

Recenzja Osiągnięcia Naukowego i całości dorobku naukowego  
w ramach postępowania habilitacyjnego o nadanie stopnia doktora habilitowanego  
doktorowi Bogdanowi Batko.

W skład Osiągnięcia Naukowego "Teoria indeksu Conleya dla wielowartościowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym" (zwanym później także dorobkiem habilitacyjnym lub rozprawą habilitacyjną) przedstawionego we wniosku doktora Bogdana Batko wchodzi pięć [H1-H5] prac wymienionych w autoreferacie. Z tych prac dwie są samodzielne [H2] i [H5], a pozostałe trzy współautorskie. Są one opublikowane w czasopiśmie, które w środowisku matematyki stosowanej i obliczeniowej uznawane są za dobre lub bardzo dobre. Pozostały opublikowany dorobek naukowy habilitanta składa się z 20 prac, z których tylko trzy dotyczą zagadnień będących przedmiotem rozprawy habilitacyjnej, a pozostałe drugiego jego nurtu badawczego mianowicie równości i nierówności funkcyjnych. Prace wchodzące w skład dorobku habilitacyjnego spotkały się już z oddźwiękiem w środowisku matematycznym pomimo faktu, że pierwsza z nich opublikowana została w roku 2016. Mają one według MathScinet 17 cytowań, w tym 9 bez auto-cytowań, a razem wszystkich cytowani 126. Wynika to z wspomnianego faktu, że opublikowane one były w latach 2016-2023 i konstrukcji bazy MathScinet, którą się posługuje. Różnica ta jest szczególnie istotna w odniesieniu do prac z pogranicza matematyki i informatyki. Dla przykładu pozycja [b11] z pozostałego dorobku doktora Batko ma według MahtScinet 31 cytowań, według Web of Science 52, a według Google Scholar 129 cytowań. Podsumowując, postrzeganie dorobku habilitanta mierzone liczbą cytowań jego prac spełnia z nadwyżką zwyczajowe normy stawiane kandydatom do tego etapu promocji naukowej.

Tematyka rozprawy habilitacyjnej dotyczy teorii indeksu Conleya dla wielowartościowych układów dynamicznych, na co składa się definicja, czyli konstrukcja, tej teorii w badanym przypadku, opis jej podstawowych własności i metod obliczania tego niezmiennika, aż do podania najprostszych zastosowań. Z perspektywy dwóch ostatnich punktów rozprawa może być uznana jako wchodząca w skład matematycznych podstaw informatyki i zastosowań matematyki i informatyki. Jest to w tej chwili wyodrębniona i bardzo mocno rozwijająca się w 21 wieku specjalność – topologia obliczeniowa i stosowana. Elementy tego co dzisiaj określa się jako indeks Conleya, takie jak twierdzenie o indeksie lokalnym H. Hopfa czy lemat M. Morse'a, pojawiały się w analizie w pierwszej połowie dwudziestego wieku. Jednak za geometryczną inspirację do wprowadzenia tego niezmiennika uważa się bezdyskusyjnie metodę retraktową T. Ważewskiego. Intensywne badania własności indeksu Conleya, metod jego efektywnego wyznaczenia, w tym przy pomocy implementacji i obliczeń komputerowych zostały zapoczątkowane w końcu lat osiemdziesiątych i początku dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku przez M. Mrozka i jego współpracowników, w tym K. Mischaikowa i H. Edelsbrunera, oraz liczną grupę uczniów profesora Mrozka. Do tej ostatniej należy doktor Bogdan Batko, przynajmniej jeśli chodzi o badania dotyczące tematyki rozprawy habilitacyjnej.

Możemy przejść do omówienia merytorycznej treści i oceny wartości prac składających

się na przedstawione osiągnięcie naukowe.

[H1]: W pracy [H1] autorzy proponują nową definicję indeksu Conleya dla wielowartościowych układów dynamicznych. Główną ideą tej pracy jest wprowadzenie pojęcia słabych par indeksowych dla takich układów. Jednym z powodów konieczności ich używania jest fakt, że dla odwzorowań wielowartościowych otoczenie izolujące nie musi określać pary indeksowej. Wymaga to też modyfikacji używanej definicji otoczenia izolującego dla tych układów, które jest mniej restryktywne niż używane w pracy T. Kaczyńskiego i M. Mrozka z 1995 narzucającego warunek metryczny odseparowania od brzegu otoczenia izolującego. Jest ono zgodne z warunkiem  $Inv(N) \subset Int(N)$  występującym w definicji klasycznej w przypadku zwykłych układów dynamicznych. Przy pomocy słabych par indeksowych określa się indeks Conleya, wykazując najpierw istnienie otoczeń izolujących, słabych potem par indeksowych i ostatecznie niezależności indeksu Conleya od wyboru takiej pary. Określony tak indeks posiada wszystkie oczekiwane własności i jest określony w dla szerszej klasy układów wielowartościowych niż poprzednio skonstruowany we wspomnianej pracy z 1995 roku, a w przypadku gdy oba niezmienniki są określone są one sobie równe. Konstrukcja wymaga przewyciężenia wielu kłopotów technicznych. Jak zaznaczają autorzy B. Batko i M. Mrozek jedną z ich motywacji było zastosowanie tej teorii do odtworzenia dynamiki na podstawie skończonej liczby próbek. Próbkowanie daje generator  $F$  dyskretnego wielowartościowego układu dynamicznego, a związany z nim układ jednowartościowy nie jest musi być jego selektorem. Autorzy zastosowali teorię indeksu Conleya bezpośrednio do wielowartościowego układu dynamicznego, a następnie wnioskowali wyniki dla związanego z nim klasycznego układu dynamicznego:

[H2]: Niniejsza praca stanowi kontynuację artykułu [H1]. Bogdan Batko dowodzi kilku klasycznych właściwości nowej wersji indeksu Conleya. Pokazuje jak bloki izolujące prowadzą do konstrukcji słabych par indeksowych. Następnie wykazana jest własność Ważewskiego (nietrywialny indeks Conleya oznacza, że zbiór niezmienniczy jest niepusty). Kolejno pokazuje się addytywność, właściwość kontynuacji homotopii indeksu Conleya, a na końcu jego przemienności. Zachodzenie wymienionych własności wymaga przyjęcia dodatkowych założeń na występujące w niej odwzorowanie(a) wielowartościowe, które to założenia nie występują (nie mają sensu) w klasycznej teorii indeksu Conleya. W artykule przedstawiono kilka przykładów wykazujących, że wyników nie da się wzmocnić tj. osłabić założeń.

[H3]: W kolejnym artykule [H3] składającym się na osiągnięcie naukowe omawianego przewodu habilitacyjnego autorzy badają dynamikę wielowartościowego układu dynamicznego generowanego na kompleksie symplecjajnym  $K$  przez kombinatoryczne pola gradientowe poprzez dyskretny układ dynamiczny na realizacji geometrycznej  $|K|$  generowany przez pewne odwzorowanie  $F : X \multimap X$ . Pojęcie kombinatorycznego pola gradientowego zostało zdefiniowane w 1998 przez R. Formana przy okazji tworzenia dyskretniej teorii Morse'a i jak nazwa wskazuje jest analogonem pola gradientowego funkcji. W poprzedniej pracy T. Kaczyński, M. Mrozek i T. Wanner, w J. Comput. Dyn. 3 (2016), podali konstrukcję takiego wielowartościowego odwzorowania  $F$ , które jest półciągle z góry i o wartościach acyklicznych. Co więcej pokazali odpowiedniość podstawowych własności dynamicznych np. rodziny zbiorów niezmienniczych wyjściowego układu dyskretnego na  $K$  i tego generowanego na realizacji geometrycznej  $|K|$ . W [H3] pokazuje się, że zgodność ta rozciąga się na indeksy Conleya, rozkłady Morse'a, i grafy Conleya-Morse'a. Jak i poprzednie praca [H3] zaopatrzona jest w przykłady.

[H4]: W kolejnej pracy [H4] wchodzącej w skład dorobku habilitacyjnego pokazują, że

wyniki metody prac [H1] i [H2] mogą być wykorzystane do polepszenia metody topologicznej rekonstrukcji dynamiki z szeregów czasowych wprowadzonej przez K. Mischaikowa, M. Mrozka, J. Reissa, A. Szymczaka, w pracy z 1999 roku. To nowe podejście wykorzystujące reprezentacje danych poprzez wielowartościowy generator jest szczególnie efektywne gdy dane próbkowania są rozproszone. Jak wiemy w metodzie przedstawionej w [H1] i [H2] nie ma potrzeby znajdowania = wykazywania istnienia selektora dla używanego odwzorowania wielowartościowego  $F$ . Tutaj istnienie generatora jednowartościowego odwzorowania będącego generatorem układu dynamicznego odpowiadającej szeregowi jest zagwarantowane w pewnym otoczeniu wykresu wspomnianego odwzorowania wielowartościowego, które tu jest odwzorowaniem kostkowym. Bardziej dokładnie, autorzy nie muszą znajdować ciągłych selektorów odwzorowania wielowartościowego, ale badać  $\epsilon$  przybliżenia jego wykresu. W przypadku wystarczająco bliskich  $\epsilon$ -przybliżeń (zwykle jeśli  $\epsilon$  jest mniejsze niż  $\frac{\delta}{2}$ , gdzie  $\delta$  jest skalą grupowania danych „data binning”), informacja o indeksie Conleya obliczona dla kostkowego, więc acyklicznego, odwzorowania wielowartościowego (zwanej osłoną słonecznikową odwzorowania) jest wystarczająca dla zastosowania tej metody. Konkretnym celem pracy jest wykorzystanie tej metody do wykazania trzech twierdzeń o punktach okresowych dyskretnych układów dynamicznych generowanych przez odwzorowanie Hënona. Praca zawiera też obszerne omówienie własności topologicznych kostkowych odwzorowań wielowartościowych, par indeksowych, i liczb Lefschetza odwzorowań indeksowych

[H5]: Artykuł stanowi kontynuację prac mających na celu wykazanie kolejnych własności dla wersji indeksu Conleya dyskretnych wielowartościowych układów dynamicznych generowanych przez odwzorowania wielowartościowe wprowadzonej przez autora wraz z M. Mrozkiem w omówionych pracy [H1] i samodzielnej [H2]. Głównym celem tej pracy jest podanie rozkładu Morse’a  $M := \{M_i | i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  izolowanego zbioru niezmienniczego  $S$  i powiązanej z takim rozkładem formuły Morse’a dla wielomianów Poincare  $p(t, M_i)$  i  $p(t, S)$ . Wykazuje się, że

$$\sum_{i=1}^n p(t, M_i) = p(t, S) + (1+t)Q(t),$$

gdzie  $G(t)$  jest szeregiem formalnym z nieujemnymi współczynnikami całkowitymi, czyli ma formuła ma taką samą postać jak klasyczna równość Morse’a. Tym samym wypełnia się lukę w stanie wiedzy dotyczącej tego niezmiennika, co będzie pozwalało na używanie formuły Morse’a w przyszłych badaniach.

Dokładniejszy i wyczerpujący opis szczegółów omawianych prac można znaleźć w autoreferacie habilitanta, choć sam autoreferat, w części dotyczącej opisu merytorycznego wyników, nie jest najmocniejszą stroną dokumentacji przewodu. Być może dlatego, że jego autor chciał zawrzeć w nim zbyt wiele informacji. Niemniej warto zaznaczyć, że pokonanie trudności technicznych w wielu miejscach rozumowań jest jedną z wartości badawczych tego cyklu prac.

Podsumowując, cykl pięciu publikacji przedstawionych jako osiągnięcie naukowe w przewodzie habilitacyjnym tworzy zwartą, spójną i powiązaną bezpośrednio ze sobą całość prac, gdyż:

- a) W pierwszych dwóch pracach tworzy się podwaliny teoretyczne nowej definicji indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych i podaje podstawowe własności tego pojęcia.

- b) W trzeciej pracy pokazuje się, że się, że nowy niezmiennik, podobnie jak znane wcześniej inne wersje może być obliczany kombinatorycznie poprzez formalizm symplecjanych pól wektorowych Formana – i na odwrót.
- c) W czwartej pracy przedstawione jest istotne zastosowanie do opisu dynamiki odwzorowania Henona poprzez wykorzystanie tej metody do odtworzenia dynamiki procesu zadanej szeregami czasowymi próbek.
- d) Na koniec, w piątej pracy uzupełnia się informację o globalnych własnościach tej nowej wersji indeksu Conleya wykazując dla niej zachodzenie równości Morse'a.

Jest to więc w jakimś sensie modelowy przykład zestawu prac stanowiących rozprawę habilitacyjną. Oczywiście, nie trudno zauważyć, że przedstawiona idea nowej definicji indeksu Conleya dla odwzorowań wielowartościowych jest oparta i rozwija wcześniejsze pomysły i konstrukcje współautorów tych prac (+ A. Szymczaka). Ale to w sumie jest to pozytywne, bo w tym wypadku jest to krok w stronę jakości, tj. znaczenia wyników, kosztem „oryginalności”. Dla osób trochę mniej obeznanych z tą częścią matematyki i informatyki, dodam, że ci współautorzy są jednymi z pionierów i liderów w teorii indeksu Conleya zwłaszcza metod komputerowych jego obliczania, metod wspomagania komputerowego dowodów, i topologii obliczeniowej w ogóle, a też w szczególności autorami twierdzenia potwierdzającego hipotezę o chaosie w słynnym atraktorze Lorenza.

Przejdźmy teraz do oceny pozostałego dorobku naukowego doktora Bogdana Batko. Wśród nich trzy [b8], [b11], i [b12], wszystkie wspólne z Marianem Mrozkiem są poświęcone tej samej tematyce co cykl prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej. Pierwsza ma charakter topologiczny, dwie pozostałe poświęcone są zwiększeniu efektywności obliczania algorytmicznego przy pomocy implementacji komputerowych. Pierwsza upraszcza stronę topologiczną druga algebraiczną tego procesu. Pozostałe z prac [b1=b20] poświęcone są równaniom i nierównościom funkcyjnym. Przypomnę, że klasyczne twierdzenie Cauchy'ego mówi, że jeśli funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest addytywna i jest ciągła to jest liniowa. Można założenie ciągłości osłabić zakładając mierzalność  $f$ , a także rozpatrywać odwzorowania z  $(\mathbb{R}, +)$  do  $(\mathbb{R}^+, \cdot)$  i na odwrót uzyskując charakteryzację  $\exp$  i  $\log$  poprzez równanie funkcyjne i dalej uogólniać rozpatrując grupy topologiczne (metryczne) jako dziedzinę i przeciwdziedzinę. W roku 1940 St. Ulam postawił pytanie: czy jeśli dla danego odwzorowania pomiędzy grupami metrycznymi  $G_1$  i  $G_2$  (z zapisem addytywnym) dla każdego  $\epsilon$  istnieje takie  $\delta$ , że jeśli  $\rho(f(x+y), f(x) + f(y)) < \delta$ , to istnieje homomorfizm  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$  taki, że  $\rho(\phi(x), f(x)) < \epsilon$  - w oryginale „Give conditions in order for a linear mapping near an approximately linear mapping to exist”. Pierwszą pozytywną odpowiedź na to pytanie podał Hyers dla odwzorowań pomiędzy przestrzeniami Banacha i  $\delta$  może być wtedy równe  $\epsilon$ . To pytanie można modyfikować, specyfikować, uogólniać rozważając nie tylko różne dziedziny i przeciwdziedziny, działania, ale też modyfikować zakładany warunek „bliskości”. Co więcej można ten warunek uzależnić od norm  $x$  i  $y$  uzależniając wielkość odchylenia od pewnej funkcji zależnej od tych norm i o określonej asymptocie wzrostu w  $\infty$ . Doprowadziło to do powstania wielu prac, z których każda jest poświęcona określonemu, zwykle innemu, zadaniu. I w takiej grupie mieszczą się wspomniane powyżej prace doktora Batko, stąd opisanie ich zawartości merytorycznej przekraczało by ramy tej recenzji. Treść tych publikacji opisana jest szczegółowo w autoreferacie habilitanta.

W podsumowaniu oceniam dorobek naukowy doktora Bogdana Batko jako solidny, konkretny i rzetelny, oraz wnoszący w jego części zwanej „osiągnięciem naukowym” istotny

wkład w rozwój teorii będącej przedmiotem badań.

Na koniec możemy przejść do omówienia niepublikacyjnej części dorobku doktora Batko, czyli jego aktywności organizacyjnej, popularyzatorskiej, i dydaktycznej. Ten dorobek wygląda całkiem niezłe, jeśli się weźmie pod uwagę, że Bogdan Batko, przez wiele lat pracował równoległe na dwóch uczelniach co jak nie trudno się domyśleć było spowodowane uwarunkowaniami ekonomicznymi. Jednak w swej pracy starał się nie tylko przekazywać wiedzę bezpośrednio jako opiekun ponad 100 prac licencjackich, magisterskich i inżynierskich z matematyki, informatyki i zarządzania [!], ale też miał udział w tworzeniu planów i programów studiów. Tym samym „transferował” swoje doświadczenie nabyte w Krakowie do WSB-NLU i PWSZ w Nowym Sączu, co samo w sobie jest wartością. Popularyzacja jego wyników na konferencjach, czy też intensywność kontaktów naukowych z innymi ośrodkami (w tym z spoza Polski) mieści się w normie, zwłaszcza gdy weźmie się pod uwagę powyżej opisane uwarunkowania. Doktor Batko nie unikał też podejmowania funkcji kierowniczych (wicedyrektor, prodekan), co w dzisiejszych realiach akademickich w Polsce jest raczej dodatkowym obciążeniem niż wyróżnieniem. W konsekwencji, w tej części aktywności naukowej dorobek doktora Bogdana Batko jest dobry i zauważalny, a w kontekście społecznym przynoszący korzyść środowisku.

W konkluzji finalnej, uważam, że przedstawiony jako osiągnięcie naukowe zbiór prac, pozostały dorobek publikacyjny doktora Bogdana Batko, oraz jego dorobek w popularyzacji i matematyki i informatyki, oraz aktywność organizacyjna spełniają warunki wymagań art. 221 ust. 14 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, a także innych wcześniejszych ustaw o stopniach naukowych, i co ważniejsze zwyczajowych wymagań środowiskowych wobec kandydatów do tej promocji naukowej. W związku z tym wnioskuje, o dopuszczenie doktora Bogdana Batko do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

Poznań, 12.03.2024