Politechnika Łódzka

Prof. dr hab. Wojciech Kryszewski
Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej
tel. kontaktowy: 602 730 893

Łódź, 20 marca 2024 r.

Ocena osiągnięć dr Bogdana Batko
w związku z ubieganiem się o nadanie stopnia naukowego
doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych,
w dyscyplinie matematyka

Dr Bogdan Batko jest adiunktem na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego. Stopień naukowy doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskał w 2000 roku w na podstawie rozprawy pt. *Stabilność alternatywnych równań funkcyjnych.* Promotorem w jego przewodzie doktorskim był prof. dr hab. Józef Tabor.

W kwietniu 2023 r. dr Batko złożył za pośrednictwem Rady Doskonałości Naukowej wniosek do Rady Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Jagiellońskiego o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia naukowego doktora habilitowanego, w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka na podstawie osiągnięcia naukowego obejmującego cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem *Teoria indeksu Conleya dla wielowartościowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym* składającego się z następujących pięciu publikacji ([1]):

[H1] B. Batko, M. Mrozek, *Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 15 (2016), 1143–1162; DOI: 10.1137/15M1046691.

[H2] B. Batko, *Weak index pairs and the Conley index for discrete multivalued dynamical systems. Part II: properties of the Index*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 16 (2017), 1587–1617; DOI: 10.1137/16M1097584.

[H3] B. Batko, T. Kaczynski, M. Mrozek i Th. Wanner, *Linking combinatorial and classical dynamics: Conley index and Morse decompositions*, Found. Comput. Math. 20 (2020), 967–1012; DOI: 10.1007/s10208-020-09444-1.

[H4] B. Batko, K. Mischaikow, M. Mrozek i M. Przybylski, *Conley index approach to sampled dynamics*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 19 (2020), 665–704; DOI: 10.1137/19M1254404.

[H5] B. Batko, *The Morse equation in the Conley index theory for discrete multivalued dynamical systems*, J. Dyn. Diff. Equat. (2022); DOI: 10.1007/s10884-022-10136-3.

[1] W recenzji wykorzystuję numerację przedstawioną w autoreferacie habilitanta oraz wykazie jego osiągnięć.

Wnioskowi towarzyszy dokumentacja zawierająca m.in. autoreferat, wykaz osiągnięć naukowych oraz stosowne oświadczenie współautorów potwierdzające istotny większościowy udział dra Batko w powstaniu trzech artykułów [H1], [H3] i [H4] wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego.

Poniższa recenzja składa się z czterech części. W pierwszej części omówię skrótowo zawartość merytoryczną i wyniki uzyskane przez habilitanta w publikacjach składających się na osiągnięcie naukowe. W drugiej części dokonam oceny osiągnięcia habilitacyjnego, a w trzeciej – oceny jego pozostałych wyników badawczych oraz aktywności naukowej zgodnie z art. 219 ust. 2 Ustawy „Prawo o szkolnictwie wyższym" z dn. 20 lipca 2018 r. (tekst jednolity: Dz. U. z 2023 r. poz. 742 z późn. zm.). W czwartej części przedstawię konkluzję recenzji.

Omówienie wyników osiągnięcia habilitacyjnego: Dorobek habilitacyjny p. dra. Bogdana Batko dotyczy zagadnień związanych z zachowaniem układów dynamicznych z czasem dyskretnym, z uwzględnieniem, jako adekwatnego modelu, tzw. *wielowartościowych* układów dynamicznych postaci $F : X \times \mathbb{Z} \multimap X$, gdzie X jest przestrzenią topologiczną *stanów* układu, $F_n := F(\cdot, n) : X \multimap X$, $n \in \mathbb{Z}$, jest górnie półciągłym (USC) odwzorowaniem wielowartościowym takim, że $F_m \circ F_n = F_{n+m}$ dla $m \in \mathbb{Z}$, o ile $nm \geqslant 0$, $F_0(x) = \{x\}$ dla $x \in X$ oraz $F_{-1} = F_1^{-1}$. W szczególności dla $n \in \mathbb{Z}$, $F_n = F_1^n$, gdy $n \geqslant 0$ i $F_n = [F^{-1}]^{-n}$ dla $n < 0$. Z tego względu ma sens pisać $F := F_1$ i mówić o układzie generowanym przez F.

W tym miejscy należy zwrócić uwagę na genezę rozważanych układów wielowartościowych. Nie biorą się one bowiem *deus ex machina*, jak czasem bywa w pracach, które podejście wielowartościowe uzasadniają jedynie np. niedeterministycznym charakterem ewolucji lub w sposób *stricte* akademicki, lecz pojawiają się w dość naturalny sposób jako wygodne narzędzie do badania dynamiki tzw. układów próbkowania. (Domyślnym) punktem wyjścia habilitanta jest zwykły układ dynamiczny generowany przez odwzorowanie ciągłe $f : X \to X$, którego rygorystyczny opis analityczny lub numeryczny nie jest znany, a którego zachowanie odzwierciedla jedynie sygnał dyskretny otrzymany w wyniku próbkowania trajektorii; przez próbkowanie należy rozumieć skończony zbiór $A \subset X$ punktów oraz ich przybliżonych wartości, przy czym próbki te mogą być dostępne nie bezpośrednio, lecz tylko poprzez odpowiedni pomiar. Taka sytuacja może mieć miejsce z wielu powodów, które habilitant właściwie identyfikuje. Problem, czy taka skończona próbka wystarcza do otrzymania wystarczającej wiedzy na temat układu jest trudny, zwłaszcza w przypadku dynamiki chaotycznej, gdy ma się do czynienia z szumem, dryfem parametrów, a wyniki są obarczone błędem eksperymentalnym. Zakładamy, że $X \subset \mathbb{R}^d$ i niech $g := f|_A : A \to X$ będzie odwzorowaniem próbkującym f. Rekonstrukcję f (idącą w ślad pomysłów z pracy [61]) otrzymuje się następująco (metoda ta wyjaśniona jest szkicowo w autoreferacie, a dokładnie i ze szczegółami w pracy [H4] – patrz też np. rys. 1.1). Dokonuje się rozbicia przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na sieć d-wymiarowych kostek o odpowiednio małej średnicy; dla $x \in X$ bierze się gwiazdę $K(x)$ punktu x względem rozważanego pokrycia kostkowego; a $F(x)$ jest gwiazdą uwypuklenia zbioru $g(K(x) \cap A)$ względem tego pokrycia. Okazuje się, że tak skonstruowane odwzorowanie F, tzw. słonecznikowa otoczka odwzorowania g, jest USC i jeżeli dodatkowo ma wartości acykliczne, to dopuszcza stosowanie metod topologii algebraicznej, bowiem F indukuje homomorfizm na kohomologiach Alexandera-Spaniera $H^*(X)$ przestrzeni X. Jednocześnie, co godne podkreślenia, odwzorowanie F nie musi posiadać ciągłego selektora.

Sam pomysł opisanego podejścia uważam za ciekawy i potencjalnie nośny. Znajduje on istotne zastosowania np. w kontekście ścisłej analizy numerycznej równań różniczkowych zapoczątkowanej przez M. Mrozka.

Badania habilitanta można więc ulokować w specyficznie rozumianej teorii dynamiki sygnałów dyskretnych lub topologicznej analizie danych, bowiem zadaniem badawczym, które autor stawia jest stworzenie określonych narzędzi topologicznych, za pomocą których analiza próbki pozwoli na odczytanie adekwatnej informacji o wyjściowym układzie ciągłym. Przy tym zasadniczym tematem badawczym dra Batko są zagadnienia związane z niezmiennikiem topologicznym zwanym indeksem Conleya, rozkładami i relacjami Morse'a dla wielowartościowych i dyskretnych układów dynamicznych z wykorzystaniem technik kombinatorycznych. Z wielu wcześniejszych źródeł wiadomo, że są to narzędzia skuteczne w badaniu różnych zjawisk dynamicznych. Trzeba zaznaczyć, że teoria indeksu Conleya (w wersji homotopijnej i kohomologicznej) dla wielowartościowych układów dynamicznych, a także układów dyskretnych była przedmiotem zainteresowania wielu matematyków i ma swoją historię (w tym kontekście należy wymienić przede wszystkim M. Mrozka, lecz również A. Szymczaka, T. Kaczyńskiego i K. Stolot); bogata literatura problemu przytoczona jest w autoreferacie. Starsze konstrukcje (przeprowadzane przy określonych założeniach) nie są jednak z pewnych względów, o których mowa poniżej, zadowalające. Stąd wynikła potrzeba stworzenia nowej teorii. To właśnie jest głównym przedmiotem badań habilitanta. Cel ten jest zrealizowany w serii pięciu wymienionych powyżej publikacji powstałych na przestrzeni ostatnich 8 lat.

Prace [H1] i [H2] poświęcone są konstrukcji i własnościom indeksu typu Conleya dla układu dynamicznego generowanego przez USC odwzorowanie wielowartościowe o określonej strukturze wartości (mówiąc w uproszczeniu: wartości F są ciągłymi obrazami zbiorów acyklicznych) określonego na lokalnie zwartej przestrzeni X. Jak wiadomo indeks Conleya służy do wykrywania zbiorów niezmienniczych układu i jego konstrukcja opiera się na pojęciu otoczenia izolującego oraz tzw. pary indeksowej. O ile w przypadku ciągłym (nawet wielowartościowym), pojęcia te nie budzą większych kontrowersji, o tyle w przypadku dyskretnym funkcjonują różne podejścia. W [H1] zaproponowano pojęcie tzw. słabej pary indeksowej (jako pary pewnych zwartych podzbiorów otoczenia izolującego), w odpowiedni sposób adaptując podejście Mrozka, i przeciwstawiając je pojęciom otoczenie silnie izolującego i pary indeksowej (z wcześniejszych prac Mrozka i Kaczyńskiego, Szymczaka i Stolot). W serii przykładów widać, że takie podejście jest z paru względów lepsze: pozwala rozważać szersze klasy odwzorowań i wykrywa zbiory niezmiennicze, których „stara" teoria nie wykrywa. Głównymi rezultatami pracy [H1] są: twierdzenie o istnieniu słabych par indeksowych (Theorem 4.12), konstrukcja (kohomologicznego) indeksu Conleya, jako obrazu w podkategorii graduowanych modułów nad $\mathbb{Z}$ z monomorfizmem funktora Leraya modułu kohomologii $H^*(P)$ słabej pary indeksowej P i tzw. odwzorowania indeksowego, czyli pewnego endomorfizmu $H^*(P)$ (Definition 6.3), oraz dowód poprawności tej konstrukcji (Theorem 6.4) ([2]). Definicja słabej pary indeksowej i konstrukcja indeksu Conleya jest technicznie złożona i raczej trudno by było ja tutaj zwięźle opisać. Powiem jedynie, że aparat algebraiczny i ógólno-topologiczny", którym habilitant dysponuje jest niebanalny i wskazuje na jego spore obycie w tej materii. Warto może powiedzieć, że indeks Conleya w wersji ciągłej nie wymaga użycia redukcji Leraya. W przypadku dyskretnym jest to potrzebne z podobnych powodów jak potrzebna jest redukcja Leraya w teorii Lefschetza dla odwzorowań zwartych absolutnych retraktów otoczeniowych. Pracę [H1] kończy interesująca obserwacja dotycząca możności modyfikacji wyjściowego układu w celu uzyskania układu dopuszczającego silne otoczenia izolujące i pary indeksowe. Tu raz jeszcze warto powiedzieć, że o ile w przypadku jednowartościowym słabe pary indeksowe nie sa potrzebne, to – jak wskazują przykłady – ogólny przypadek wielowartościowy wymaga ich użycia. To nie jedyna zaleta tego podejścia.

Praca [H2] jest kontynuacją [H1] i jest poświęcona badaniom własności indeksu Conleya: własności istnienia (własność Ważewskiego), tj. kryterium lokalizacji niepustych zbiorów niezmienniczych, własności addytywności, kontynuacji i przemienności. Z racji na brak miejsca nie będę formułował tych własności ufając, że wiadomo o co chodzi. Należy powiedzieć, że uzyskawszy wymienione własności skonstruowany indeks stanowi pełnowartościowe narzędzie do badania dynamiki potoków dyskretnych z punktu widzenia zbiorów niezmienniczych. Podobała mi się tu również konstrukcja słabej pary indeksowej w bloku izolującym [H2, Theorem 4.4], co jest nieco prostsze niż konstrukcja w przypadku otoczenia izolującego i może mieć znaczenie z obliczeniowego punktu widzenia.

Kolejną pracą, ściśle tematycznie związaną z poprzednio omówionymi jest praca [H5], w któ-

[2] W autoreferacie wkradł się błąd: twierdzenie 6 z autoreferatu to Th. 6.4 z pracy [H1], a nie 5.5

rej habilitant przedstawia pojęcie rozkładu Morse'a [H1, Def. 3.9] i jego własności, które są w dużej mierze analogiczne do własności zwykłych jednowartościowych układów, lecz pewne istotne różnice w dowodach wynikają z niejednoznaczności rozwiązań. W dalszej części przedstawia analogony twierdzeń o relacjach Morse'a dla jednowartościowych potoków dyskretnych. W tym podejściu ważną rolę odgrywa pojęcie F-pary i odpowiednio dobranych trójek zbiorów, dzięki którym pojawia się twierdzenie [H5, 4.7] wiążące indeksy Conleya dla elementów pary repeler-atraktor zbioru niezmienniczego.

W pracy [H4] znajdujemy zastosowanie przedstawionej w pracach [H1, H2] teorii indeksu Conleya w zagadnieniach dynamiki próbkowej układy generowanego przez ciągłe odwzorowanie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, o którym już wspominałem we wstępie do recenzji. Ta ciekawa praca przyniosła mi, jako osobie, która sporą część dorobku poświęciła różnym aspektom teorii i zastosowań odwzorowań wielowartościowych, wiele satysfakcji. We wstępie autorzy przedstawiają 3 wyniki dotyczące konkretnych próbek iteracji odwzorowania Hénona i rekonstrukcji ich dynamiki. Następnie formułują na poziomie ogólnym kilka rezultatów aproksymacyjnych, które orzekają, że jeśli wyjściowy generator układu F jest odwzorowaniem USC o wartościach wypukłych lub F jest odwzorowaniem USC kostkowym (to pojęcie jest zdefiniowane w [H4] i przypomina odwzorowania rozważane przez Szymczaka w [98]) oraz na wartości ściągalne, to dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ i otoczenia izolującego N (względem F) znajdzie się ε-aproksymację wykresową f odwzorowania F, która „dziedziczy" od F „dane conleyowskie", a więc otoczenie izolujące i słabą parę indeksową i, w konsekwencji, indeksy Conleya części niezmienniczej otoczenia N względem F i f są równe, a stowarzyszone odwzorowania indeksowe są sprzężone. Mówią o tym twierdzenia [H4, Theorem 5.10, 5.13]. To ciekawe wyniki o złożonych i nietrywialnych dowodach. Twierdzenie [H1, Th. 5.13] dotyczące odwzorowań kostkowych o wartościach ściągalnych jest „dobrze skrojone" dla dynamiki próbkowej i odwzorowań, które się tam pojawiają. W dalszej części omawianej pracy habilitant uogólnia na przypadek słabych par indeksowych dynamiki próbkowej rezultatów z [99] mówiących o tym, w jaki sposób indeks Conleya dostarcza informacji o dynamice nieliniowej. Rzecz w tym, że informacja o indeksie Conleya dla rekonstruowanego potoku f pochodzi z konstrukcji otrzymanej w oparciu o słabe pary indeksowe. Zatem wyniki z [99] nie znajdują tu bezpośredniego zastosowania. Autorzy posługując się słabymi parami indeksowymi rozważają sytuację, w której otoczenie izolujące N dla f rozkłada się na rozłączną sumę n zbiorów zwartych N_i, $i = 1, ..., n$. W twierdzeniu [H4, Th. 9.1], dla danej słabej pary indeksowej P w N pokazują istnienie semisprzężenia funkcji f na części niezmienniczej S otoczenia N z dynamiką shiftu na n-symbolach Σ_A, gdzie A jest $(n \times n)$ macierzą przejścia odwzorowania indeksowego indukowanego przez P. Związek ten wykorzystany jest również do badania istnienia punktów okresowych.

Podejście i aparat pojęciowy potrzebny do dowodu twierdzenie [H4, Th, 9.1] wykorzystany jest także w dowodzie twierdzenia [H4, Th. 7.5] o istnieniu orbity (rozwiązania) dla potoku dyskretnego wyznaczonego przez f przechodzącej przez składowe N_i w zadanym porządku, a także do znajdowania punktów okresowych f pod warunkiem nietrywialności liczby Lefschetza odwzorowania indeksowego – twierdzenie [H4, Th. 7.6].

Ostatnią pracą, którą omówię (co jest, zresztą, zgodne z porządkiem prezentacji w autoreferacie) jest [H3]. Lektura tej pracy sprawiła mi wiele trudności z racji na nieznaną mi problematykę tzw. kombinatorycznych pól wektorowych, pojęcia pochodzącego od Formana z pracy [35], oraz kombinatorycznego potoku wielowartościowego wyznaczonego przez iterację pola. Są to pewne odwzorowania $\mathcal{X} \multimap \mathcal{X}$, gdzie $\mathcal{X}$ jest abstrakcyjnym kompleksem symplicjalnym, a raczej jego rodziną sympleksów. Obiekty te pozwalają na budowę teorii Conleya i Morse'a, w tym pojęć zbioru niezmienniczego, indeksu Conleya, atraktorów, repelerów, rozkładu Morse'a zbioru niezmienniczego itp. Po wprowadzeniu niezbędnych pojęć, autorzy rozważają kombinatoryczne pole wektorowe $\mathcal{V}$ na $\mathcal{X}$ i przedstawiają bardzo złożoną konstrukcję pewnego odwzorowania wielowartościowego F określonego na bryle $|\mathcal{X}|$ kompleksu $\mathcal{X}$, którego dynamika (a w zasadzie dynamika dyskretnego układu wielowartościowego generowanego przez F) odzwierciedla (w odpowiednio zdefiniowanym znaczeniu tego słowa) dynamikę kombinatorycznego potoku $\Pi_{\mathcal{V}}$ wyznaczonego przez $\mathcal{V}$ (twierdzenie [H3, Th. 2.1]). Układ generowany przez F jest stosunkowo prosty, gdyż skonstruowane odwzorowanie F indukuje identyczność na kohomologiach bryły $|\mathcal{X}|$ i – co za tym idzie – jego indeks Conleya to moduł kohomologii słabej pary indeksowej. Ponadto autorzy dowodzą [H3, Th. 5.4], że indeksy Conleya zbioru niezmienniczego układu $\Pi_{\mathcal{V}}$ i odpowiadającego mu zbiory niezmienniczego dla układu generowanego przez F są izomorficzne, a ich grafy Conleya-Morse'a pokrywają się. Są to – jak sądzę – ważne wyniki, lecz trudno mi ocenić ich wartość użytkową.

To kończy mój pobieżny przegląd merytorycznej zawartości osiągnięcia naukowego dra Batko.

Ocena osiągnięcia naukowego: Uważam, że cykl publikacji przedstawionych jako osiągnięcie naukowe dra B. Batko stanowi wartościowy i znaczący wkład do matematyki. Problematyka badawcza, której ten dorobek dotyczy jest ważna z punktu widzenia teorii układów dynamicznych, w tym dyskretnych układów dynamicznych, topologicznej analizy danych i dynamiki kombinatorycznej. Tematyka ta, w zakresie pojęciowym dotyczy dość wąskiej specjalizacji obejmującej topologię ogólną, topologię algebraiczną i geometryczną, topologię dyskretną i teorię układów dynamicznych, ze szczególnym uwzględnieniem teorii Conleya zbiorów niezmienniczych. Jest to, jak stwierdziłem, dziedzina dość wąska, lecz zapewne ważna z punktu widzenia zastosowań i przyciągająca uwagę nie małej grupy badaczy, w tym – co godne podkreślenia – badaczy z pogranicza matematyki, a więc np. fizyków teoretyków i inżynierów.

Wśród 5 artykułów zamieszczonych w cyklu publikacyjnym 3 prace są współautorskie, a ich współautorami są matematycy o ustalonej renomie: M. Mrozek, K. Mischaikow, T. Kaczyński i Th. Wanner, co dobrze świadczy o habilitancie i jego roli w środowisku. Prace wchodzące w skład cyklu opublikowane są w bardzo dobrych, międzynarodowych i cenionych przez środowisko czasopismach. Warto poinformować, że prace dra Batko, mimo że dość świeże (ukazały się w ostatnich 7 latach) były cytowane 19 razy (w tym 9 razy przez matematyków obcych) – źródłem tych danych jest baza Web of Science na dzień 21 marca 2024 r. Część z tych cytowań ma charakter tylko enumeratywny, lecz część – jak najbardziej merytoryczny. Należy sądzić, że osoba autora i jego badania są znane w środowisku.

Artykuły zawarte w cyklu habilitacyjnym są na ogół długie, co jest uzasadnione zważywszy na ich zawartość i ciężar gatunkowy, złożone pod względem merytorycznym i technicznym, lecz są starannie przygotowane, również pod względem redakcyjnym i językowym. Autor dba o wszechstronne przedstawienie problematyki i literatury przedmiotu swoich badań. Przedstawione rozumowania są skomplikowane i niekiedy bardzo żmudne. Wskazują na znakomitą orientację autora (autorów) w materii poruszanej tematyki badawczej. Doktor Batko udowodnił, że jest bez wątpienia dobrym specjalistą, matematykiem o dużym potencjale badawczym, wiedzy i kulturze matematycznej.

O wynikach dra Batko wypowiadałem się już pozytywnie wyżej. Jestem zdania, że konstrukcja indeksu Conleya dla otoczeń izolujących (a nie silnych otoczeń izolujących) przy pomocy słabych par indeksowych, szczególnie z punktu widzenia odwzorowań kostkowych i ich roli w rekonstrukcji próbkowej dynamiki zwykłych (tj. jednowartościowych) układów dynamicznych jest ważnym osiągnięciem – na razie przede wszystkim w warstwie abstrakcyjnej.

Moje delikatne zastrzeżenie ma związek z zastosowaniami zaprezentowanego podejścia. Wprawdzie autor ilustruje wyniki teoretyczne pewnymi przykładami zastosowań (są to 2 przykłady z pracy [H1], kilka bardzo teoretycznych przykładów w [H2] oraz twierdzenia 1.2, 1.3 i 1.4 dotyczące odwzorowania Hénona na odcinku z pracy [H4]). Sadzę, że spektrum zastosowań metody autorstwa dra Batko (wraz ze współpracownikami) w praktycznych zagadnieniach układów dynamicznych jest szersze. Te opinię zweryfikuje zapewne przyszłość. Trochę szkoda, że brak ogólnych przekonujących przykładów w osiągnięciu naukowym habilitanta.

Mam także pewne uwagi na temat użycia metod topologii algebraicznej, którą dr Batko stosuje, jak sądzę, nieco zbyt syntetycznie. Nie jest np. jasne, jaki pierścień współczynników teorii kohomologii jest używany (można się domyślić, że chodzi o pierścień $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, a więc w konsekwencji później jest mowa o $\mathbb{Z}$-modułach i $\mathbb{Z}$-modułach z gradacją); dlaczego autor uparcie używa funktora Alexandera-Spaniera, gdy w pracy rozważane są przede wszystkim pary zwarte, dla których teoria A.-S. jest kanonicznie izomorficzna z prostszą i lepiej znana teorią Čecha. Mówiąc o morfizmach (w kontekście odwzorowań wielowartościowych) autor odwołuje się do monografii [41], gdzie używany jest formalizm teorii homologii Čecha o zwartych nośnikach i współczynnikach w ciele. To, oczywiście, nie ma większego znaczenia z racji na twierdzenie Vietorisa i Begle'a-Vietorisa, lecz o sytuacji rozważanej przez habilitanta piszą raczej inni autorzy; dotyczy to również samego pojęcia morfizmu. Kolejna kwestia odnosi się do funktora redukcji Leraya endomorfizmu $\mathbb{Z}$-modułów z gradacją do monomorfizmu i jego wykorzystania w rozważaniach na temat relacji Conleya-Morse'a. Być może nie zauważyłem (lub nie umiem dostrzec, że się gdzieś kryją) założeń implikujących skończony typ redukcji Leraya modułu kohomologii słabej pray indeksowej (czyli tego, że odwzorowanie indeksowe jest endomorfizmem Leraya) bez czego pojęcie wielomianu Hilberta-Poincaré (którego autor zresztą nigdzie nie definiuje) nie ma raczej sensu. Sadzę, że okoliczności pozwalające na otrzymanie takich warunków można uzyskać w większości przypadków poprzez odpowiednio zastosowane włożenie Arensa-Eellsa i faktoryzację par indeksowych przez zwarte ANR-y, ale jednak należałoby o tym (szczególnie w pracy [H5]) dokładniej napisać. Nie jest też jasne, czemu w paru miejscach autor pisze o tzw. funktorze Szymczaka, podczas gdy nie robi z niego żadnego użytku.

Nie sądzę również, że autoreferat towarzyszący osiągnięciu jest bardzo dobrze napisany. Z jednej strony habilitant stara się przedstawić swój dorobek w dość szerokiej perspektywie, i to jest dobre, lecz w wielu miejscach lektura autoreferatu jest utrudniona przez brak sprecyzowania omawianych pojęć, co zmusza czytelnika do sięgania do prać źródłowych. Nie jest to, samo w sobie, złe, bo to są ciekawe prace, ale nieco komplikuje życie.

Tych kilka krytycznych uwag nie zmienia jednak mojej ogólnej bardzo pozytywnej oceny osiągnięcia p. dra Batko. Jestem zdania, że jego osiągnięcie habilitacyjne stoi na wysokim poziomie i jest cennym wkładem do teorii dyskretnych układów dynamicznych. Ponadto dowodzi, że dr Batko jest już całkiem samodzielnym badaczem, gotowym do podjęcia indywidualnej opieki nad młodszymi ludźmi (co, zresztą, już z powodzeniem czyni).

Ocena innych osiągnięć naukowo-badawczych, dorobku dydaktycznego, popularyzatorskiego i w zakresie współpracy międzynarodowej: Uważam, że pozostały dorobek naukowy dra Batko nie budzi zastrzeżeń. Jest to dorobek dość bogaty i zróżnicowany. Poza omówionym cyklem prac w ramach osiągnięcia habilitacyjnego, dr Bogdan Batko jest autorem (lub współautorem) 20 prac opublikowanych w dobrych czasopismach. Jest wśród nich 11 prac autorskich, pozostałe to prace współautorskie, a jego współpracownikami byli J. Tabor, Z. Kominek, M. Mrozek i J. Brzdęk. Prace (włącznie z pracami z cyklu habilitacyjnego) cytowane były ok. 150 razy, a H-index p. Batko wynosi 7. Warto odnotować przyrost tych liczb na przestrzeni kilku ostatnich miesięcy. Myślę, że podane współczynniki bibliometryczne mieszczą się w średniej dla dobrych kandydatów do stopnia doktora habilitowanego, świadczą na korzyść dra Batko i przekonują, że jego dokonania są widoczne.

Chcąc dochować porządku chronologicznego jako pierwszą z dziedzin zainteresowań badawczych dra Batko leżących poza nurtem badań związanych z habilitację wymienię dziedziną związaną z tematyką jego doktoratu, tj. teorię równań funkcyjnych i kilku jej, raczej abstrakcyjnych aspektów. Dotyczą one stabilności Hyersa-Ulama (której poświęca się bardzo wiele prac, nie wszystkich niestety interesujących) niekiedy w mocno abstrakcyjnych przestrzeniach (np. przestrzeniach Riesza, czyli kratach wektorowych), rozwiązań przybliżonych równań funkcyjnych, a także tzw. funkcji aproksymatywnie wypukłych. Jest to tematyka chyba raczej niszowa. Nie ma w recenzji miejsca na pogłębioną analizę zawartości merytorycznej tej części dorobku dra Batko. Sadzę, że jest to dorobek wartościowy i również wskazuje na dobrą wiedzę autora o tej gałęzi matematyki. Jednakże jestem zdania, że dobrze iż na swej drodze naukowej dr Batko spotkał profesora Mrozka, zainteresował się problematyką, którą M. Mrozek uprawia, i zdołał dość radykalnie zmienić swój podstawowy kierunek naukowy. Było to z pewnością niełatwe i wymagające zadanie.

Tym nowym kierunkiem badawczym jest topologiczna teoria układów dynamicznych (w tym teoria indeksu Conleya), o czym była mowa powyżej, a także kombinatoryczne i konstruktywne podejście do topologii algebraicznej, czyli ważnego nurtu w ramach tzw. topologii stosowanej, dziedziny ważnej i dziś modnej, bo bliskiej wielu nietrywialnych zastosowań. W pracach [b11, b12] dr Batko wraz M. Mrozkiem podejmują zagadnienie konstrukcji pewnego, jak należy sadzić efektywnego algorytmu redukcji do obliczania homologii dużych wielościanów symplicjalnych lub kostkowych. Jest to problematyka dla mnie raczej obca, więc ograniczę się tylko do wyrażenia nadziei, że są to badania ważne i skuteczne, a 54 cytowania pracy [b11] najwyraźniej tę opinię potwierdzają. Podobała mi się praca [b8] dotycząca charakterystyki Eulera indeksu Conleya zbioru niezmieniczego ciągłego układu dynamicznego, której nietrywialność prowadzi do istnienia punktów okresowych w tym zbiorze (należy zauważyć, że tutaj i w autoreferacie autor zadbał już o dyskusję skończonego typu (ko)homologicznego indeksu Conleya).

Osiągnięcia dra Batko w działalności około-naukowej są bogate i bardzo zadowalająca. Odbył kilka staży naukowych, w szczególności spędził rok w znakomitym Rutgers University, gdzie nawiązał z sukcesem współpracę z autorytetem w dziedzinie topologii stosowanej, profesorem K. Mischaikowem. Uczestniczył z referatami na wielu konferencjach, mityngach naukowych i seminariach. Dał się poznać jako dobry mówca i aktywny uczestnik życia naukowego, a także współpracownik licznych czasopism. Brał także udział jako wykonawca w realizacji projektów naukowych finansowanych ze środków KBN, MNiSzW, NCN i źródeł zagranicznych.

Dr Batko ma spore doświadczenie i osiągnięcia dydaktyczne; są one wymienione w wykazie osiągnięć i w autoreferacie. Na uwagę zasługuję rozpoczęta współpraca i opieka nad uczestnikami studiów doktoranckich na UJ. To bez wątpienia dobry zadatek na przyszłą opiekę nad rozwojem młodych kadr, szczególnie, że współpraca dotyczy matematyki komputerowej, dziedziny istotnej i nie reprezentowanej przez wielu matematyków.

Podsumowanie: Biorąc pod uwagę powyższą recenzję oraz sformułowane już oceny stwierdzam, że osiągnięcie habilitacyjne pt. *Teoria indeksu Conleya dla wielowartościowych układów dynamicznych z czasem dyskretnym*, a także całość dorobku naukowego i organizacyjnego pana dra Bogdana Batko **spełnia** z pewnym naddatkiem wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane przed osobami ubiegającymi się o stopień doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych, w dyscyplinie matematyka. Tym samym z przekonaniem **rekomenduję** Komisji Habilitacyjnej nadanie doktorowi Bogdanowi Batko stopnia doktora habilitowanego.

Wojciech Kryszewski