3] jest najlepsza. Podobny wynik, z dowodem optymalności stałej, zawiera [27, Theorem 1.1]. Okazuje się, że stała w [27, Theorem 1.1] pokrywa się z naszą stałą [65].

4.5.13. **Rozwiązania przybliżone równań funkcyjnych w przestrzeniach Riesza.** W cyklu prac [b2, b14, b17, b19, b16] rozwijamy metodę badania przybliżonych rozwiązań równań funkcyjnych w klasie funkcji o wartościach w kratach wektorowych. Rozwiązania przybliżone definiujemy zgodnie ze strukturą porządkową kraty wykorzystując wartość bezwzględną, w ten sposób pojęcie to zgadza się z klasycznym w kracie liczb rzeczywistych. Przypomnijmy, że wartość bezwzględna wektora dana jest wzorem $|x| := \sup\{x, -x\} \geqslant 0$.

Nasza metoda bazuje na teorii reprezentacji spektralnej dla przestrzeni Riesza, która pozwala na utożsamianie wektorów w przestrzeni Riesza L, z dokładnością do izomorfizmu Riesza, z rozszerzonymi, tzn. przyjmującymi wartości nieskończone, ciągłymi funkcjami f z pewnej przestrzeni X w $R^\infty := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ z topologią naturalną, takimi że $R(f) = \{x \in X \mid |f(x)| < \infty\}$ jest gęsty w X. Zbiór wszystkich takich funkcji na X oznaczamy $C^\infty(X)$. Okazuje się, że $C^\infty(X)$ nie musi być zamknięty na dodawanie. Dowolny podzbiór zbioru $C^\infty(X)$ zamknięty na dodawanie, mnożenie przez skalary (przyjmujemy $0 \cdot \infty = 0$) i operacje infimum i supremum, jest przestrzenią Riesza względem porządku indukowanego z przestrzeni wartości. Każdy taki podzbiór nazywamy *przestrzenią Riesza ciągłych rozszerzonych funkcji rzeczywistych* na X [56, p. 295]. Reprezentacja oznacza, że dana przestrzeń Riesza L jest izomorficzna w sensie Riesza z pewną przestrzenią Riesza zawartą w $C^\infty(X)$.

Twierdzenie Johnson-Kista o reprezentacji spektralnej [56, Theorem 44.4] zostało użyte w [b14] dla równania Dhombres'a (16). Przed zaprezentowaniem głównego wyniku [b14] przypomnijmy, że przestrzeń Riesza L nazywamy *archimedesową*, jeśli dla dowolnego $x \in L$ ograniczoność od góry zbioru $\{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ pociąga $x \leqslant 0$ [56, Definition 22.1]. Potrzebujemy również pojęcia *relatywnej jednostajnej zbieżności.* Niech $u \in L_+ := \{u \in L \mid u \geqslant 0\}$. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w L *zbiega u-jednostajnie* do $f \in L$, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, istnieje liczba naturalna n_0, taka że $|f - f_n| \leqslant \varepsilon u$ dla $n \geqslant n_0$ [56, Definition 39.1]. Podobnie definiuje się *u-jednostajną zupełność* względem $u \in L_+$ [56, Definition 39.3].

Zaprezentujemy teraz główny wynik [b14]. Załóżmy, że $(G, +)$ jest grupą abelową, L jest archimedesową $\sup\{e, \frac{1}{2}d\}$-jednostajnie zupełną przestrzenią Riesza dla pewnych $e, d \in L_+$ oraz $F : G \to L$ spełnia warunek

$$|F(x) + F(y)| \leqslant d \quad \text{ lub } \quad |F(x + y) - F(x) - F(y)| \leqslant e, \quad x, y \in G.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna funkcja addytywna $A : G \to L$, taka że $|F(x) - A(x)| \leqslant \sup\{e, 1/2d\}$ dla $x \in G$ [b14, Theorem 2]. Oszacowanie w tezie [b14, Theorem 2] jest ostre, a założenie, że przestrzeń Riesza L jest archimedesowa jest konieczne dla jednoznaczności aproksymacji [b14, Example 2].

W [b2] dowodzimy stabilności Hyersa-Ulama równania (12) w przestrzeniach Riesza [b2, Theorem 1]. Używamy twierdzenia Johnson-Kista oraz [b1, Theorem 1].

W [b19] stosujemy teorię reprezentacji spektralnej do badania stabilności równań funkcyjnych dla funkcji o wartościach w f-algebrach. Dla równania Dhombres'a w postaci iloczynowej używamy twierdzenia Ogasawary-Maedy [56, Theorem 50.1]. Przypomnijmy, że jest ono superstabilne dla funkcji zespolonych [b5, Theorem 2] oraz funkcji o wartościach w skończenie wymiarowych algebrach unormowanych bez dzielników zera [64, Theorem 2.5.2]. W [b19] pokazujemy, że inaczej jest w f-algebrach. Natomiast pokazujemy, że równanie to jest stabilne [b19, Theorem 6]. Oszacowanie w tezie [b19, Theorem 6] jest ostre [b19, Remark 3].

Celem [b16] jest zaproponowanie ogólnej metody badania stabilności szerokiej klasy równań funkcyjnych w kratach wektorowych lub f-algebrach. Na poziomie intuicyjnym nasza metoda jest prosta i można ją opisać następująco. Dla przybliżonego rozwiązania równania funkcyjnego w przestrzeni Riesza redukujemy problem jego stabilności do przypadku jednowymiarowego. W tym celu wykorzystujemy teorię reprezentacji spektralnej. Funkcje reprezentujące mogą przyjmować wartości nieskończone, dlatego formułujemy [b16, Lemma 6], który pozwala pokonać tę trudność. Po zredukowaniu problemu stosujemy standardowe techniki badania stabilności równań funkcyjnych, by rozwiązać jednowymiarowy odpowiednik problemu. Pozostała część procedury poświęcona jest drodze powrotnej, tzn. rozszerzamy jednowymiarowe rozwiązanie do wyjściowej przestrzeni Reisza. Idea taka leży u podstaw dowodu [b16, Theorem 7], głównego wyniku [b16]. Nasza metoda działa dla klasy równań funkcyjnych, która scharakteryzowana jest w [b16]. Pokazujemy zastosowania naszej metody badając trzy wybrane równania funkcyjne. Pierwsze dwa z nich mają wspólny rodowód, ale przedstawiają odmienne zachowania stabilnościowe (w klasie funkcji rzeczywistych). Pokazujemy, że alternatywne równanie Cauchy'ego (17) jest stabilne w przestrzeniach Riesza [b16, Section 4]. W [b16, Section 5] pokazujemy, że równanie Cauchy'ego z kwadratami jest stabilne w f-algebrach [b16, Theorem 19], jednak inaczej niż dla funkcji o wartościach rzeczywistych, nie jest ono superstabilne [b16, Example 21]. Trzecie, to równanie kwadratowe $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$. Jego stabilność w przestrzeniach Riesza pokazujemy w [b16, Section 6].

Równanie funkcji wykładniczej

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

jest ważne w teorii stabilności Hyersa-Ulama, ponieważ pojęcie superstabilności w sensie Bakera wywodzi się z zachowania jego rozwiązań przybliżonych [7, 6]. W [b17] zajmujemy się rozwiązaniami przybliżonymi równania wykładniczego w algebrach Riesza. Stosujemy twierdzenie spektralne Yosidy [56, Theorem 45.3] dla przestrzeni archimedesowych z silną jednością porządkową, ale potrzebujemy innych technik niż opisane wyżej. W f-algebrach, inaczej niż w w przypadku rzeczywistym, fenomen superstabilności nie występuje [b17, Example 13], ale zachodzi stabilność [b17, Theorem 10], choć brak jednoznaczności aproksymacji [b17, Remark 14].

Metoda punktu stałego znalazła zastosowanie w teorii stabilności Hyersa-Ulama i wydaje się, że w [5] użyto jej po raz pierwszy w tej dziedzinie. W [b15] dowodzimy twierdzenia o punkcie stałym w przestrzeniach Riesza [b15, Theorem 1], a następnie stosujemy je do badania stabilności kilku równań funkcyjnych jednej zmiennej [b15, Section 4] i wielu zmiennych [b15, Section 5].

W [b18] badamy ciągłe w punkcie funkcje o wartościach w przestrzeniach Riesza i spełniają pewne układy równań funkcyjnych.

(c) Zagraniczne wyjazdy naukowe:
   - Sierpień 2017, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Qc, Kanada (2 tygodnie).
   - Wrzesień 2017, Hausdorff Research Institute for Mathematics, Bonn, Niemcy (1 tydzień). Oba powyższe pobyty poświęcone były badaniom, które zaowocowały powstaniem [H3].
   - 2020 – 2021, Associate Research Professor, Department of Mathematics, Rutgers University, USA (1 rok).
     Owocem pobytu jest preprint [9], który jest obecnie w recenzji oraz kolejna praca w przygotowaniu. Preprint [9] opisany jest krótko w sekcji 4.1.4. Pracowałem zarówno nad stroną teoretyczną jak i kodem w Python, który konstruuje dyskretny wielowartościowy układ dynamiczny. Podczas wizyty wygłosiłem dwa referaty na seminariach naukowych: w Instytucie Matematyki oraz Tripods Institut w Uniwersytecie Rutgers. Oba dotyczyły teorii Conleya dla dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych i badań, które ostatecznie zaowocowały powstaniem pracy [9].
     Wyniki te przedstawiłem również na konferencji ICMC Summer Meeting on Differential Equations - 2023 Chapter w São Carlos w Brazylii.
     Ponadto podczas wizyty w Uniwersytecie Rutgers finalizowałem pracę [H5].

(d) Wystąpienia na konferencjach:
   Wygłosiłem 26 referatów na konferencjach międzynarodowych, między innymi w: USA, Kanadzie, Brazylii, Francji, na Węgrzech, w Czechach, Chorwacji i w Polsce. Lista referatów znajduje się w osobnym dokumencie. Ponadto wygłaszałem liczne referaty na seminariach naukowych, między innymi w Institute of Mathematics w Rutgers University (USA), Tripods Institute w Rutgers University, Instytucie Matematyki w Uniwersytecie w Poznaniu, Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, Instytucie Informatyki i Matematyki Komputerowej w Uniwersytecie Jagiellońskim, Instytucie Matematyki Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, na Wydziale Informatyki w WSB-NLU, na Wydziale Zarządzania WSB-NLU.

(e) Recenzje dla czasopism naukowych:
   - SIAM Journal on Applied Dynamical Systems
   - Physica D: Nonlinear Phenomena
   - Journal of Applied and Computational Topology
   - Journal of Mathematical Analysis and Applications
   - Aequationes Mathematicae
   - Publicationes Mathematicae
   - Mathematical Inequalities and Applications
     i
   - Mathematical Reviews.

6. Dydaktyka, osiągnięcia organizacyjne i w popularyzacji nauki

(a) Prowadzone zajęcia dydaktyczne
   1) Uniwersytet Jagielloński: Analiza matematyczna 1a (ćwiczenia dla programu Matematyka Komputerowa), Analiza matematyczna 1b (wykład, ćwiczenia i laboratoria dla programu Matematyka Komputerowa), Algebra obliczeniowa (wykład dla programu Matematyka Komputerowa), Algebra liniowa z geometrią (ćwiczenia), Algebra liniowa z geometrią 2 (ćwiczenia), Analiza matematyczna 1 (ćwiczenia), Analiza matematyczna 2 (ćwiczenia), Seminarium dyplomowe.
   2) Wcześniej, w Uniwersytecie Pedagogicznym, WSB-NLU, PWSZ, liczne wykłady, ćwiczenia i laboratoria, np.: Wstęp do logiki i teorii mnogości, Algebra, Algebra liniowa, Analiza matematyczna, Topologia, Analiza funkcjonalna, Technologie informacyjne, Programowanie w MatLab, Oprogramowanie użytkowe, Zarządzanie produkcją, Modelowanie matematyczne i symulacje komputerowe, Matematyka (dla studentów Biologii, Fizyki), Wstęp

do informatyki, Równania różniczkowe, Matematyka dyskretna, Matematyka w ekonomii, Bezpieczeństwo systemów komputerowych, Badania operacyjne, Statystyka, Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka, Ekonometria, Algebra z geometrią, Statystyka w biznesie, Kryptologia, Systemy komputerowe w zarządzaniu produkcją.

(b) Opieka nad studentami studiów doktoranckich
   1. Dr Mateusz Przybylski, obrona w 2021 roku, tytuł rozprawy doktorskiej: Metody teorii indeksu Conleya w dynamice próbkowanej; promotor pomocniczy
   2. Mgr Damian Sadowski; obecny student

(c) Promotorstwo prac magisterskich, licencjackich lub inżynierskich - ponad 100, z matematyki, informatyki, zarządzania. W ostatnim czasie w Uniwersytecie Jagiellońskim 10ciu dyplomantów studiów I stopnia z Matematyki Komputerowej.

(d) Skrypty
   1. B. Batko, J. Malczak, *Matematyka w ekonomii*, WSB-NLU, Nowy Sącz 2002.
   2. B. Batko, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka*, WSB-NLU, Nowy Sącz 2005.
   3. B. Batko, M. Mrozek, *Badania operacyjne*, WSB-NLU, Nowy Sącz 2006.

(e) Europejski Fundusz Społeczny (ESF)
   1. Pozyskanie środków i kierowanie projektem *profIT - studia podyplomowe z zakresu IT* finansowanym przez Polską Agencję Rozwoju Przedsiębiorczości (PARP) w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki (POKL) 01.09.2009–31.08.2012.
   2. Kierowanie projektem *Uczelnia dla biznesu - wsparcie informatyki w Małopolsce jako kluczowego kierunku studiów dla budowy gospodarki opartej na wiedzy*, finansowanym przez Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego oraz Narodowe Centrum Badań i Rozwoju (NCBiR) w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki (POKL), 01.08.2008–30.06.2013.

(f) Inna aktywność organizacyjna:
   1. Współautorstwo programu studiów inżynierskich dla kierunku *Informatyka*, Wydział Informatyki WSB-NLU 2008.
   2. Współautorstwo programu trzech specjalności studiów podyplomowych z Informatyki, Wydział Informatyki WSB-NLU 2008. Program prowadzony w ramach projektu "profIT" w latach 2009–2012 dla około 180 studentów.
   3. Współautorstwo programu licencjackiego *Matematyka ekonomiczna*, Instytut Matematyki, Uniwersytet Pedagogiczny, 2012.
   4. Współautorstwo raportu samooceny kierunku studiów dla Polskiej Komisji Akredytacyjnej (PKA), Wydział Informatyki WSB-NLU.

(g) Lider bloku tematycznego w programie "Przyjaciele Sukcesu–Biznes Nabiera Dynamiki". Ogólnopolski program szkoleniowo konsultingowy zorganizowany pod patronatem Polskiej Konfederacji Pracodawców Prywatnych Lewiatan (PKPP Lewiatan) oraz Microsoft Dynamics: Warszawa, Łódź, Kraków, Sosnowiec, Wrocław, Poznań, Szczecin, Gdańsk, Olsztyn; 2006.

Literatura

[H1] B. Batko, M. Mrozek. Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **15** (2016), 1143–1162.

[H2] B. Batko. Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems. Part II: properties of the Index, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **16** (2017), 1587–1617.

[H3] B. Batko, T. Kaczynski, M. Mrozek and Th. Wanner. Linking combinatorial and classical dynamics: Conley index and Morse decompositions. *Found. Comput. Math.* **20** (2020), 967–1012.

[H4] B. Batko, K. Mischaikow, M. Mrozek and M. Przybylski. Conley index approach to sampled dynamics. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **19** (2020), 665–704.

[H5] B. Batko. The Morse equation in the Conley index theory for discrete multivalued dynamical systems, *J. Dyn. Diff. Equat.* (2022).

[b1] B. Batko, Jacek Tabor. Stability of an alternative Cauchy equation on a restricted domain, *Aequationes Math.* **57** (1999), 221–232.

[b2] B. Batko, Jacek Tabor. Stability of the generalized alternative Cauchy equation, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamb.* **69** (1999), 67–73.

[b3] B. Batko. An alternative Cauchy equation almost everywhere, *Roczn. Nauk.-Dyd. AP w Krakowie* **204** (2000), Prace Matematyczne 17, 41–48.

[b4] B. Batko, Jacek Tabor, Z. Kominek. Generalized norms and convexity, *Publ. Math. Debrecen* **60** (2002), 63–73.

[b5] B. Batko. Stability of Dhombres' equation, *Bull. Austral. Math. Soc.* **70** (2004), 499–505.

[b6] B. Batko. On the stability of an alternative functional equation, *Math. Inequal. Appl.* **8** (4) (2005), 685-691.

[b7] B. Batko. On the stability of Mikusiński's equation, *Publ. Math. Debrecen* **66** (2005), 17–24.

[b8] B. Batko, M. Mrozek. The Euler-Poincaré characteristic of index maps, *Topology Appl.* **154** (2007), 859–866.

[b9] B. Batko. On approximation of approximate solutions of Dhombres' equation, *J. Math. Anal. Appl.* **340** (2008), 424–432.

[b10] B. Batko. Stability of an alternative functional equation, *J. Math. Anal. Appl.* **339** (2008), 303–311.

[b11] M. Mrozek, B. Batko. Coreduction homology algorithm, *Discrete Comput. Geom.* **41/1** (2009), 96–118.

[b12] M. Mrozek, B. Batko. Homology of representable sets, *Ann. Pol. Mat.* **97.3** (2010), 243–252.

[b13] B. Batko. Note on superstability of Mikusiński's functional equation, *in: Functional Equations in Mathematical Analysis, Springer Optim. Appl.* **52** (2012), 15–17.

[b14] B. Batko. The stability of Dhombres' equation in Riesz spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **406** (2013), 261–265.

[b15] B. Batko, J. Brzdę k. A fixed point theorem and the Hyers-Ulam stability in Riesz spaces, *Adv. Differ. Equ.* **2013** (2013):138.

[b16] B. Batko. On approximate solutions of functional equations in vector lattices, *Abstr. Appl. Anal.* **2014** (2014), Art. ID. 547673.

[b17] B. Batko. Stability of the exponential functional equation in Riesz algebras, *Abstr. Appl. Anal.* **2014** (2014), Art. ID. 848540.

[b18] B. Batko, J. Brzdęk. A remark on some simultaneous functional inequalities in Riesz spaces, *in: Topics in Mathematical Analysis and Applications* **94** (2014), 111–117.

[b19] B. Batko Spectral representation theory and stability of the multiplicative Dhombres functional equation in f-algebras, *Aequationes Math.*, **89** (2015), 543–554.

[b20] B. Batko. Superstability of the Cauchy equation with squares in finite-dimensional normed algebras, *Aequationes Math.* **89** (2015), 785–789.

[1] P.S. Alexandrov. Diskrete Räume, *Mathematiceskii Sbornik (N.S.)* **2** (1937), 501–518.

[2] T. Aoki. On the stability of the linear transformation in Banach spaces, *J. Math. Soc. Japan* **2** (1950), 64–66.

[3] Z. Arai, W. Kalies, H. Kokubu, K. Mischaikow, H. Oka, and P. Pilarczyk. A database schema for the analysis of global dynamics of multiparameter systems *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **8**(3) (2009),757–789.

[4] J.P. Aubin, A. Cellina. Differential inclusions. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 264, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1984.

[5] J.A. Baker. The stability of certain functional equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **112** (1991), 729–732.

[6] J. Baker. The stability of the cosine equation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **80** (1980), 411–416.

[7] J. Baker, J. Lawrence, F. Zorzitto. The stability of the equation $f(x+y) = f(x)f(y)$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **74** (1979), 242–246.

[8] S. Basu. On bounding the Betti numbers and computing the Euler characteristic of semi-algebraic sets, *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999), 1–18.

[9] B. Batko, M. Gameiro, Y. Hung, W. Kalies, K. Mischaikow, E. Vieira. Identifying nonlinear dynamics with high confidence from sparse data (under review), arxiv preprint: https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.13779.

[10] U. Bauer, H. Edelsbrunner, G. Jabłoński, and M. Mrozek. Persistence in sampled dynamical systems faster, preprint 2017, arXiv:1709.04068 [math.AT]

[11] V. Benci. A new approach to the Morse-Conley theory and some applications, *Ann. Mat. Pura Appl.* **158**(4) (1991), 231–305.

[12] K. Borsuk. Theory of retracs, PWN, Warszawa 1967.

[13] R. Bott. Marston Morse and his mathematical works. *Bull. Amer. Math. Soc.* **3** (1980), 907–950.

[14] D. Brewer, M. Barenco, R. Callard, M. Hubank and J. Stark. Fitting ordinary differential equations to short time course data, *Phil. Trans. R. Soc. A* **366** (2008), 519–544.

[15] J. Bush, M. Gameiro, S. Harker, H. Kokubu, K. Mischaikow, I. Obayashi and P. Pilarczyk. Combinatorial-topological framework for the analysis of global dynamics, *Chaos* **22** (2012), 047508.

[16] D.G. Bourgin. Classes of transformations and bordering transformations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **57** (1951), 223–237.

[17] C. Bowszyc. On the Euler-Poincaré characteristic of a map and the existence of periodic points, *Bull. Ac. Pol. Sci.* **17** (1969), 367–372.

[18] N.G. de Bruijn. On almost additive functions, *Colloq. Math.* **15** (1966), 59–63.

[19] P.W. Cholewa Remarks on the stability of functional equations, *Aequationes Math.* **27** (1984), 76–86.

[20] C. Conley. Isolated invariant sets and the Morse index. *CBMS Lecture Notes* **38** A.M.S. Providence, R.I. 1978.

[21] C. Conley, E. Zehnder. Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian systems. *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 207–253.

[22] H. Covitz, S.D. Nadler. Multivalued contractious mappings in generalized metric spaces, *Israel J. Math.* **8** (1970), 4–51.

[23] M. Degiovanni, M. Mrozek. The Conley index for maps in absence of compactness, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, **123A** (1993), 75–94.

[24] C.J.A. Delfinado, H. Edelsbrunner. An incremental algorithm for Betti numbers of simplicial complexes on the 3-sphere, *Comput. Aided Geom. Design* **12** (1995), 771–784.

[25] T. Dey, F. Fan, Y. Wang. Graph induced complex on point data, *Proceedings of the Twenty-ninth Annual Symposium on Computational Geometry*, SoCG '13 (2013), 107–116.

[26] T. Dey, M. Juda, T. Kapela, J. Kubica, M. Lipiński, and M. Mrozek. Persistent homology of Morse decompositions in combinatorial dynamics, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **18** (2019), 510–530.

[27] S.J. Dilworth, R. Howard, J.W. Roberts. Extremal approximately convex functions and the best constants in a Theorem of Hyers and Ulam, *Adv. Math.* **172** (2002), 1–14.

[28] L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger, M. Kuczma. On Mikusiń ski's functional equation, *Ann. Polon. Math.* **28** (1973), 39–47.

[29] J.G. Dumas, F. Heckenbach, D. Saunders and V. Velker. Computing Simplicial Homology Based on Efficient Smith Normal Form Algorithms, *in: Algebra, Geometry and Software Systems* (2003), 177–207.

[30] H. Edelsbrunner, J. Harer. Computational Topology: An Introduction. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2010.

[31] H. Edelsbrunner, G. Jabłoński, M. Mrozek. The persistent homology of a self-map, *Found. Comput. Math.* **15** (2015), 1213–1244.

[32] H. Edelsbrunner, D. Letscher, A. Zomorodian, Topological Persistence and Simplification, *Discrete Comput. Geom.*, **28** (2002), 511–533.

[33] P. Erdös. Problem 310, *Colloq. Math.* **7** (1960), 311.

[34] R. Forman. Combinatorial vector fields and dynamical systems, *Math. Z.* **228** (1998), 629–681.

[35] R. Forman. Morse theory for cell complexes, *Adv. Math.*, **134** (1998), 90–145.

[36] J. Franks. Homology and dynamical systems. *CBMS Regional Converence Series in Mathematics* **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982.

[37] F.B. Fuller. The existence of periodic points, *Ann. of Math.* **57** (1953), 229–230.

[38] J. Friedman. Computing Betti Numbers via Combinatorial Laplacians, *in: Proc. 28th Ann. ACM Sympos. Theory Comput.* (1996), 386-391.

[39] Z. Gajda. On stability of additive mappings, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* **14** (1991), 431–434.

[40] R. Ger. Almost additive functions on semigroups and a functional equation, *Publ. Math. Debrecen* **26** (1979), 219–228.

[41] L. Górniewicz.Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, 2^{nd} ed., *Topological Fixed Point Theory and Its Applications* **4**, Springer Verlag, The Netherlands, 2006.

[42] L. Górniewicz. *Topological Degree of Morphisms and its Applications to Differential Inclusions*, Raccolta di Seminari del Dipartimento di Matematica dell'Universita degli Studi della Colabria, **5** (1983).

[43] L. Górniewicz, A. Granas, W. Kryszewski, *On the homotopy method in the fixed point index theory of multivalued mappings of compact absolute neighborhood retracts*, JMAA **161** (1991), 457–473.

[44] S. Harker, M. Kramar, R. Levanger, K. Mischaikow. A comparison framework for interleaved persistence modules, *J Appl. and Comput. Topology* **3** (2019), 85–118. doi:10.1007/s41468-019-00026-x.

[45] S. Hartman. A remark about Cauchy's equation, *Colloq. Math.* **8** (1961), 77–79.

[46] D.H. Hyers. On the stability of the linear functional equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **27** (1941), 222–224.

[47] D.H. Hyers, S.M. Ulam Approximately convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 821–828.

[48] G. Isac, Th.M. Rassias. On the Hyers-Ulam stability of Ψ- additive mappings, *J. Approx. Theory* **72** (1993), 131–137.

[49] T. Kaczynski, K. Mischaikow, and M. Mrozek. Computational Homology, *Appl. Math. Sci.* 157, Springer-Verlag, 2004.

[50] T. Kaczynski, M. Mrozek. Conley index for discrete multi-valued dynamical systems, *Topology Appl.* **65** (1995), 83–96.

[51] T. Kaczynski, M. Mrozek, M. Ślusarek. Homology computation by reduction of chain complexes, *Comput. Math. Appl* **35** (1998), 59–70.

[52] T. Kaczynski, M. Mrozek and T. Wanner. Towards a formal tie between combinatorial and classical vector field dynamics, *J. Comput. Dyn.* **3** (1) (2016), 17–50.

[53] W. Kalies, K. Mischaikow, G. Watson. Cubical Approximation and Computation of Homology, *in: Conley Index Theory, Banach Center Publications* **47** (1999), 115–131.

[54] J. Kasten, J. Reininghaus, I. Hotz, H.C. Hege, B.R. Noack, G. Daviller, M. Morzynski. Acceleration feature points of unsteady shear flows, *Arch. Mech.* **68** (2016), 55–80.

[55] M. Kuczma An introduction to the theory of functional equations and inequalities, PWN, Warszawa-Kraków-Katowice, Silesian University, 1985.

[56] W.A.J. Luxemburg, A.C. Zaanen. Riesz Spaces, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1971.
[57] W.S. Massey,. Homology and cohomology theory, Marcel Dekker, New York, 1978.
[58] M.C. McCord. Singular homology and homotopy groups of finite spaces, *Duke Math. J.* **33** (1966), 465–474.
[59] K. Mischaikow, M. Mrozek. Chaos in Lorenz equations: a computer assisted proof. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **33** (1995), 66–72.
[60] K. Mischaikow, M. Mrozek, P. Pilarczyk. Graph approach to the Computation of the homology of continuous maps, *Found. Comput. Math.* **5.2** (2005), 199–229.
[61] K. Mischaikow, M. Mrozek, J. Reiss, A. Szymczak. Construction of Symbolic Dynamics from experimental time series, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999), 1144–1147.
[62] R.E. Moore. Methods and Applications of Interval Analysis, Studies in Applied Mathematics, SIAM, 1995.
[63] M. Morse. *The Calculus of Variations in the Large*, Colloquium Publication **18**, American Mathematical Society, 1934.
[64] Z. Moszner. On stability of some functional equations and topology of their target spaces, *Ann. Univ. Paed. Crac., Studia Math.* **XI 122** (2012), 69–94.
[65] J. Mrowiec. Stabilność nierówności opisują cej funkcje wypukłe w sensie Wrighta i pewnych nierówności pokrewnych, PhD Thesis, Silesian University, Katowice 2004.
[66] M. Mrozek. Index pairs and the fixed point index for semidynamical systems with discrete time. *Fund. Math.* **133** (1989), 178–192.
[67] M. Mrozek. Leray functor and cohomological index for discrete dynamical systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **318** (1990), 149–178.
[68] M. Mrozek. Open index pairs, the fixed point index and rationality of zeta functions, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **10** (1990), 555–564.
[69] M. Mrozek. The Conley index on compact ANR's is of finite type, *Results Math.* **18** (1990), 306–313.
[70] M. Mrozek. The Morse equation in Conley's index theory for homeomorphisms, *Topology Appl.* **38** (1991), 45–60.
[71] M. Mrozek. Normal functors and retractors in categories of endomorphisms, *Univ. Iag. Acta Math.* **29** (1992), 181–198.
[72] M. Mrozek. Shape index and other indices of Conley type for continuous maps in locally compact metric spaces, *Fund. Math.* **145** (1994), 15–37.
[73] M. Mrozek. An algorithmic approach to the Conley index theory *J. Dyn. Diff. Equat.*, **11** (1999), 711–734.
[74] M. Mrozek. Index pairs algorithms, *Found. Comput. Math.*, **6** (2006), 457–493.
[75] M. Mrozek. Conley–Morse–Forman Theory for Combinatorial Multivector Fields on Lefschetz Complexes, *Found. Comput. Math.* **17** (2017), 1585–1633.
[76] M. Mrozek, P. Pilarczyk, N. Zelazna. Homology algorithm based on acyclic subspace, *Comput. Math. Appl.* **55** (2008), 2395–2412.
[77] M. Mrozek, J.F. Reineck, R. Srzednicki. The Conley index over a base, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352 (9)** (2000), 4171–4194.
[78] M. Mrozek, P. Zgliczyński. Set arithmetic and the enclosing problem in dynamics, *Ann. Pol. Math.* **74** (2000), 237–259.
[79] J.R. Munkres. Elements of Algebraic Topology, Addison-Wesley, 1984.
[80] S. Oudot, D. Sheehy. Zigzag Zoology: Rips Zigzags for Homology Inference, *Found. Comput. Math.*, **15** (2015) 1151–1186.
[81] M. Przybylski. Metody teorii indeksu Conleya w dynamice próbkowanej, PhD thesis, Jagiellonian University, Kraków 2021.
[82] M. Przybylski. Algorithmic computation of the Conley index for multivalued maps with no continuous selector in cubical spaces, *Schedae Informaticae*, **28** (2019) 9–24.
[83] J.M. Rassias. On approximation of approximately linear mappings by linear mappings, *J. Funct. Anal.* **46** (1982), 126–130.
[84] Th.M. Rassias. On the stability of the linear mapping in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **72** (1978), 297–300.
[85] Th.M. Rassias, P. Šemrl. On the Hyers-Ulam stability of linear mappings, *J. Math. Anal. Appl.* **173** (1993), 325–338.
[86] J.W. Robbin, D. Salamon. Dynamical systems, shape theory and the Conley index, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **8** (1988), 375–393.
[87] V. Robins, P.J. Wood, and A.P. Sheppard. Theory and algorithms for constructing discrete Morse complexes from grayscale digital images, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **33**(8) (2011), 1646–1658.
[88] F.R. Ruiz del Portal, J.M. Salazar. Fixed point index in hyperspaces: A Conley-type index for discrete semidynamical systems, *J. London Math. Soc.* **64** (2001), 191–204.
[89] K.P. Rybakowski. The Homotopy Index and Partial Differential Equations, Berlin: Springer 1987.
[90] K.P. Rybakowski, E. Zehnder. A Morse equation in Conley's index theory for semiflows on metric spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **5** (1985), 123–143.

[91] M. Schmidt and H. Lipson. Distilling Free–Form Natural Laws from Experimental Data, Science **324** (2009), 81–85.
[92] S. Smale. Morse inequalities for dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 43–49.
[93] E. Spanier. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
[94] R. Srzednicki. Generalized Lefschetz theorem and fixed point index formula, *Topology Appl.* **81** (1997), 207–224.
[95] N.E. Steenrod. Regular cycles of compact metric spaces, *Ann. Math.*, **41** (1940) 833–851.
[96] K. Stolot, Homotopy Conley index for discrete multivalued dynamical systems, *Topology Appl.*, **153** (2006), 3528-3545.
[97] A. Storjohann. Near Optimal Algorithms for Computing Smith Normal Form of Integer Matrices, in: Proceedings of the 1996 international symposium on symbolic and algebraic computation, ISAAC 1996, (1996), 267-274.
[98] A. Szymczak, The Conley index for discrete semidynamical systems, *Topology Appl.* **66** (1995) 215-240.
[99] A. Szymczak. The Conley index and symbolic dynamics, *Topology* **35** (1996), 287–299.
[100] A. Szymczak. A combinatorial procedure for finding isolating neighborhoods and index pairs, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **127A** (1997).
[101] W. Tucker. A rigorous ODE Solver and Smale's 14th problem, *Found. Comput. Math.* **2** (2002), 53–117.
[102] S.M. Ulam. A collection of mathematical problems, Interscience Publ., New York 1960.
[103] A. Zomorodian, G. Carlsson. Computing Persistent Homology, *Discrete Comput. Geom.*, **33** (2005), 249–274.
[104] Computational Homology Project:
http://chomp.rutgers.edu

Bogdan Batko

PODPIS ZAUFANY
BOGDAN
BATKO
26.05.2023 13:21:20 [GMT+2]
Dokument podpisany elektronicznie
podpisem zaufanym