

Autoreferat

1 Imię i nazwisko

Kamila Kliś–Garlicka

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe – z podaniem nazwy miejsca i roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy

1996 dyplom magistra matematyki

Instytut Matematyki

Wydział Matematyki i Fizyki

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Tytuł pracy: "Prostowalność układów dynamicznych"

Promotor: dr Krzysztof Ciesielski,

2003 dyplom doktora nauk matematycznych

Instytut Matematyczny

Polska Akademia Nauk

Tytuł pracy: "Hyperrefleksywność i k -hyperrefleksywność podprzestrzeni operatorów"

Promotor: prof. dr hab. Marek Ptak

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

1996-2004 Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Katedra Zastosowań Matematyki

Asystent

od 2004 Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Katedra Zastosowań Matematyki

Adiunkt

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy

Osiągnięcie naukowe:

Cykl powiązanych artykułów naukowych o tytule:

Zawężenia operatorów mnożenia na przestrzeni L^2 z miarą Lebesgue’a na okręgu jednostkowym i operatory sprzężenia

Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe:

- [O1] M. C. Câmara, J. Jurasik, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak. Characterizations of asymmetric truncated Toeplitz operators. *Banach J. Math. Anal.*, 11:899–922, 2017.
- [O2] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Compressions of multiplication operators and their characterizations. *Results in Mathematics*, 75(157):1–13, 2020. DOI:10.1007/s00025-020-01283-4.
- [O3] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Conjugations in L^2 and their invariants. *Anal. Math. Phys.*, 10(22), 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13324-020-00364-5>.
- [O4] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Conjugations in $L^2(H)$. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 92:48, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00020-020-02601-9>.
- [O5] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Intertwining property for compressions of multiplication operators. *Results in Mathematics*, 77(140):1–20, 2022. DOI:10.1007/s00025-022-01673-w.
- [O6] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Shift invariance and reflexivity of compressions of multiplication operators. *Forum Mathematicum*, 34:893–905, 2022. DOI:10.1515/forum-2021-0129.
- [O7] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak. Asymmetric truncated Toeplitz operators and conjugations. *Filomat*, 33(12):3697–3710, 2019. DOI: <https://doi.org/10.2298/FIL1912697C>.
- [O8] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak. Complex symmetric completions of partial operator matrices. *Lin. Multilin. Alg.*, 69(8):1446–1467, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1631246>.

4.1 Wstęp

Niech $\mathcal{H}$ będzie zespoloną ośrodkową przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Oznaczmy przez $B(\mathcal{H})$ algebrę wszystkich ograniczonych operatorów liniowych na $\mathcal{H}$. Operatorem sprzężenia nazywamy antyliniowy operator $C: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ taki, że $C^2 = id_{\mathcal{H}}$ oraz

$$\langle Ch, Cg \rangle = \langle g, h \rangle$$

dla $h, g \in \mathcal{H}$, innymi słowy C jest antyliniową izometryczną inwolucją.

Mówimy, że operator $A \in B(\mathcal{H})$ jest C -symetryczny, jeśli $CAC = A^*$. Jest to równoważne symetrii A ze względu na formę dwuliniową $[f, g] = \langle f, Cg \rangle$. Operator A jest nazywany zespolono symetrycznym, jeśli istnieje operator sprzężenia C taki, że A jest C -symetryczny.

Prowadzone od wielu lat badania operatorów sprzężenia w przestrzeniach Hilberta i ich relacji z operatorami liniowymi mają silną motywację w temacie operatorów zespolono symetrycznych. Wiele istotnych klas operatorów takich jak operatory normalne, operatory Hankela, macierze Toeplitza i obcięte operatory Toeplitza, jak i dobrze znane operatory całkowe i te powiązane z problemem spektralnym w nie-hermitowskiej mechanice kwantowej, należy do tej klasy.

Jedną z najważniejszych klas operatorów zespolono symetrycznych jest klasa obciętych operatorów Toeplitza. Jest ona obiektem intensywnych badań zapoczątkowanych pracą Sarasona [15]. Jest ona szczególnym przypadkiem asymetrycznych operatorów Toeplitza [6], [O1], które są naturalnym uogólnieniem prostokątnych macierzy Toeplitza.

Oznaczmy przez $\mathbb{T}$ okrąg jednostkowy oraz przez $\mathbb{D}$ koło jednostkowe. Niech m będzie unormowaną miarą Lebesgue'a na $\mathbb{T}$. Będziemy pisać $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$ oraz $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T}, m)$. Klasyczna przestrzeń Hardy'ego H^2 na kole $\mathbb{D}$ może być identyfikowana z podprzestrzenią L^2 , natomiast H^∞ , jako przestrzeń wszystkich analitycznych i ograniczonych funkcji na $\mathbb{D}$, może być traktowana jako podprzestrzeń L^∞ . Oznaczmy przez M_φ operator mnożenia z symbolem $\varphi \in L^\infty$,

$$M_\varphi: L^2 \rightarrow L^2, \quad M_\varphi f = \varphi f.$$

Niech θ będzie niestałą funkcją wewnętrzną, czyli $\theta \in H^\infty$, $|\theta| = 1$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$. Przestrzenią modelową nazywamy zbiór $K_\theta^2 = H^2 \ominus \theta H^2$. Twierdzenie Buerlinga czyni te przestrzenie interesującymi jako te, które są niezmiennicze dla sprzężenia operatora przesunięcia. Przestrzenie modelowe odgrywają ważną rolę w teorii modelowania. Z przestrzeniami tymi ściśle związany jest operator sprzężenia C_θ określony na L^2 wzorem

$$C_\theta f = \theta \bar{z} \bar{f}.$$

Ma on tę wartą zaznaczenia cechę, że zachowuje przestrzeń K_θ^2 jako niezmienniczą, czyli $C_\theta K_\theta^2 = K_\theta^2$. Z tej przyczyny C_θ może być rozważany jako sprzężenie na K_θ^2 . Takie sprzężenia odgrywają ważną rolę w kontekście obciętych operatorów Toeplitza ([10]). W istocie obcięte operatory Toeplitza są C_θ -symetryczne, który to fakt jest często istotnym narzędziem w dowodach twierdzeń. Ponadto wykazano, że takie operatory sprzężenia mogą być wykorzystane, aby scharakteryzować operatory Toeplitza ([P11], [4]).

4.2 Charakteryzacja asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza

W pracy [O1] definiujemy i badamy asymetryczne obcięte operatory Toeplitza (ATTO) określone między dwiema przestrzeniami modelowymi. Publikacja ta zainspirowana była z jednej strony pracą Sarasona [16], lecz również [6], gdzie asymetryczne obcięte operatory Toeplitza były wprowadzone, ale w kontekście przestrzeni Hardy'ego H^p na górnej półpłaszczyźnie dla $1 < p < \infty$. Operatory te są naturalnym uogólnieniem prostokątnych macierzy Toeplitza.

W pracy [O1] rozważamy ograniczone asymetryczne obcięte operatory Toeplitza z symbolem w L^2 , zdefiniowane między K_θ^2 i K_α^2 , przy założeniu, że α, θ są niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Badamy różne własności tych operatorów i ich relacje z odpowiadającymi im symbolami. Uzyskujemy charakteryzację tych operatorów za pomocą operatorów rzędu dwa. Rezultat ten jest uogólnieniem wyniku Sarasona dla przypadku $\alpha = \theta$. Jednakże w przypadku asymetrycznym związek między operatorem a jego symbolem jest bardziej skomplikowany.

Rozważmy dwie niestałe funkcje wewnętrzne α i θ . Niech $P_\alpha : L^2 \rightarrow K_\alpha^2$ będzie projekcją ortogonalną. Dla $\varphi \in L^2$ definiujemy operator $A_\varphi^{\theta, \alpha} : \mathcal{D} \subset K_\theta^2 \rightarrow K_\alpha^2$, przez $A_\varphi^{\theta, \alpha} f = P_\alpha(\varphi f)$ na dziedzinie $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A_\varphi^{\theta, \alpha}) = \{f \in K_\theta^2 : \varphi f \in L^2\}$. Zauważmy, że operator $A_\varphi^{\theta, \alpha}$ jest domknięty i gęsto określony w K_θ^2 oraz $K_\theta^\infty = K_\theta^2 \cap L^\infty \subset \mathcal{D}(A_\varphi^{\theta, \alpha})$. Operator $A_\varphi^{\theta, \alpha}$ nazywamy *asymetrycznym obciętym operatorem Toeplitza*. Jeśli operator ten jest ograniczony, to dopuszcza jedyne ograniczone rozszerzenie do K_θ^2 , $A_\varphi^{\theta, \alpha} : K_\theta^2 \rightarrow K_\alpha^2$. Przestrzeń wszystkich ograniczonych asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza oznaczamy $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$. W przypadku $\alpha = \theta$ piszemy A_φ^θ zamiast $A_\varphi^{\theta, \theta}$ (takie operatory nazywane są *obciętymi operatorami Toeplitza* i były badane przez Sarasona w [16]) oraz $\mathcal{T}(K_\theta^2)$ zamiast $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\theta^2)$. W pracy [O1] często zakładamy, że α dzieli θ ($\alpha \leq \theta$).

Poniższe twierdzenie daje warunek zerowania się ATTO. Wnioskiem z niego jest w szczególności fakt, że symbol asymetrycznego obciętego operatora Toeplitza nie jest dany jednoznacznie.

Twierdzenie 4.1 ([O1]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ oraz niech $A_\varphi^{\theta, \alpha}: K_\theta^2 \rightarrow K_\alpha^2$ będzie ograniczonym asymetrycznym obciętym operatorem Toeplitza z $\varphi \in L^2$. Wówczas $A_\varphi^{\theta, \alpha} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \alpha H^2 + \overline{\theta H^2}$.*

Wniosek 4.2 ([O1]). *Niech $\alpha, \theta, \alpha \leq \theta$, będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi oraz niech $A_\varphi^{\theta, \alpha} \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$. Dla $\varphi \in L^2$ istnieją funkcje $\psi \in K_\alpha^2$ i $\chi \in K_\theta^2$ takie, że $A_\varphi^{\theta, \alpha} = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha}$. Ponadto $A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha} = A_{\psi_1+\bar{\chi}_1}^{\theta, \alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\psi_1 = \psi + ck_0^\alpha$, $\chi_1 = \chi - \bar{c}k_0^\theta$, gdzie c jest dowolną stałą.*

W analogiczny sposób można udowodnić, że dla $\alpha \leq \theta$, operator $A_\varphi^{\alpha, \theta} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in \theta H^2 + \overline{\alpha H^2}$, gdzie $A_\varphi^{\alpha, \theta}: K_\alpha^2 \rightarrow K_\theta^2$, $A_\varphi^{\alpha, \theta} \in \mathcal{T}(K_\alpha^2, K_\theta^2)$.

Obcięte operatory Toeplitza w $\mathcal{T}(K_\theta^2)$ mogą być scharakteryzowane przez odpowiednie operatory rzędu dwa przy wykorzystaniu jądra reprodukującego $k_0^\theta = P_\theta 1$ ([16, Twierdzenie 4.1]). W [O1] uzyskaliśmy analogiczny wynik dla asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ używając funkcji $k_0^\alpha = P_\alpha 1$, $k_0^\theta = P_\theta 1$.

Twierdzenie 4.3 ([O1]). *Niech $\alpha, \theta, \alpha \leq \theta$, będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi i niech $A: K_\theta^2 \rightarrow K_\alpha^2$ będzie operatorem ograniczonym. Wówczas $A \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\psi \in K_\alpha^2$, $\chi \in K_\theta^2$ takie, że*

$$A - S_\alpha A S_\theta^* = \psi \otimes k_0^\theta + k_0^\alpha \otimes \chi. \quad (4.1)$$

Wniosek 4.4 ([O1]). *Niech α, θ , będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ i niech $A: K_\alpha^2 \rightarrow K_\theta^2$ będzie operatorem ograniczonym. Wówczas $A \in \mathcal{T}(K_\alpha^2, K_\theta^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\psi \in K_\alpha^2$, $\chi \in K_\theta^2$ takie, że*

$$A - S_\theta A S_\alpha^* = k_0^\theta \otimes \psi + \chi \otimes k_0^\alpha.$$

Podobną charakteryzację można uzyskać wykorzystując własności operatorów sprzężenia i funkcje $\tilde{k}_0^\alpha = C_\alpha k_0^\alpha$, $\tilde{k}_0^\theta = C_\theta k_0^\theta$. W przypadku symetrycznym formuły na funkcje μ i ν są proste, jednak przypadek asymetryczny znacznie te formuły komplikuje.

Twierdzenie 4.5 ([O1]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ i niech $A: K_\theta^2 \rightarrow K_\alpha^2$ będzie ograniczony. Wtedy $A \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\mu \in K_\alpha^2$ i $\nu \in K_\theta^2$ takie, że*

$$A - S_\alpha^* A S_\theta = \mu \otimes \tilde{k}_0^\theta + \tilde{k}_0^\alpha \otimes \nu. \quad (4.2)$$

Ponadto, jeśli $A = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha}$ z $\psi \in K_\alpha^2$ i $\chi \in K_\theta^2$, to A spełnia (4.2) z

$$\mu = C_\alpha P_\alpha(\frac{\bar{\theta}}{\alpha} \chi), \quad \nu = C_\alpha \psi + S^*(\alpha P_\theta \chi). \quad (4.3)$$

Wniosek 4.6 ([O1]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ oraz niech operator $A: K_\alpha^2 \rightarrow K_\theta^2$ będzie ograniczony. Wówczas $A \in \mathcal{T}(K_\alpha^2, K_\theta^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $\mu \in K_\alpha^2$, $\nu \in K_\theta^2$ takie, że*

$$A - S_\theta^* A S_\alpha = \tilde{k}_0^\theta \otimes \mu + \nu \otimes \tilde{k}_0^\alpha.$$

Zauważmy, że jeśli asymetryczny obcięty operator Toeplitza A spełnia równanie (4.2) z pewnymi funkcjami μ, ν , to równanie (4.2) zachodzi również z funkcjami μ, ν zamienionymi na

$$\mu' = \mu + \bar{b} \tilde{k}_0^\alpha, \nu' = \nu - b \tilde{k}_0^\theta \quad (4.4)$$

dla dowolnej stałej $b \in \mathbb{C}$. Ponadto symbol operatora $A = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha} \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ nie jest dany jednoznacznie i z Wniosku 4.2 wynika, że możemy zamienić $\psi \in K_\alpha^2$ i $\chi \in K_\theta^2$ na

$$\psi' = \psi + c k_0^\alpha \in K_\alpha^2, \chi' = \chi - \bar{c} k_0^\theta \in K_\theta^2 \quad (4.5)$$

dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{C}$. Poniższy wniosek opisuje relacje między funkcjami μ, ν oraz ψ, χ .

Wniosek 4.7 ([O1]). *Niech $\mu \in K_\alpha^2$ i $\nu \in K_\theta^2$ będą określone równaniami (4.3), dla danych $\psi \in K_\alpha^2$, $\chi \in K_\theta^2$, oraz niech $\mu' \in K_\alpha^2$ i $\nu' \in K_\theta^2$ będą analogicznie określone dla $\psi' \in K_\alpha^2$, $\chi' \in K_\theta^2$. Jeśli zachodzi (4.5), to*

$$\mu' = \mu - c \frac{\theta}{\alpha}(0) \tilde{k}_0^\alpha, \nu' = \nu + \bar{c} \frac{\theta}{\alpha}(0) \tilde{k}_0^\theta.$$

W [O1] podano również warunki, kiedy asymetryczny obcięty operator Toeplitza może być scharakteryzowany przez odpowiedni operator rzędu jeden.

Ponadto rozważano problem odzyskiwania symbolu operatora znając jego wartości na jądrach reprodukujących. Wiadomo, że symbol klasycznego operatora Toeplitza T_φ na H^2 można uzyskać z warunku $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{z}^n T_\varphi z^n$. W przypadku obciętego operatora Toeplitza A_φ^θ jego symbol należący do zbioru $H^2 + H^2$ może być odzyskany z działania A_φ^θ na k_0^θ i na $\tilde{k}_0^\theta$ ([3]). Dla asymetrycznego obciętego operatora Toeplitza $A \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ możemy wyliczyć jego symbol rozważając działanie A i A^* na jądrach reprodukujących. W efekcie otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} \psi(0) + \overline{\theta(0)} \alpha(0) \overline{\chi_\alpha(0)} + \|k_0^\alpha\|^2 \overline{\chi(0)} = \langle A k_0^\theta, k_0^\alpha \rangle \\ \frac{\theta}{\alpha}(0) \psi(0) + \overline{\chi_\alpha(0)} = \langle A \tilde{k}_0^\theta, \tilde{k}_0^\alpha \rangle \end{cases} \quad (4.6)$$

Wprowadzając oznaczenia $a = \psi(0)$, $b = \overline{\chi_\alpha(0)}$, $c = \overline{\chi(0)}$ w (4.6) uzyskujemy układ równań z niewiadomymi a, b, c :

$$\begin{cases} a + \overline{\theta(0)}\alpha(0) b + \|k_0^\alpha\|^2 c = \langle Ak_0^\theta, k_0^\alpha \rangle \\ -\frac{\theta}{\alpha}(0) a + b = \langle A\tilde{k}_0^\theta, \tilde{k}_0^\alpha \rangle, \end{cases} \quad (4.7)$$

który ma jedyne rozwiązanie przy ustalonych wartościach $\psi(0)$ lub $\chi(0)$. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} X - \overline{\theta(0)} Y &= Ak_0^\theta - ck_0^\alpha + b\overline{\theta(0)}\alpha, \\ -\theta(0)X + Y &= zA\tilde{k}_0^\theta - \frac{\theta}{\alpha}(0)a\alpha, \\ -\alpha(0)\frac{\theta}{\alpha}X + Y + (\alpha - \alpha(0))Z &= zC_\theta A^*k_0^\alpha - a\theta. \end{cases} \quad (4.8)$$

Twierdzenie 4.8 ([O1]). *Niech $\alpha \leq \theta$ będą niestętymi funkcjami wewnętrznymi oraz niech $A \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$. Przypuśćmy, że znane są wartości $\psi(0)$ lub $\chi(0)$, oraz a, b, c spełniają układ równań (4.7). Jeśli X, Y, Z spełniają układ (4.8), to $A = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha}$, gdzie $\psi = X$ i $\chi = \frac{\theta}{\alpha}\bar{Z} + \theta\bar{Y}$.*

Korzystając z charakteryzacji danej w Twierdzeniach 4.3 i 4.5 możemy również uzyskać symbol operatora. W przypadku pierwszym, jeśli A jest ograniczony i spełnia (4.1), to $A = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha}$. Jednakże w przypadku charakteryzacji danej w Twierdzeniu 4.5 wyznaczenie symbolu z pomocą funkcji μ i ν dla operatora A spełniającego (4.2) jest bardziej skomplikowane.

Twierdzenie 4.9 ([O1]). *Niech α, θ będą niestętymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ oraz niech A będzie operatorem ograniczonym spełniającym równość*

$$A - S_\alpha^* A S_\theta = \mu \otimes \tilde{k}_0^\theta + \tilde{k}_0^\alpha \otimes \nu \quad (4.9)$$

dla $\mu \in K_\alpha^2, \nu \in K_\theta^2$. Wówczas $A = A_{\psi+\bar{\chi}}^{\theta, \alpha}$, gdzie

$$\begin{aligned} \psi &= C_\alpha P_\alpha (\nu - c\tilde{k}_0^\theta) = C_\alpha P_\alpha \nu - \bar{c}\frac{\theta}{\alpha}(0)k_0^\alpha \in K_\alpha^2, \\ \chi &= S_\frac{\theta}{\alpha} P_\frac{\theta}{\alpha} \bar{\alpha}(\nu - c\tilde{k}_0^\theta) + \frac{\theta}{\alpha}C_\alpha(\mu + \bar{c}\tilde{k}_0^\alpha) \\ &= (S_\frac{\theta}{\alpha} P_\frac{\theta}{\alpha} \bar{\alpha}\nu + c\frac{\theta}{\alpha}(0)k_0^\frac{\theta}{\alpha}) + \frac{\theta}{\alpha}(C_\alpha\mu + c k_0^\alpha) \in K_\theta^2 = K_\frac{\theta}{\alpha}^2 \oplus \frac{\theta}{\alpha}K_\alpha^2 \end{aligned}$$

$$\text{przy } c = \langle P_\frac{\theta}{\alpha} \bar{\alpha}\nu, \tilde{k}_0^\frac{\theta}{\alpha} \rangle \|\tilde{k}_0^\frac{\theta}{\alpha}\|^{-2}.$$

4.3 Asymetryczne obcięte operatory Toeplitza a operatory sprzężenia

Obcięte operatory Toeplitza są C -symetryczne względem naturalnego operatora sprzężenia C_θ . W pracy [O7] przedstawiliśmy wyniki dotyczące unikalnych własności dwu naturalnych operatorów sprzężenia określonych na K_θ^2 oraz ich relacji

z asymetrycznymi obciętymi operatorami Toeplitza w kontekście C -symetrii. Wykazaliśmy także ich związek z operatorami Hankela.

Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Przypomnijmy, że dla antyliniowego operatora $X \in BA(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ istnieje jedyny antyliniowy operator $X^\sharp$, nazywany *antyliniowym sprzężeniem* X , spełniający równość

$$\langle Xf, g \rangle = \overline{\langle f, X^\sharp g \rangle} \quad (4.10)$$

dla dowolnych $f \in \mathcal{H}, g \in \mathcal{K}$.

Dla $X_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_1, X_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_2, Y_1: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{H}, Y_2: \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}$ (liniowych bądź antyliniowych) operatorów określamy następujące działania:

$$X_1 \diamond X_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2, (X_1 \diamond X_2)f = X_1f \oplus X_2f$$

oraz

$$Y_1 \boxplus Y_2: \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{H}, (Y_1 \boxplus Y_2)(f \oplus g) = Y_1f + Y_2g.$$

Wiadomo, że obcięte operatory Toeplitza są C_θ -symetryczne, [12], czyli dla $A_\varphi^\theta \in \mathcal{T}(K_\theta^2)$ zachodzi

$$A_\varphi^\theta C_\theta = C_\theta A_\varphi^\theta. \quad (4.11)$$

Poniższe twierdzenie opisuje własności, które są odpowiednikami własności C -symetrii dla asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza.

Twierdzenie 4.10 ([O7]). *Niech α, θ będą niestętymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ i niech $\varphi \in L^2$ będzie takie, że wszystkie asymetryczne obcięte operatory Toeplitza dane poniżej są ograniczone. Rozważmy operatory sprzężenia C_θ oraz $C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} = C_\alpha \oplus \alpha C_{\frac{\theta}{\alpha}} \bar{\alpha}$ w $K_\theta^2 = K_\alpha^2 \oplus \alpha K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2$. Wówczas zachodzą równości:*

$$(A_\varphi^{\theta, \alpha} \diamond \alpha A_{\varphi \bar{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) C_\theta = C_\theta (A_\varphi^{\alpha, \theta} \boxplus A_{\varphi \bar{\alpha}}^{\frac{\theta}{\alpha}, \theta} \bar{\alpha}), \quad (4.12)$$

$$(A_\varphi^{\theta, \alpha} \diamond \alpha A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} = C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} (A_\varphi^{\alpha, \theta} \boxplus A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\frac{\theta}{\alpha}, \theta} \bar{\alpha}), \quad (4.13)$$

$$(A_\varphi^{\theta, \alpha} \oplus \alpha A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) (C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} \diamond C_\theta) = (C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} \boxplus C_\theta) (A_\varphi^{\alpha, \theta} \oplus A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\frac{\theta}{\alpha}, \theta} \bar{\alpha}). \quad (4.14)$$

Równoważnie, powyższe operatory są antyliniowo samosprężone, czyli

$$((A_\varphi^{\theta, \alpha} \diamond \alpha A_{\varphi \bar{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) C_\theta)^\sharp = (A_\varphi^{\theta, \alpha} \diamond \alpha A_{\varphi \bar{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) C_\theta, \quad (4.12a)$$

$$((A_\varphi^{\theta, \alpha} \diamond \alpha A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}})^\sharp = (A_\varphi^{\theta, \alpha} \diamond \alpha A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}, \quad (4.13a)$$

$$((A_\varphi^{\theta, \alpha} \oplus \alpha A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) (C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} \diamond C_\theta))^\sharp = (A_\varphi^{\theta, \alpha} \oplus \alpha A_{\varphi \frac{\theta}{\alpha}}^{\theta, \frac{\theta}{\alpha}}) (C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} \diamond C_\theta). \quad (4.14a)$$

Warto zaznaczyć, że w przypadku przestrzeni modelowych dla $\alpha = \theta = z^n$ operatory C_θ -symetryczne są w istocie macierzami symetrycznymi względem drugiej przekątnej. W przypadku asymetrycznym szukamy analogicznej symetrii dla macierzy prostokątnych. Poniższy przykład ilustruje ideę stojącą za powyższym twierdzeniem, czyli równania (4.12a), (4.13a), (4.14a).

Przykład 4.11. Niech $\alpha = z^3$ i $\theta = z^5$. Każdy operator w $\mathcal{T}(z^5, z^3)$ ma symbol $\varphi = \sum_{n=-4}^2 a_k z^k \in K_{z^3} + \overline{K_{z^5}}$ (zobacz [O1, Wniosek 4.5]). Zatem jego re-

prezentacją macierzową jest $A_{\varphi}^{z^5, z^3} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \end{bmatrix}$. Aby zilustrować

równość (4.12a) w Twierdzeniu 4.10, zauważmy, że $A_{\alpha\varphi}^{z^5, z^2} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$,

więc $A_{\varphi}^{z^5, z^3} \diamond z^3 A_{\varphi\bar{z}^3}^{z^5, z^2}$ jest macierzą Toeplitza w $\mathbb{C}^5$ z symbolem $\varphi = \sum_{n=-4}^2 a_k z^k \in K_{z^3} + \overline{K_{z^5}} \subsetneq K_{z^5} + \overline{K_{z^5}}$, i zachodzi jej C_{z^5} -symetryczność lub symetria macierzy Hankela $(A_{\varphi}^{z^5, z^3} \diamond z^3 A_{\varphi\bar{z}^3}^{z^5, z^2}) C_{z^5}$.

Aby zilustrować (4.13a), rozważmy dwa operatory sprzężenia C_{z^5} oraz $C_{z^3, z^2}(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) = (\bar{z}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_0, \bar{z}_4, \bar{z}_3)$. W tym przypadku mamy

$A_{\varphi z^2}^{z^5, z^2} = \begin{bmatrix} a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & 0 & 0 \\ a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & 0 \end{bmatrix}$. Zatem

$$\begin{aligned} & (A_{\varphi}^{z^5, z^3} \diamond \alpha A_{\varphi\bar{z}^2}^{z^5, z^2}) C_{z^3, z^2}(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= \begin{bmatrix} a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-4} & a_{-3} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_{-3} & a_{-2} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_{-2} & a_{-1} \\ a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & 0 & 0 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & 0 & a_{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \\ \bar{z}_4 \end{bmatrix}. \quad (4.15) \end{aligned}$$

W przypadku równania (4.14a) $A_{\varphi}^{z^5, z^2} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} \end{bmatrix}$. Więc

$$\begin{aligned} & (A_{\varphi}^{z^5, z^3} \oplus A_{\varphi}^{z^5, z^2})(C_{z^3, z^2} \diamond C_{z^5})(z_0, z_1, z_2, z_3, z_4) \\ &= \begin{bmatrix} a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_{-4} & a_{-3} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_{-3} & a_{-2} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_{-2} & a_{-1} \\ a_{-4} & a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \\ a_{-3} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 \\ \bar{z}_4 \end{bmatrix}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Równości (4.13a), (4.14a) oznaczają, że operatory $(A_{\varphi}^{z^5, z^3} \diamond \alpha A_{\varphi z^2}^{z^5, z^2})C_{z^3, z^2}$ oraz $(A_{\varphi}^{z^5, z^3} \oplus A_{\varphi}^{z^5, z^2})(C_{z^3, z^2} \diamond C_{z^5})$ są antyliniowo samosprężone. W obu przypadkach możemy zapisać te macierze jako bloki $\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$, i wówczas każdy blok jest macierzą Hankela, a cała macierz jest symetryczna. Ponadto H_{12} jest symetryczna do H_{21} . Zauważmy, że w pierwszym przypadku pewna część H_{22} znika.

W świetle Twierdzenia 4.10 naturalnym problemem jest opisanie różnic $A_{\varphi}^{\theta, \alpha} C_{\theta} - C_{\theta} A_{\varphi}^{\alpha, \theta} P_{\alpha}$ oraz $A_{\varphi}^{\theta, \alpha} C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} - C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} A_{\varphi}^{\alpha, \theta} P_{\alpha}$, które są równe zero w przypadku $\alpha = \theta$. Różnice te mogą być przedstawione za pomocą pewnych operatorów Hankela.

Niech P oznacza projekcję ortogonalną z L^2 na H^2 i niech P_0^- będzie projekcją ortogonalną z L^2 na $\overline{H_0^2} = L^2 \ominus H^2$. Dla $\varphi \in L^2$ definiujemy:

$$H_{\varphi}: H^2 \rightarrow \overline{H_0^2}, \quad H_{\varphi} f = P_0^-(\varphi f)$$

dla $f \in H^2$ takiego, że $\varphi f \in L^2$. Podobnie, dla $\theta \in L^{\infty}$,

$$\tilde{H}_{\theta}: \overline{H_0^2} \rightarrow H^2, \quad \tilde{H}_{\theta} f = P(\theta f) \text{ dla } f \in \overline{H_0^2}.$$

Twierdzenie 4.12 ([O7]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$. Jeśli $A_{\varphi}^{\theta, \alpha} \in \mathcal{T}(K_{\theta}^2, K_{\alpha}^2)$ dla $\varphi \in L^2$, to poniższe równości zachodzą:*

$$(A_{\varphi}^{\theta, \alpha} C_{\theta} - C_{\theta} A_{\varphi}^{\alpha, \theta} P_{\alpha})f = (\tilde{H}_{\alpha} H_{\bar{\alpha}\varphi} C_{\frac{\theta}{\alpha}} P_{\frac{\theta}{\alpha}} \bar{\alpha} - \alpha \tilde{H}_{\frac{\theta}{\alpha}} H_{\bar{\theta}\varphi} C_{\theta} P_{\alpha})f; \quad (4.17)$$

$$(A_{\varphi}^{\theta, \alpha} C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} - C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} A_{\varphi}^{\alpha, \theta} P_{\alpha})f = (\tilde{H}_{\alpha} H_{\varphi} C_{\theta} - \tilde{H}_{\theta} H_{\varphi} C_{\alpha} P_{\alpha})f; \quad (4.18)$$

$$(\frac{\theta}{\alpha} A_{\varphi}^{\theta, \alpha} C_{\theta} - C_{\theta} A_{\varphi}^{\alpha, \theta} P_{\alpha \frac{\theta}{\alpha}})f = (\tilde{H}_{\theta} H_{\varphi} C_{\frac{\theta}{\alpha}} P_{\frac{\theta}{\alpha}} - \tilde{H}_{\frac{\theta}{\alpha}} H_{\varphi} C_{\theta})f \quad (4.19)$$

dla $f \in K_{\theta}^2$.

4.4 Zespolono symetryczne uzupełnienia częściowych macierzy operatorowych

Problem uzupełniania macierzy częściowych pojawia się w wielu dziedzinach. Waga tych badań jest uzasadniona nie tylko liczbą ich zastosowań, lecz również faktem, że dostarczają one środków, aby lepiej rozumieć różne własności i strukturę macierzy.

Macierz częściowa $n \times m$ to tablica $n \times m$, w której niektóre elementy są liczbami zespolonymi (te nazywamy *określonymi*), a pozostałe są nieznane (te nazywamy *nieokreślonymi* i oznaczamy przez ?). Przykładem takiej macierzy częściowej

jest macierz $n \times m$, gdzie wszystkie określone elementy pojawiają się w postaci macierzy prostokątnej dla pierwszych k rzędów ($k < n$) bądź kolumn ($k < m$). Mówimy wtedy o *częściowej macierzy prostokątnej*.

Uzupełnieniem macierzy częściowej $A = (a_{ij})$ jest macierz $B = (b_{ij})$ tych samych wymiarów co A , której wyrazami są liczby zespolone takie, że jeśli a_{ij} jest określony w A , to $b_{ij} = a_{ij}$. Problem uzupełniania macierzy polega na tym, by znaleźć takie jej uzupełnienie, aby miało pożądaną własność. Taki uzupełnienie najczęściej nie jest jedyne.

Głównym tematem pracy [O8] jest uzupełnianie częściowych macierzy prostokątnych i ich operatorowych odpowiedników pod kątem własności C -symetrii dla danego operatora sprzężenia C . Badamy następujące problemy. Przypuśćmy, że przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ ma rozkład $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ oraz, że C jest operatorem sprzężenia na $\mathcal{H}$. Kiedy operator $A_1 : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ ma C -symetryczne uzupełnienie w $B(\mathcal{H})$? Jak opisać wszystkie możliwe uzupełnienia z tą własnością i opisać ich niezmienniczość? W szczególności rozważamy uzupełnienia prostokątnych macierzy Toeplitza oraz asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza, jak również blokowych operatorów Toeplitza i uogólnionych operatorów Wienera-Hopfa, które mogą być przedstawione jako operatory całkowite.

W wyniku tych badań otrzymaliśmy również nowe klasy operatorów zespolono symetrycznych oraz głębsze rozumienie zależności między operatorami sprzężenia a rozkładem na sumę ortogonalną, działania sprzężenia na macierze i operatory oraz istotną rolę różnych projekcji.

Rozważmy uogólniony operator Wienera-Hopfa postaci

$$W = P \phi|_{P\mathcal{H}}, \quad \phi \in B(\mathcal{H}), \quad (4.20)$$

gdzie P jest projekcją ortogonalną. Wówczas mamy następujące

Twierdzenie 4.13 ([O8]). *Jeśli C jest operatorem sprzężenia na $\mathcal{H}$ takim, że $P\mathcal{H}$ jest niezmiennicza dla C , to operator W jest C -symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\phi C - C \phi^* \text{ przekształca } P\mathcal{H} \text{ w } (P\mathcal{H})^\perp. \quad (4.21)$$

Podajemy konieczny i wystarczający warunek na to, by dowolny operator Toeplitza był C -symetryczny korzystając z Twierdzenia 4.13.

Twierdzenie 4.14 ([O8]). *Niech $\varphi \in L^\infty$ i niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 zachowującym H^2 jako podprzestrzeń niezmienniczą. Wówczas operator Toeplitza T_φ jest C -symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy operator $M_\varphi C - C M_{\bar{\varphi}}$ przekształca H^2 w $(H^2)^\perp = \bar{H}_0^2$.*

Niech C będzie operatorem sprzężenia w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Załóżmy, że

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = C(\mathcal{H}_1), \quad \tilde{\mathcal{H}}_2 = C(\mathcal{H}_2). \quad (4.22)$$

Wówczas $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2$. Oznaczmy przez P_1, P_2 projekcje ortogonalne z $\mathcal{H}$ odpowiednio na $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Niech $\tilde{P}_1$ i $\tilde{P}_2$ będą projekcjami ortogonalnymi z $\mathcal{H}$ odpowiednio na $\tilde{\mathcal{H}}_1$ i $\tilde{\mathcal{H}}_2$.

Dowolne uzupełnienie $A_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ w $B(\mathcal{H})$ może być przedstawione jako $A = A_1 \diamond A_2$, gdzie $A_2: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_2$ i może być traktowane jako uzupełnienie częściowej macierzy operatorowej

$$A: \tilde{\mathcal{H}}_1 \oplus \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad (4.23)$$

postaci $A = [A_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq 2$,

$$A_{11}: \tilde{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad A_{12}: \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1, \quad A_{21}: \tilde{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2, \quad A_{22}: \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2, \quad (4.24)$$

gdzie A_{11} i A_{12} są określone przez

$$A_1 = A_{11} \boxplus A_{12}. \quad (4.25)$$

Mamy wówczas:

Twierdzenie 4.15 ([O8]). *Operator $A_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_1$ może być uzupełniony do C -symetrycznego operatora w $B(\mathcal{H})$, przy $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$A_{11} = C|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} A_{11}^* C|_{\tilde{\mathcal{H}}_1}. \quad (4.26)$$

W tym przypadku $A = [A_{ij}]$ jest C -symetrycznym uzupełnieniem A_1 w $B(\mathcal{H})$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A_{21} = C|_{\tilde{\mathcal{H}}_2} A_{12}^* C|_{\tilde{\mathcal{H}}_1} \quad (4.27)$$

oraz $A_{22}: \tilde{\mathcal{H}}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ spełnia warunek

$$A_{22} = C|_{\tilde{\mathcal{H}}_2} A_{22}^* C|_{\tilde{\mathcal{H}}_2}. \quad (4.28)$$

Twierdzenie 4.15 może być wykorzystane, aby scharakteryzować te uzupełnienia danego asymetrycznego obciążonego operatora Toeplitza, które są C -symetryczne względem konkretnych operatorów sprzężenia powiązanych ściśle z odpowiednią przestrzenią modelową.

Twierdzenie 4.16 ([O8]). *Niech α, θ będą takimi funkcjami wewnętrznymi, że $\alpha \leq \theta$. Załóżmy, że $A_\varphi^{\theta, \alpha} \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ przy $\varphi \in L^2$. Wówczas $A_\varphi^{\theta, \alpha}$ może być*

uzupełniony do C_θ -symetrycznego operatora w $B(K_\theta^2)$. Zbiór wszystkich C_θ -symetrycznych uzupełnień $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ w $B(K_\theta^2)$ składa się z operatorów

$$A = A_\varphi^{\theta,\alpha} \diamond \alpha B: K_\theta^2 \rightarrow K_\theta^2 = K_\alpha^2 \oplus \alpha K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2, \quad (4.29)$$

gdzie

$$B = B_1 \frac{\bar{\theta}}{\alpha} \boxplus B_2, \quad (4.30)$$

$$B_1 = A_{\frac{\varphi\theta}{\alpha^2}}^{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} \in \mathcal{T}\left(K_\alpha^2, K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2\right), \quad (4.31)$$

natomiast B_2 jest dowolnym $C_{\frac{\theta}{\alpha}}$ -symetrycznym operatorem w $K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2$.

Jeśli $\varphi \in L^\infty$, to $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ zawsze może być uzupełniony do obciętego operatora Toeplitza, mianowicie do A_φ^θ . Jednak ciekawym problemem jest, co jest tym uzupełnieniem w przypadku, gdy $\varphi \in L^2 \setminus L^\infty$. Poniżej opisujemy wszystkie możliwe uzupełnienia $A_\varphi^{\theta,\alpha}$, które są obciętymi operatorami Toeplitza w K_θ^2 .

Twierdzenie 4.17 ([O8]). *Niech α, θ będą funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$. Zbiór wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza na K_θ^2 , które są uzupełnieniami asymetrycznego obciętego operatora Toeplitza $A_\varphi^{\theta,\alpha} \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ składa się z operatorów*

$$A_g^\theta \quad \text{przy} \quad g - \varphi \in \alpha H^2 + \overline{\theta H^2}, \quad \text{takich, że} \quad A_{g\bar{\alpha}}^{\frac{\theta}{\alpha}} \in \mathcal{T}(K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2). \quad (4.32)$$

Rozważając teraz inny naturalny operator sprzężenia na K_θ^2 uzyskujemy następujące:

Twierdzenie 4.18 ([O8]). *Niech $A_\varphi^{\theta,\alpha} \in \mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ przy $\varphi \in L^2$. Wówczas $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ może być uzupełniony do $C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}$ -symetrycznego operatora w $B(K_\theta^2)$. Zbiór wszystkich takich uzupełnień składa się z operatorów*

$$A = A_\varphi^{\theta,\alpha} \diamond \alpha B: K_\theta^2 \rightarrow K_\theta^2 = K_\alpha^2 \oplus \alpha K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2,$$

przy

$$B = B_1 \boxplus B_2 \bar{\alpha}: K_\theta^2 = K_\alpha^2 \oplus \alpha K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2 \rightarrow K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2,$$

gdzie

$$B_1 = A_{\frac{\varphi\theta}{\alpha}}^{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} \in \mathcal{T}\left(\alpha, \frac{\theta}{\alpha}\right)$$

oraz B_2 jest dowolnym $C_{\frac{\theta}{\alpha}}$ -symetrycznym ograniczonym operatorem w $K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2$.

Rozważmy teraz operatory Toeplitza z symbolami macierzowymi:

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{bmatrix} \in M_{22}(L^\infty), \quad (4.33)$$

gdzie $M_{22}(L^\infty)$ jest zbiorem wszystkich macierzy 2×2 , których wyrazy należą do L^∞ . Biorąc pod uwagę przedstawienie $T_G: H^2 \oplus H^2 \rightarrow H^2 \oplus H^2$ w postaci macierzy

$$T_G = \begin{bmatrix} T_{g_1} & T_{g_2} \\ T_{g_3} & T_{g_4} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

możemy utożsamić $H^2 \oplus H^2$ z $(H^2)^2$ i wziąć $(H^2)^2 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ z $\mathcal{H}_1 = (H^2, \{0\})$, $\mathcal{H}_2 = (\{0\}, H^2)$.

Niech $\tilde{C}$ będzie operatorem sprzężenia na $H^2 \oplus H^2$. Poniżej podajemy warunek konieczny i wystarczający na $\tilde{C}$ -symetryczność operatora Toeplitza T_G na $(H^2)^2$.

Twierdzenie 4.19 ([O8]). *Niech $\tilde{C}$ będzie operatorem sprzężenia na $H^2 \oplus H^2$ postaci*

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2^\# & D_4 \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

gdzie D_1, D_2, D_4 są niezerowymi antyliniowymi operatorami na H^2 , i niech $G \in M_{22}(L^\infty)$ będzie postaci (4.33). Wówczas operator Toeplitza T_G jest $\tilde{C}$ -symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy (antyliniowe) operatory

$$(T_{g_1} \boxplus T_{g_2})(D_1 \diamond D_2^\#), \quad (T_{g_3} \boxplus T_{g_4})(D_2 \diamond D_4)$$

są antyliniowo samo-sprężone oraz

$$(T_{g_3} \boxplus T_{g_4})(D_1 \diamond D_2^\#) = (D_2^\# \boxplus D_4)(T_{\bar{g}_1} \diamond T_{\bar{g}_2}). \quad (4.36)$$

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta, $P_1, P_2 \in B(\mathcal{H})$ będą projekcjami oraz $\Phi \in B(\mathcal{H})$. Operator

$$W = P_2 \Phi|_{P_1 \mathcal{H}}: P_1 \mathcal{H} \rightarrow P_2 \mathcal{H} \quad (4.37)$$

nazywany jest (asymetrycznym) uogólnionym operatorem Wienera-Hopfa. Załóżmy, że P_1, P_2 są projekcjami ortogonalnymi takimi, że

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_2 \quad (4.38)$$

i oznaczmy

$$K_1 = P_1 \mathcal{H}, \quad K_2 = P_2 \mathcal{H}, \quad \widetilde{K}_2 = (P_1 - P_2) \mathcal{H}. \quad (4.39)$$

W [O8] pokazujemy, że dla uogólnionych operatorów Wienera-Hopfa można uzyskać naturalne uzupełnienie, przy założeniu, że operator sprzężenia C na K_1 spełnia warunki:

$$\text{istnieje operator sprzężenia } \tilde{C} \text{ na } \mathcal{H} \text{ taki, że } \tilde{C}|_{K_2} = C|_{K_2} \quad (4.40)$$

oraz

$$\Phi \text{ jest } \tilde{C} - \text{symetryczny, czyli } \tilde{C}\Phi\tilde{C} = \Phi^*. \quad (4.41)$$

Twierdzenie 4.20 ([O8]). *Niech $W = P_2\Phi|_{K_1}: K_1 \rightarrow K_2$ oraz niech C będzie operatorem sprzężenia na K_1 takim, że zachodzą (4.40)–(4.41). Wtedy W ma uzupełnienie do C –symetrycznego operatora w $B(K_1)$ oraz*

$$A = W \diamond X: K_1 \rightarrow K_1 = K_2 \oplus \widetilde{K_2}, \quad (4.42)$$

gdzie

$$X = (CP_1\tilde{C} - P_2)\Phi P_1: K_1 \rightarrow \widetilde{K_2} \quad (4.43)$$

jest C –symetrycznym uzupełnieniem W w $B(K_1)$.

4.5 Dualne (asymetryczne) obcięte operatory Toeplitza

Dopełnienia ortogonalne przestrzeni modelowych w $L^2(\mathbb{T})$ pojawiają się w licznych zastosowaniach. W równoważnym kontekście prostej rzeczywistej, wykorzystując jako naturalne zmienne czas i częstotliwość oraz biorąc funkcję wewnętrzną $\theta = \theta_\lambda$ przy $\theta_\lambda = \exp(i\lambda\xi)$ dla $\xi \in \mathbb{R}$ pojawiają się one poprzez transformatę Fouriera jako sygnały wysokiej częstotliwości, co odgrywa istotną rolę w elektronice. Dualne i asymetryczne dualne obcięte operatory Toeplitza działając na tych przestrzeniach mają realizacje np. w dalekosiężnych łączach komunikacyjnych z kilkoma regeneratorami na trasie, które eliminują szumy o niskiej częstotliwości za pomocą filtrów górnoprzepustowych lub w opisie propagacji fali w obecności fali o skończonej długości przeszkody.

Artykuły [O2, O5, O6] poświęcone są dualnym (asymetrycznym) obciętym operatorom Toeplitza. Operatory te to zawężenia operatorów mnożenia do dopełnień ortogonalnych przestrzeni modelowych w $L^2(\mathbb{T})$. Okazuje się, że ich cechy są całkiem różne od cech obciętych operatorów Toeplitza. Na przykład, symbol w przypadku dualnego obciętego operatora Toeplitza jest jedyny i jedyny zwarty taki operator to operator zerowy, co kontrastuje z analogicznymi własnościami obciętych operatorów Toeplitza na przestrzeniach modelowych.

Niech P, P^- będą ortogonalnymi projekcjami z L^2 na H^2 i $H_-^2 = \overline{\tilde{z}H^2}$, odpowiednio. Zatem $P^- = I - P$. Dla funkcji wewnętrznej θ rozważmy Q_θ ortogonalną projekcję z L^2 na $(K_\theta^2)^\perp = L^2 \ominus K_\theta^2 = H_-^2 \oplus \theta H^2$.

Przypomnijmy, że $K_\theta^\infty := K_\theta^2 \cap L^\infty$ jest gęstym podzbiorem K_θ^2 ([10]). Ponieważ $\bar{z}\bar{H}^\infty$ jest gęstym zbiorem w H_-^2 oraz θH^∞ jest zbiorem gęstym w θH^2 , to $(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty$ jest gęsty w $(K_\theta^2)^\perp$. Dla $\varphi \in L^2$ możemy rozważyć gęsto określony operator mnożenia

$$M_\varphi: (K_\theta^2 \cap L^\infty) \oplus ((K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty) \rightarrow K_\alpha^2 \oplus (K_\alpha^2)^\perp. \quad (4.44)$$

Definiujemy

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\varphi^{\theta,\alpha} &= P_\alpha M_{\varphi|(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty}, \\ B_\varphi^{\theta,\alpha} &= P_\alpha^\perp M_{\varphi|K_\theta^2 \cap L^\infty}, \\ D_\varphi^{\theta,\alpha} &= P_\alpha^\perp M_{\varphi|(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $B_\varphi^{\theta,\alpha} = (B_{\bar{\varphi}}^{\alpha,\theta})^*$. Zatem, w odniesieniu do rozkładu (4.44), działanie operatora M_φ , dla $g \in (K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty$, $h \in K_\alpha^2 \cap L^\infty$, jest dane przez macierz

$$\begin{bmatrix} P_\alpha M_{\varphi|K_\theta^2 \cap L^\infty} & P_\alpha M_{\varphi|(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty} \\ P_\alpha^\perp M_{\varphi|K_\theta^2 \cap L^\infty} & P_\alpha^\perp M_{\varphi|(K_\theta^2)^\perp \cap L^\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\varphi^{\theta,\alpha} & (B_{\bar{\varphi}}^{\alpha,\theta})^* \\ B_\varphi^{\theta,\alpha} & D_\varphi^{\theta,\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Przypomnijmy, że $A_\varphi^{\theta,\alpha}$ oznacza asymetryczny obcięty operator Toeplitza (AT-TO). Jeśli $B_\varphi^{\theta,\alpha}$ rozszerza się do ograniczonego operatora z K_θ^2 do $(K_\alpha^2)^\perp$, to nazywamy go *asymetrycznym wielkim obciętym operatorem Hankela* (ATHO), jeśli zaś $D_\varphi^{\theta,\alpha}$ ma ograniczone rozszerzenie do $(K_\theta^2)^\perp$, to nazywany jest *asymetrycznym dualnym obciętym operatorem Toeplitza* (ADTTO).

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(K_\theta^2, (K_\alpha^2)^\perp) &= \{B_\varphi^{\theta,\alpha}: \varphi \in L^2 \text{ i } B_\varphi^{\theta,\alpha} \text{ jest ograniczony}\}, \\ \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp) &= \{D_\varphi^{\theta,\alpha}: \varphi \in L^2 \text{ i } D_\varphi^{\theta,\alpha} \text{ jest ograniczony}\}. \end{aligned}$$

Jeśli $\theta = \alpha$, to używamy odpowiednio oznaczeń B_φ^θ , D_φ^θ oraz $\mathcal{T}(K_\theta^2, (K_\theta^2)^\perp)$, $\mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp)$.

W pracy [O2] badamy własności dualnych obciętych operatorów Toeplitza $\mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp)$ oraz wielkich obciętych operatorów Hankela $\mathcal{T}(K_\theta^2, (K_\theta^2)^\perp)$. W szczególności podajemy pełną charakteryzację elementów rzędu jeden w $\mathcal{T}(K_\theta^2, (K_\theta^2)^\perp)$ z symbolem z L^∞ .

Twierdzenie 4.21 ([O2]). *Niech θ będzie niestającą funkcją wewnętrzną.*

1. *Jeśli $\dim K_\theta^2 = 1$, to wszystkie operatory z $\mathcal{T}(K_\theta^2, (K_\theta^2)^\perp)$ są rzędu jeden.*

2. Załóżmy, że $\dim K_\theta^2 > 1$. Jeśli $B_\varphi^\theta \in \mathcal{T}(K_\theta^2, (K_\theta^2)^\perp)$, przy $\varphi \in L^\infty$, jest rzędu jeden, to jest iloczynem stałej i jednego z poniższych operatorów

$$B_{zk_w} = \theta k_w \otimes \tilde{k}_w^\theta \quad \text{lub} \quad B_{\bar{z}\bar{k}_w} = \bar{z}\bar{k}_w \otimes k_w^\theta, \quad \text{gdzie } w \in \mathbb{D}. \quad (4.46)$$

Badamy również problem przemienności zawężeń operatorów mnożenia z operatorem mnożenia przez zmienną niezależną. Jako wniosek uzyskujemy konieczny i wystarczający warunek na przemienność D_φ^θ i D_z^θ .

Twierdzenie 4.22 ([O2]). Niech $\varphi \in L^2$. Wówczas

1. jeśli $D_\varphi^\theta \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp)$, to

$$D_\varphi^\theta D_z^\theta - D_z^\theta D_\varphi^\theta = \theta \otimes C_\theta(P_\theta^\perp(\varphi k_0^\theta)) - (P_\theta^\perp(\varphi k_0^\theta)) \otimes \bar{z};$$

2. jeśli $A_\varphi^\theta \in \mathcal{B}(K_\theta^2)$, to

$$A_\varphi^\theta A_z^\theta - A_z^\theta A_\varphi^\theta = k_0^\theta \otimes (C_\theta P_\theta(\theta\varphi)) - (P_\theta(\theta\varphi)) \otimes C_\theta k_0^\theta;$$

3. jeśli $B_\varphi^\theta \in \mathcal{B}(K_\theta^2, (K_\theta^2)^\perp)$, to

$$B_\varphi^\theta A_z^\theta - D_z^\theta B_\varphi^\theta = \theta \otimes (C_\theta P_\theta(\varphi k_0^\theta)) - (P_\theta^\perp(\varphi\theta)) \otimes C_\theta k_0^\theta.$$

Wniosek 4.23. Niech $D_\varphi^\theta \in \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp)$. Wówczas D_φ^θ jest przemienny z D_z^θ , czyli $D_\varphi^\theta D_z^\theta = D_z^\theta D_\varphi^\theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi k_0^\theta = c\theta + P_\theta\varphi$ dla $c \in \mathbb{C}$. W szczególności, jeśli $\theta(0) = 0$, to $D_\varphi^\theta D_z^\theta = D_z^\theta D_\varphi^\theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \in K_\theta^2 + \mathbb{C}\theta$.

W publikacji [16] D. Sarason scharakteryzował ograniczone obcięte operatory Toeplitza wykorzystując zawężenia operatora M_z do K_θ^2 . Między innymi, przedstawił on różnicę $A - A_z^\theta A A_{\bar{z}}^\theta$ za pomocą specyficznych operatorów rzędu dwa. W [O2] podajemy analogiczną zależność dla dualnych obciętych operatorów Toeplitza. Dla dowolnego $D \in \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp)$ przedstawiamy różnicę $D - D_z^\theta D (D_z^\theta)^*$ używając operatorów rzędu dwa. Jednakże, w tym przypadku taka zależność nie prowadzi do charakteryzacji DTTO. Uzyskujemy taką charakteryzację korzystając ze specyficznych zawężeń dualnych obciętych operatorów Toeplitza. Podajemy ponadto konieczny i wystarczający warunek na to, by dowolny operator $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp)$ był DTTO. Korzystając z podanych formuł można łatwo uzyskać symbol tego operatora.

Twierdzenie 4.24 ([O2]). Załóżmy, że θ jest funkcją wewnętrzną, $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp)$. Wówczas D jest dualnym obciętym operatorem Toeplitza, $D \in \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp)$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe warunki:

1. $P_{\theta H^2} D_{|\theta H^2} = \hat{T}_z^\theta P_{\theta H^2} D_{|\theta H^2} \hat{T}_z^\theta$;
2. $P^- D_{|H_-^2} = C_\theta P_{\theta H^2} D_{|\theta H^2}^* C_\theta$;
3. $P^- D_{|\theta H^2} \hat{T}_z^\theta = \check{T}_z P^- D_{|\theta H^2}$ i $(P_{\theta H^2} D_{|H_-^2})^* \hat{T}_z^\theta = \check{T}_z (P_{\theta H^2} D_{|H_-^2})^*$;
4. $P^-(D(\theta)) = P^-(\theta^2 \overline{D^*(\theta)})$ i $P^-(D^*(\theta)) = P^-(\theta^2 \overline{D(\theta)})$.

W przypadku, gdy $D = D_\varphi^\theta$, $\varphi \in L^\infty$, to

$$\varphi = P(\bar{\theta} D(\theta)) + \overline{P(\bar{\theta} D^*(\theta))} - \langle D(\theta), \theta \rangle. \quad (4.47)$$

Naturalnym problemem związanym z operatorami A_z^θ i D_z^θ jest ich przemienność, czyli opis komutanta $\{A_z^\theta\}'$ czy $\{D_z^\theta\}'$. W [O5] rozważamy również bardziej ogólny kontekst i opisujemy zbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(K_\theta^2, K_\alpha^2) &= \{B \in \mathcal{B}(K_\theta^2, K_\alpha^2) : A_z^\alpha B = B A_z^\theta\}, \\ \mathcal{I}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp) &= \{B \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp) : D_z^\alpha B = B D_z^\theta\}. \end{aligned}$$

Niech

$$\begin{aligned} \hat{T}_\varphi^{\theta, \alpha} &= P_{\alpha H^2} M_{\varphi|\theta H^2}, \quad \check{\Gamma}_\varphi^\alpha = P_{\alpha H^2} M_{\varphi|H_-^2}, \\ \hat{\Gamma}_\varphi^\theta &= P^- M_{\varphi|\theta H^2} \quad \text{oraz} \quad \check{T}_\varphi = P^- M_{\varphi|H_-^2}. \end{aligned}$$

Głównym wynikiem w pracy [O5] jest poniższe:

Twierdzenie 4.25 ([O5]). *Niech θ, α będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Operator $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ spełnia równanie*

$$D D_z^\theta = D_z^\alpha D \quad (4.48)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $D \in \mathcal{T}^2((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$, czyli $D = \begin{bmatrix} \hat{T}_{\psi_1}^{\theta, \alpha} & \check{\Gamma}_{\psi_2}^\alpha \\ \hat{\Gamma}_{\psi_3}^\theta & \check{T}_{\psi_4} \end{bmatrix}$, gdzie funkcje $\psi_i \in L^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, spełniają warunki:

(i) *jeśli $\theta(0) \neq 0$, to*

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\overline{\alpha(0)}}{\theta(0)} \alpha \bar{\theta} \psi_4, & \psi_2 &= \overline{\alpha(0)} \alpha P(\psi_4), \\ \psi_3 &= \frac{1}{\theta(0)} \bar{\theta} P^-(\psi_4), & \psi_4 &\in L^\infty; \end{aligned} \quad (4.49)$$

(ii) jeśli $\theta(0) = 0$ oraz $\alpha(0) \neq 0$, to

$$\psi_1 \in L^\infty, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \frac{1}{\alpha(0)} \bar{\theta} P^-(\bar{\alpha}\theta\psi_1), \quad \psi_4 = 0; \quad (4.50)$$

(iii) jeśli $\theta(0) = \alpha(0) = 0$, to

$$\psi_1 \in \alpha\bar{\theta}H^\infty, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 \in L^\infty, \quad \psi_4 \in H^\infty. \quad (4.51)$$

Wykorzystując ten wynik opisujemy asymetryczne dualne obcięte operatory Toeplitza należące do zbioru $\mathcal{I}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$. W konsekwencji otrzymujemy opis komutanta D_z^θ w przypadku $\theta = \alpha$.

Przypomnijmy, że $(K_\theta^2)^\perp = \theta H^2 \oplus H_-^2$, $(K_\alpha^2)^\perp = \alpha H^2 \oplus H_-^2$. Rozważmy zbiór

$$\mathcal{T}^2((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp) = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{T}_{\varphi_1}^{\theta, \alpha} & \check{\Gamma}_{\varphi_2}^\alpha \\ \hat{\Gamma}_{\varphi_3}^\theta & \check{T}_{\varphi_4} \end{bmatrix} : \varphi_i \in L^\infty \text{ dla } i = 1, 2, 3, 4 \right\}. \quad (4.52)$$

Wniosek 4.26 ([O5]). *Niech θ będzie niestałą funkcją wewnętrzną. Operator $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp)$ jest przemienny z D_z^θ wtedy i tylko wtedy, gdy $D \in \mathcal{T}^2((K_\theta^2)^\perp)$, czyli*

$D = \begin{bmatrix} \hat{T}_{\psi_1}^\theta & \check{\Gamma}_{\psi_2}^\theta \\ \hat{\Gamma}_{\psi_3}^\theta & \check{T}_{\psi_4} \end{bmatrix}$, gdzie funkcje $\psi_i \in L^2$, $i = 1, 2, 3, 4$, spełniają poniższe warunki:

(i) jeśli $\theta(0) \neq 0$, to

$$\psi_1 = \psi_4, \quad \psi_2 = \overline{\theta(0)}\theta P(\psi_4), \quad \psi_3 = \frac{1}{\theta(0)} \bar{\theta} P^-(\psi_4), \quad \psi_4 \in L^\infty; \quad (4.53)$$

(ii) jeśli $\theta(0) = 0$, to

$$\psi_1 \in H^\infty, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 \in L^\infty, \quad \psi_4 \in H^\infty. \quad (4.54)$$

Zainspirowani dobrze znanym klasycznym wynikiem Browna i Halmosa [5], który charakteryzuje operatory Toeplitza na przestrzeni Hardy'ego $H^2 \subset L^2$ jako te, które spełniają równość $T_z^* A T_z = A$ oraz podążając za definicją niezmienniczości względem przesunięcia podaną przez Sarasona [16], którą on wykorzystał do charakteryzacji obciętych operatorów Toeplitza, formułujemy w [O6] uogólnienie tej definicji oraz dowodzimy niezmienniczości względem przesunięcia dla konkretnych klas zawężeń operatora mnożenia.

Definicja 4.27. [O6] Niech $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ będą podprzestrzeniami L^2 . Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ nazywany jest *niezmienniczym względem przesunięcia*, jeśli dla dowolnych $f \in \mathcal{K}_1$ i $g \in \mathcal{K}_2$ takich, że $zf \in \mathcal{K}_1$ oraz $zg \in \mathcal{K}_2$ zachodzi

$$\langle A(zf), zg \rangle = \langle Af, g \rangle. \quad (4.55)$$

Podajemy charakteryzację asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza (ADTTO) uogólniając wynik z [O2] sformułowany dla przypadku $\theta = \alpha$.

Twierdzenie 4.28 ([O6]). *Niech θ, α będą funkcjami wewnętrznymi i niech $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$. Wówczas operator D jest asymetrycznym dualnym obcięтым operatorem Toeplitza, $D \in \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$, wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe warunki:*

1. $P_{\alpha H^2} D|_{\theta H^2} = \hat{T}_z^\alpha P_{\alpha H^2} D|_{\theta H^2} \hat{T}_z^\theta;$
2. $P^- D|_{H_-^2} = (P^- C_\alpha M_{\bar{\theta}})|_{\theta H^2} \left(P_{\alpha H^2} D|_{\theta H^2} \right)^* (M_\theta C_\alpha)|_{H_-^2};$
3. $P^- D|_{\theta H^2} \hat{T}_z^\theta = \tilde{T}_z P^- D|_{\theta H^2}$ oraz $(P_{\alpha H^2} D|_{H_-^2})^* \hat{T}_z^\alpha = \tilde{T}_z (P_{\alpha H^2} D|_{H_-^2})^*;$
4. $P^-(D(\theta)) = P^-(\theta \alpha \overline{D^*(\alpha)})$ oraz $P^-(D^*(\alpha)) = P^-(\theta \alpha \overline{D(\theta)}).$

W tym przypadku, gdy $D = D_\varphi^{\theta, \alpha}$, funkcja $\varphi \in L^\infty$ jest dana przez

$$\varphi = \bar{\theta} P_{\alpha H^2}(D(\theta)) + \alpha \overline{P_{\theta H^2}(D^*(\alpha))} - \alpha \langle D^*(\alpha), \theta \rangle \bar{\theta}. \quad (4.56)$$

Interesującym faktem jest, że asymetryczne obcięte operatory Toeplitza mogą być scharakteryzowane przez niezmienniczość względem przesunięcia, natomiast zbiór wszystkich operatorów niezmienniczych względem przesunięcia między dopełnieniami ortogonalnymi przestrzeni modelowych jest większy i opisany w [O6, Theorem 4.3]. Ta nowa klasa operatorów pojawia się również w [O5] w kontekście przemienności z operatorem mnożenia przez z . Poniżej podajemy charakteryzację wszystkich operatorów w $\mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ niezmienniczych względem przesunięcia.

Twierdzenie 4.29 ([O6]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Operator $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ jest niezmienniczy względem przesunięcia wtedy i tylko wtedy, gdy $D \in \mathcal{T}^2((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$.*

Powyższe twierdzenie jest nowe również w przypadku $\theta = \alpha$. Wynika z niego również, że (asymetryczne) dualne obcięte operatory Toeplitza są niezmiennicze względem przesunięcia.

Wniosek 4.30 ([O6]). *Niech $D \in \mathcal{B}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$. Jeśli D jest asymetrycznym dualnym obcięтым operatorem Toeplitza, to D jest niezmienniczy względem przesunięcia, czyli*

$$\langle Dzf, zg \rangle = \langle Df, g \rangle \quad (4.57)$$

dla dowolnych $f, g \in K_\theta^\perp$ takich, że f, g są ortogonalne do $\bar{z}$.

Inną konsekwencją Twierdzenia 4.29 jest to, że w przeciwieństwie do obciętych operatorów Toeplitza, własność niezmienniczości względem przesunięcia nie jest wystarczająca by udowodnić, że operator jest dualnym obciętym operatorem Toeplitza. Niezmienniczość ta jest wykorzystana, aby wykazać, że przestrzeń wszystkich (asymetrycznych) obciętych operatorów Toeplitza jest 2-refleksywna. Również przestrzeń (asymetrycznych) dualnych obciętych operatorów Toeplitza jest 2-refleksywna. Nowym podejściem było przeformułowanie warunków z [O6, Theorem 3.4] na język operatorów rzędu dwa.

Twierdzenie 4.31 ([O6]). *Niech θ, α będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Przestrzeń $\mathcal{T}(K_\theta^2, K_\alpha^2)$ wszystkich ograniczonych asymetrycznych obciętych operatorów Toeplitza jest słabo*(WOT)–domknięta, tranzytywna i 2-refleksywna.*

Stąd wynika, że przestrzeń $\mathcal{T}(K_\theta^2)$ wszystkich ograniczonych obciętych operatorów Toeplitza jest słabo*(WOT)–domknięta, tranzytywna i 2-refleksywna.

Twierdzenie 4.32 ([O6]). *Niech θ, α będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi. Przestrzeń $\mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza jest słabo*(WOT)–domknięta i 2-refleksywna.*

Jako natychmiastowy wniosek uzyskujemy, że $\mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp)$ ma takie same własności.

Ponieważ własność 2-refleksywności nie jest dziedziczna, wykorzystujemy twierdzenie Bourgaina oraz rachunek funkcyjny dla (asymetrycznych) dualnych obciętych operatorów Toeplitza [O6, Theorem 6.3], aby udowodnić, że posiadają one własność $\mathbb{A}_{1/2}(1)$, która w konsekwencji daje 2-refleksywność wszystkich podprzestrzeni złożonych z (asymetrycznych) dualnych obciętych operatorów Toeplitza.

Oznaczmy przez $\mathcal{A}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ zbiór wszystkich asymetrycznych dualnych obciętych operatorów Toeplitza z symbolem analitycznym, czyli

$$\mathcal{A}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp) = \{D_\varphi^{\theta, \alpha} : \varphi \in H^\infty\}.$$

Twierdzenie 4.33 ([O6]). *Niech $\Phi : L^\infty \rightarrow \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$, $\varphi \mapsto D_\varphi^{\theta, \alpha}$. Wtedy*

1. Φ jest liniową izometrią na $\mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$,
2. Φ jest ciągła w słabej* topologii w obu przestrzeniach,
3. $\Phi|_{H^\infty}$ jest bijekcją na $\mathcal{A}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$,
4. $\mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ ma własność $\mathbb{A}_{1/2}(1)$,
5. każda słabo* domknięta podprzestrzeń $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ jest 2-refleksywna,
6. $\mathcal{A}((K_\theta^2)^\perp, (K_\alpha^2)^\perp)$ jest słabo*–domknięta i 2-refleksywna.

4.6 Operatory sprzężenia w L^2

Motywacja badań nad operatorami sprzężenia ma swoje korzenie w fizyce ([11]), a w szczególności w nie-hermitowskiej mechanice kwantowej i analizie spektralnej operatorów zespolono-symetrycznych. Istnieje wiele ważnych przykładów takich jak: operatory normalne, operatory Hankela, obcięte operatory Toeplitza, które są zespolono-symetryczne, czyli C -symetryczne dla pewnego operatora sprzężenia C .

W pracach [O7, O3] podaliśmy pełną charakteryzację wszystkich operatorów sprzężenia C w przestrzeni L^2 na okręgu jednostkowym przemienionych z M_z bądź spełniających równość $M_z C = C M_{\bar{z}}$ (innymi słowami takich, dla których operator M_z jest C -symetryczny). Badaliśmy również zachowanie takich operatorów sprzężenia w kontekście analitycznej części L^2 oraz przestrzeni modelowych. W szczególności scharakteryzowano wszystkie operatory sprzężenia pozostawiające przestrzeń Hardy'ego oraz przestrzenie modelowe niezmienniczymi.

Najbardziej naturalnym operatorem sprzężenia na L^2 jest $J: L^2 \rightarrow L^2$, $Jf(z) = \overline{f(z)}$. Ma on następujące własności:

Stwierdzenie 4.34 ([O3]). 1. $M_z J = J M_{\bar{z}}$;

2. $M_\varphi J = J M_{\bar{\varphi}}$ dla dowolnego $\varphi \in L^\infty$;

3. $JH^2 = \overline{H^2}$.

Rozważamy wszystkie operatory sprzężenia C na L^2 takie, że

$$M_z C = C M_{\bar{z}}. \quad (4.58)$$

Takie operatory badamy w [O7] i nazywamy je M_z -sprzężeniami. Charakteryzacja wszystkich M_z -sprzężeń w L^2 jest dana w twierdzeniu:

Twierdzenie 4.35 ([O7]). Niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 . Następujące warunki są równoważne:

1. $M_z C = C M_{\bar{z}}$,

2. $M_\varphi C = C M_{\bar{\varphi}}$ dla każdego $\varphi \in L^\infty$,

3. istnieje $\psi \in L^\infty$, $|\psi| = 1$, takie, że $C = M_\psi J$,

4. istnieje $\psi' \in L^\infty$, $|\psi'| = 1$, takie, że $C = J M_{\psi'}$.

Innym naturalnym operatorem sprzężenia w L^2 jest

$$J^* f = f^\#, \text{ przy czym } f^\#(z) \stackrel{\text{df}}{=} \overline{f(\bar{z})}. \quad (4.59)$$

Operator J^* ma następujące własności:

Stwierdzenie 4.36. 1. $M_z J^* = J^* M_z$;

2. $M_{\bar{z}} J^* = J^* M_{\bar{z}}$;

3. $M_\varphi J^* = J^* M_{\varphi^\#}$ dla każdego $\varphi \in L^\infty$;

4. $J^* H^2 = H^2$.

Naturalnym pytaniem, które nasuwa się w związku z własnością (1) jest to: jakie inne operatory sprzężenia C w L^2 są przemienne z M_z , czyli

$$M_z C = C M_z. \quad (4.60)$$

Takie sprzężenia nazywamy M_z -przemiennymi. Ich charakteryzacja jest dana w poniższym twierdzeniu:

Twierdzenie 4.37. [O3] Niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 . Następujące warunki są równoważne:

1. $M_z C = C M_z$,

2. $M_\varphi C = C M_{\varphi^\#}$ dla dowolnego $\varphi \in L^\infty$,

3. istnieje funkcja $\psi \in L^\infty$ spełniająca $\psi(z) = \psi(\bar{z})$ oraz $|\psi(z)| = 1$ taka, że $C = M_\psi J^*$,

4. istnieje funkcja $\psi' \in L^\infty$, $\psi'(z) = \psi'(\bar{z})$ oraz $|\psi'(z)| = 1$ taka, że $C = J^* M_{\psi'}$.

Rozważaliśmy również problem, które spośród M_z -sprzężeń bądź M_z -przemiennych sprzężeń zachowują przestrzeń Hardy'ego H^2 jako niezmienniczą. Poniższy rezultat pokazuje, że J^* jest w pewnym sensie jedynym o tej własności.

Stwierdzenie 4.38 ([O3]). Niech C będzie M_z -przemiennym sprzężeniem w L^2 . Jeśli $C(H^2) \subset H^2$, to $C = \lambda J^*$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{T}$.

Stwierdzenie 4.39 ([O3]). Nie istnieje M_z -sprzężenie w L^2 , które zachowuje H^2 .

4.7 Operatory sprzężenia a przestrzenie modelowe

W [O7, O3] badano relacje między M_z -sprzężeniami a przestrzeniami modelowymi. Poniższe twierdzenie udowodniono w [O7, Theorem 4.2] przy założeniu, że $\alpha \leq \theta$ natomiast w [O3] już bez tego założenia.

Twierdzenie 4.40 ([O3]). *Niech α, γ, θ będą funkcjami wewnętrznymi (α, θ niestałe). Niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 takim, że $M_z C = C M_{\bar{z}}$. Załóżmy, że $C(\gamma K_\alpha^2) \subset K_\theta^2$. Wówczas istnieje funkcja wewnętrzna β taka, że $C = C_\beta$, $\gamma\alpha \leq \beta \leq \gamma\theta$ oraz $\alpha \leq \theta$.*

Konsekwencją tego jest fakt, że operator sprzężenia C_θ jest jedynym M_z -sprzężeniem, który zachowuje K_θ .

Wniosek 4.41 ([O3]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi i niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 takim, że $M_z C = C M_{\bar{z}}$. Przypuśćmy, że $C(K_\alpha^2) \subset K_\theta^2$. Wówczas $\alpha \leq \theta$ i istnieje funkcja wewnętrzna β taka, że $C = C_\beta$ oraz $\alpha \leq \beta \leq \theta$.*

Operator J^* ma również ciekawą własność związaną z przestrzeniami modelowymi, czyli $J^*(K_\theta^2) = K_{\theta^\#}^2$. Co więcej, w pewnym sensie jest jedynym M_z -przemiennym sprzężeniem z tą własnością.

Twierdzenie 4.42 ([O3]). *Niech α, θ będą niestałymi funkcjami wewnętrznymi oraz niech C będzie M_z -przemiennym sprzężeniem w L^2 , czyli $M_z C = C M_{\bar{z}}$. Załóżmy, że $C(K_\alpha^2) \subset K_\theta^2$. Wówczas $\alpha \leq \theta^\#$ oraz $C = \lambda J^*$ przy $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Wniosek 4.43 ([O3]). *Niech C będzie M_z -przemiennym sprzężeniem w L^2 . Załóżmy, że istnieje niestała funkcja wewnętrzna θ taka, że $C(K_\theta^2) \subset K_{\theta^\#}^2$. Wówczas $C = \lambda J^*$ przy $\lambda \in \mathbb{T}$.*

Twierdzenie Beurlinga opisuje wszystkie podprzestrzenie niezmiennicze dla operatora przesunięcia S . Są one postaci θH^2 dla funkcji wewnętrznej θ . Rozważaliśmy M_z -przemienne sprzężenia przekształcające jedną S -niezmienniczą podprzestrzeń w drugą.

Twierdzenie 4.44 ([O3]). *Niech θ i α będą funkcjami wewnętrznymi i niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 takim, że $C M_z = M_z C$. Wówczas $C(\alpha H^2) \subset \theta H^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta\theta^\# \leq \alpha\alpha^\#$ oraz $C = C_\beta J^* C_\alpha$, gdzie β jest taką funkcją wewnętrzną, że $\theta \leq \beta$, $\beta\beta^\# = \alpha\alpha^\#$. Ponadto w tym przypadku zachodzi $C(\alpha H^2) = \beta H^2$.*

Wniosek 4.45 ([O3]). *Niech θ będzie funkcją wewnętrzną i niech C będzie M_z -przemiennym sprzężeniem w L^2 . Wówczas*

1. $C(\theta H^2) \subset \theta H^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \lambda C_\theta J^* C_\theta$ przy $\lambda \in \mathbb{T}$;
2. $C(\theta H^2) \subset \theta^\# H^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \lambda J^*$ przy $\lambda \in \mathbb{T}$.

Stwierdzenie 4.46 ([O3]). *Niech θ i α będą funkcjami wewnętrznymi. Nie istnieje M_z -sprzężenie w L^2 , które przekształca αH^2 na θH^2 .*

Założmy, że α, θ są funkcjami wewnętrznymi takimi, że α dzieli θ . W tym przypadku przestrzeń modelowa K_θ^2 ma rozkład ortogonalny $K_\theta^2 = K_\alpha^2 \oplus \frac{\theta}{\alpha} K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2$. Z takim rozkładem w naturalny sposób związany jest kolejny operator sprzężenia na K_θ^2 określony wzorem:

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} &:= C_\alpha \oplus \alpha C_{\frac{\theta}{\alpha}} \bar{\alpha}, \\ C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}(g_1 + \alpha g_2) &= C_\alpha g_1 + \alpha C_{\frac{\theta}{\alpha}} g_2 = \alpha \bar{z} \bar{g}_1 + \theta \bar{z} \bar{g}_2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

dla $g_1 \in K_\alpha^2, g_2 \in K_{\frac{\theta}{\alpha}}^2$. Łatwo zauważyć, że M_z nie jest $C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}$ -symetryczny. Również $C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}$ nie jest zacieśnieniem do K_θ^2 żadnego M_z -sprzężenia C na L^2 . Jednakże zacieśnienia $C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}$ do przestrzeni K_α^2 i $K_\theta^2 \ominus K_\alpha^2$ są równe zacieśnieniom pewnych (różnych) M_z -sprzężeń. Poniższe twierdzenie pokazuje, że $C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}}$ i C_θ są jedynymi operatorami sprzężenia w K_θ^2 z tą własnością.

Twierdzenie 4.47 ([O7]). *Niech α, θ będą niestalymi funkcjami wewnętrznymi takimi, że $\alpha \leq \theta$ i niech $\tilde{C}$ będzie operatorem sprzężenia na K_θ^2 . Załóżmy, że istnieją operatory sprzężenia $C_i, i = 1, 2$, na L^2 przy $M_z C_i = C_i M_{\bar{z}}$ takie, że $\tilde{C}|_{K_\alpha^2} = C_1|_{K_\alpha^2}$ oraz $\tilde{C}|_{K_\theta^2 \ominus K_\alpha^2} = C_2|_{K_\theta^2 \ominus K_\alpha^2}$. Wtedy $\tilde{C} = C_\theta$ lub $\tilde{C} = C_{\alpha, \frac{\theta}{\alpha}} = C_\alpha \oplus \alpha C_{\frac{\theta}{\alpha}} \bar{\alpha}$.*

4.8 Operatory sprzężenia a obcięte operatory Toeplitza

Twierdzenie 4.48 ([O3]). *Niech θ będzie niestalą funkcją wewnętrzną i niech C będzie operatorem sprzężenia w L^2 takim, że $C(K_\theta^2) \subset K_{\theta^\#}^2$. Następujące warunki są równoważne:*

1. $A_{\varphi^\#}^{\theta^\#} C = C A_\varphi^\theta$ na K_θ^2 dla wszystkich $\varphi \in H^\infty$,
2. $A_z^{\theta^\#} C = C A_z^\theta$ na K_θ^2 ,
3. istnieje funkcja $\psi \in H^\infty$ taka, że $C|_{K_\theta^2} = J^* A_\psi^\theta$ oraz A_ψ^θ jest izometrią,
4. istnieje funkcja $\psi' \in H^\infty$ taka, że $C|_{K_\theta^2} = A_{\psi'}^{\theta^\#} J_{|K_\theta^2}^*$ oraz $A_{\psi'}^{\theta^\#}$ jest izometrią.

Stwierdzenie 4.49 ([O3]). *Niech θ będzie funkcją wewnętrzną taką, że $\theta^\# = \theta$ oraz niech C będzie operatorem sprzężenia w K_θ^2 . Wówczas poniższe warunki są równoważne:*

1. $A_{\varphi^\#}^\theta C = C A_\varphi^\theta$ dla wszystkich $\varphi \in H^\infty$,

2. $A_z^\theta C = C A_z^\theta$,
3. $C = \lambda J_{|K_\theta^2}^*$ przy $\lambda \in \mathbb{T}$.

Poniższe twierdzenie opisuje operatory sprzężenia spełniające równanie $A_z^\theta C = C A_{\bar{z}}^\theta$.

Twierdzenie 4.50 ([O3]). *Niech θ będzie funkcją wewnętrzną i niech C będzie operatorem sprzężenia w K_θ^2 . Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. $A_\varphi^\theta C = C A_\varphi^\theta$ dla wszystkich $\varphi \in H^\infty$,
2. $A_z^\theta C = C A_{\bar{z}}^\theta$,
3. istnieje funkcja $\psi \in H^\infty$ taka, że $C = A_\psi^\theta C_\theta$ oraz A_ψ^θ jest unitarny,
4. istnieje funkcja $\psi' \in H^\infty$ taka, że $C = C_\theta A_{\psi'}^\theta$ oraz $A_{\psi'}^\theta$ jest unitarny.

Stąd mamy:

Wniosek 4.51 ([O3]). *Jeśli C jest operatorem sprzężenia w K_θ^2 oraz każdy $A \in \mathcal{T}(K_\theta^2)$ jest C -symetryczny, to $C = A_\psi^\theta C_\theta$ dla pewnego $\psi \in H^\infty$ takiego, że A_ψ^θ jest unitarny.*

4.9 Operatory sprzężenia w $L^2 \oplus L^2$

Niech $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{bmatrix}$, gdzie D_j są antyliniowymi operatorami na $\mathcal{H}$ dla $j = 1, 2, 3, 4$. Wówczas $\mathbf{C}$ jest operatorem sprzężenia na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą poniższe warunki:

$$D_1 = D_1^\sharp, D_4 = D_4^\sharp, D_3 = D_2^\sharp, \quad (4.62)$$

$$D_1 D_1^\sharp + D_2 D_2^\sharp = I, D_2^\sharp D_2 + D_4 D_4^\sharp = I, \quad (4.63)$$

$$D_2^\sharp D_1 + D_4 D_2^\sharp = 0. \quad (4.64)$$

Oznaczmy $\mathbf{M}_z = \begin{bmatrix} M_z & 0 \\ 0 & M_z \end{bmatrix}$. W publikacji [O4] badaliśmy, jakie warunki musi spełniać $\mathbf{C}$, aby być $\mathbf{M}_z$ -sprzężeniem, czyli spełniać

$$\mathbf{M}_z \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{M}_{\bar{z}}, \quad (4.65)$$

oraz kiedy C jest przemienne z M_z . Poniżej podajemy charakteryzację $\mathbf{M}_z$ -przemiennych sprzężeń w $L^2 \oplus L^2$.

Twierdzenie 4.52 ([O4]). *Niech $\mathbf{C}$ będzie antyliniowym operatorem w $L^2 \oplus L^2$. Wtedy $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2^\# & D_4 \end{bmatrix}$ jest operatorem sprzężenia takim, że $\mathbf{M}_z \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{M}_z$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\psi_i \in L^\infty$, $i = 1, 2, 4$, takie, że $D_i = M_{\psi_i} J^*$ oraz*

$$\psi_1^\# = \bar{\psi}_1, \quad \psi_4^\# = \bar{\psi}_4, \quad (4.66)$$

$$|\psi_1|^2 = |\psi_4|^2 = 1 - |\psi_2|^2, \quad (4.67)$$

$$\psi_1^\# \psi_2 + \psi_2^\# \psi_4 = 0. \quad (4.68)$$

Podajemy również charakteryzację wszystkich $\mathbf{M}_z$ -sprzężeń w $L^2 \oplus L^2$.

Twierdzenie 4.53 ([O4]). *Niech $\mathbf{C}$ będzie antyliniowym operatorem na $L^2(\mathbb{C}^2)$. Wówczas $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2^\# & D_4 \end{bmatrix}$ jest operatorem sprzężenia takim, że $\mathbf{M}_z \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{M}_{\bar{z}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje $\psi_i \in L^\infty$, $i = 1, 2, 4$, takie, że $D_i = M_{\psi_i} \tilde{J}$ oraz*

$$|\psi_1|^2 = |\psi_4|^2 = 1 - |\psi_2|^2, \quad (4.69)$$

$$\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_4 = 0. \quad (4.70)$$

5 Operatory sprzężenia w $L^2(\mathcal{H})$

Praca [O4] poświęcona jest badaniu operatorów sprzężenia w przestrzeniach L^2 o wartościach w pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Ten kierunek badań ma uzasadnienie w teorii B. Sz.-Nagy–C. Foiaşa [20, Rozdział 3], która mówi, że każda całkowicie nie-unitarna kontrakcja jest unitarnie równoważna operatorowi mnożenia przez zmienną niezależną w pewnej przestrzeni modelowej zadanej przez funkcję wewnętrzną o wartościach operatorowych. Innymi słowy, uzyskane wyniki w [O4] mogą być przeniesione, przy odpowiednich założeniach, poprzez unitarną równoważność na kontrakcje w przestrzeniach Hilberta. Na przykład założenie, że $L^2(\mathcal{H})$ jest przestrzenią funkcji wektorowych w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oznacza, że wymiar przestrzeni defektu dla tych kontrakcji jest skończony.

Dla zespolonej ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ oznaczmy przez $L^2(\mathcal{H})$ przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych $\mathbf{f}: \mathbb{T} \rightarrow \mathcal{H}$, które spełniają

$$\int_{\mathbb{T}} \|\mathbf{f}(z)\|^2 dm(z) < \infty. \quad (5.1)$$

Niech $H^2(\mathcal{H})$ oznacza podprzestrzeń $L^2(\mathcal{H})$ złożoną z tych funkcji z $L^2(\mathcal{H})$, dla których współczynniki Fouriera o ujemnych indeksach są zerowe.

Oznaczmy przez $H^\infty(B(\mathcal{H}))$ zbiór wszystkich ograniczonych funkcji analitycznych o wartościach w $B(\mathcal{H})$, $\mathbf{F}: \mathbb{D} \rightarrow B(\mathcal{H})$ z normą $\|\mathbf{F}\|_\infty = \sup\{\|\mathbf{F}(\lambda)\| : |\lambda| < 1\}$. Możemy też rozważać funkcje na okręgu jednostkowym. Funkcja $\mathbf{F}: \mathbb{T} \rightarrow B(\mathcal{H})$ jest mierzalna, jeśli dla każdego $x \in \mathcal{H}$ funkcja $z \mapsto \mathbf{F}(z)x$ jest mierzalna. Oznaczmy przez $L^\infty(B(\mathcal{H}))$ przestrzeń wszystkich takich funkcji mierzalnych $\mathbf{F}$, które są istotnie ograniczone. Każda $\mathbf{F} \in L^\infty(B(\mathcal{H}))$ dopuszcza rozwinięcie Fouriera

$$\mathbf{F} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e_n, \quad (5.2)$$

dane przez szereg formalny z $F_n \in B(\mathcal{H})$ dla $n \in \mathbb{Z}$, a współczynniki F_n są określone jako

$$F_n h = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} \mathbf{F}(z) h \, dm(z) \quad \text{dla} \quad h \in \mathcal{H}. \quad (5.3)$$

Przestrzeń $H^\infty(B(\mathcal{H}))$ może być widziana jako podprzestrzeń $L^\infty(B(\mathcal{H}))$ złożona z tych funkcji $\mathbf{F}$, których współczynniki Fouriera F_n zerują się dla $n < 0$.

Niech $\mathbf{F} \in L^\infty(B(\mathcal{H}))$. Określmy ograniczony operator liniowy $M_{\mathbf{F}}$ na $L^2(\mathcal{H})$: dla $\mathbf{f} \in L^2(\mathcal{H})$,

$$(M_{\mathbf{F}} \mathbf{f})(z) = \mathbf{F}(z) \mathbf{f}(z) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T}.$$

W szczególności dla $\mathbf{f} \in L^2(\mathcal{H})$ mamy p.w. na $\mathbb{T}$

$$(\mathbf{M}_z \mathbf{f})(z) = z \mathbf{f}(z) \quad \text{oraz} \quad (\mathbf{M}_{\bar{z}} \mathbf{f})(z) = \bar{z} \mathbf{f}(z).$$

Oznaczmy przez $BA(\mathcal{H})$ przestrzeń ograniczonych i antyliniowych operatorów na $\mathcal{H}$. Podobnie definiujemy mierzalną funkcję $\mathbf{F}: \mathbb{T} \rightarrow BA(\mathcal{H})$ i oznaczamy przez $L^\infty(BA(\mathcal{H}))$ przestrzeń wszystkich mierzalnych, istotnie ograniczonych funkcji o wartościach w $BA(\mathcal{H})$. Dla każdego $\mathbf{C} \in L^\infty(BA(\mathcal{H}))$ określmy ograniczony, antyliniowy operator $A_{\mathbf{C}}$ na $L^2(\mathcal{H})$: dla $\mathbf{f} \in L^2(\mathcal{H})$,

$$(A_{\mathbf{C}} \mathbf{f})(z) = \mathbf{C}(z) \mathbf{f}(z) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T}.$$

Niech J będzie operatorem sprzężenia w $\mathcal{H}$. Wtedy możemy określić dwa operatory sprzężenia $\tilde{\mathbf{J}}$ oraz $\mathbf{J}^*$ na $L^2(\mathcal{H})$ poprzez

$$(\tilde{\mathbf{J}} \mathbf{f})(z) = J(\mathbf{f}(z)) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T} \quad (5.4)$$

oraz

$$(\mathbf{J}^* \mathbf{f})(z) = J(\mathbf{f}(\bar{z})) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T}. \quad (5.5)$$

Wszystkie $\mathbf{M}_{\bar{z}}$ -przemienne sprzężenia na $L^2(\mathcal{H})$ są scharakteryzowane w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 5.1 ([O4]). *Niech J będzie operatorem sprzężenia na $\mathcal{H}$. Następujące warunki są równoważne:*

1. *C jest operatorem sprzężenia w $L^2(\mathcal{H})$ takim, że $CM_z = M_zC$,*
2. *istnieje $U \in L^\infty(B(\mathcal{H}))$ taki, że $U(z)$ jest operatorem unitarnym dla prawie wszystkich $z \in \mathbb{T}$, M_U jest J^* -symetryczny oraz $C = M_U J^* = J^* M_U^*$.*

Charakteryzacja M_z -sprzężeń w $L^2(\mathcal{H})$ jest dana poniżej.

Twierdzenie 5.2 ([O4]). *Niech C będzie operatorem antyliniowym na $L^2(\mathcal{H})$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

1. *C jest operatorem sprzężenia na $L^2(\mathcal{H})$ takim, że $M_zC = CM_{\bar{z}}$,*
2. *istnieje $C_0 \in L^\infty(BA(\mathcal{H}))$ taki, że $C = A_{C_0}$ oraz $C_0(z)$ jest operatorem sprzężenia dla prawie wszystkich $z \in \mathbb{T}$,*
3. *dla dowolnego operatora sprzężenia J w $\mathcal{H}$ istnieje $U \in L^\infty(B(\mathcal{H}))$ taki, że $U(z)$ jest J -symetrycznym, unitarnym operatorem dla prawie wszystkich $z \in \mathbb{T}$ oraz $C = M_U \tilde{J} = \tilde{J} M_U^*$.*

Niech J będzie dowolnym operatorem sprzężenia w $\mathcal{H}$. Wtedy $J^*(H^2(\mathcal{H})) \subset H^2(\mathcal{H})$. Poniższe twierdzenie opisuje wszystkie M_z -przemienne sprzężenia z tą własnością. Zauważmy, że jeśli C jest operatorem sprzężenia w $L^2(\mathcal{H})$ spełniającym $C(H^2(\mathcal{H})) \subset H^2(\mathcal{H})$, to musi zachodzić $C(H^2(\mathcal{H})) = H^2(\mathcal{H})$.

Twierdzenie 5.3 ([O4]). *Niech J będzie dowolnym operatorem sprzężenia w $\mathcal{H}$ oraz niech C będzie operatorem sprzężenia w $L^2(\mathcal{H})$ takim, że $CM_z = M_zC$. Jeśli $C(H^2(\mathcal{H})) \subset H^2(\mathcal{H})$, to istnieje unitarny, J -symetryczny operator $U_0 \in B(\mathcal{H})$ taki, że $C = M_U J^* = J^* M_U^*$, gdzie U jest stałą funkcją o wartościach operatorowych $U(z) = U_0$ dla prawie wszystkich $z \in \mathbb{T}$.*

Zauważmy, że $\tilde{J}(H^2(\mathcal{H})) \not\subset H^2(\mathcal{H})$. Ponadto $\tilde{J}(H^2(\mathcal{H})) = L^2(\mathcal{H}) \ominus zH^2(\mathcal{H})$. W istocie mamy:

Stwierdzenie 5.4. *Nie istnieje M_z -sprzężenie w $L^2(\mathcal{H})$, dla którego $H^2(\mathcal{H})$ jest niezmiennicza.*

5.1 Operatory sprzężenia a przestrzenie modelowe w $L^2(\mathcal{H})$

W tym rozdziale zakładamy, że $\dim \mathcal{H} = d < \infty$. Funkcja $\Theta \in H^\infty(L(\mathcal{H}))$ nazywana jest *wewnętrzna*, jeśli jej wartości brzegowe są unitarnymi operatorami w $B(\mathcal{H})$ prawie wszędzie na $\mathbb{T}$. Przypuśćmy, że $\|\Theta(0)\| < 1$, mówimy wtedy, że

Θ jest czystą funkcją wewnętrzną. Odpowiadająca jej przestrzeń modelowa jest określona jako $K_\Theta = H^2(\mathcal{H}) \ominus \Theta H^2(\mathcal{H})$. Niech P_Θ będzie projekcją ortogonalną na K_Θ . Zauważmy, że podprzestrzeń $K_\Theta^\infty = K_\Theta \cap L^\infty(\mathcal{H})$ wszystkich funkcji ograniczonych na K_Θ jest gęsta w K_Θ .

Operator mmodelowy $S_\Theta \in L(K_\Theta)$ jest określony jako

$$(S_\Theta \mathbf{f}) = P_\Theta(\mathbf{M}_z \mathbf{f}) \quad \text{dla } \mathbf{f} \in K_\Theta. \quad (5.6)$$

Z [7, Twierdzenie 3.1] wynika, że S_Θ jest zespolono symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje operator sprzężenia J w $\mathcal{H}$ taki, że Θ jest J -symetryczny. W takim przypadku $\Theta(z)J$ jest operatorem sprzężenia w $\mathcal{H}$ dla prawie wszystkich $z \in \mathbb{T}$ i w konsekwencji $M_\Theta \tilde{\mathbf{J}}$ jest operatorem sprzężenia w $L^2(\mathcal{H})$ dzięki Twierdzeniu 5.2. Od teraz będziemy zakładać, że Θ jest J -symetryczny. Wówczas $\mathbf{C}_{\Theta,J}$ definiowany jako

$$\mathbf{C}_{\Theta,J} \mathbf{f}(z) = \Theta(z) \bar{z} (\tilde{\mathbf{J}} \mathbf{f})(z) = \Theta(z) \bar{z} J(\mathbf{f}(z)) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T}$$

(czyli, $\mathbf{C}_{\Theta,J} = M_\Theta \mathbf{M}_{\bar{z}} \tilde{\mathbf{J}}$) jest operatorem sprzężenia na $L^2(\mathcal{H})$, dla którego K_Θ jest niezmiennicza.

Poniższe twierdzenie charakteryzuje wszystkie $\mathbf{M}_z$ -sprzężenia, dla których przestrzeń modelowa jest niezmiennicza.

Twierdzenie 5.5 ([O4]). *Niech $\mathbf{C}$ będzie $\mathbf{M}_z$ -sprzężeniem na $L^2(\mathcal{H})$ i niech $\Theta \in L^\infty(B(\mathcal{H}))$ będzie J -symetryczną czystą funkcją wewnętrzną, gdzie J jest operatorem sprzężenia na $\mathcal{H}$. Przypuśćmy, że K_Θ jest niezmiennicza dla $\mathbf{C}$. Wówczas $\mathbf{C} = M_{\mathbf{V}} \mathbf{C}_{\Theta,J}$, gdzie $\mathbf{V}$ jest funkcją stałą $\mathbf{V}(z) = V_0$ i V_0 jest unitarny p.w. na $\mathbb{T}$, taką, że $M_{\mathbf{V}}$ jest $\mathbf{C}_{\Theta,J}$ -symetryczny.*

Niech Λ i Θ będą funkcjami wewnętrznymi o wartościach operatorowych. Mówimy, że Λ dzieli Θ ($\Lambda \leq \Theta$), jeśli $\Lambda^* \Theta \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$.

Poniżej opisujemy wszystkie $\mathbf{M}_z$ lub $\mathbf{M}_z$ -przemienne sprzężenia przekształcające jedną przestrzeń modelową w drugą.

Twierdzenie 5.6 ([O4]). *Niech $\Theta, \Lambda \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ będą czystymi funkcjami wewnętrznymi oraz załóżmy, że istnieją operatory sprzężeń J_Θ, J_Λ w $\mathcal{H}$ takie, że Θ jest J_Θ -symetryczny i Λ jest J_Λ -symetryczny. Ponadto niech $\mathbf{C}$ będzie $\mathbf{M}_z$ -sprzężeniem w $L^2(\mathcal{H})$. Wówczas $\mathbf{C}(K_\Lambda) \subset K_\Theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\Gamma,J}$ dla pewnej funkcji wewnętrznej $\Gamma \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ oraz dla pewnego operatora sprzężenia J w $\mathcal{H}$ takiego, że $\Lambda \leq \Gamma \leq \Theta$ i Γ jest J -symetryczny. W szczególności wtedy $\Lambda \leq \Theta$.*

Twierdzenie 5.7 ([O4]). *Niech $\Theta, \Lambda \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ będą czystymi funkcjami wewnętrznymi i załóżmy, że istnieją operatory sprzężenia J_Θ, J_Λ w $\mathcal{H}$ takie, że Θ jest*

J_Θ –symetryczny oraz Λ jest J_Λ –symetryczny. Załóżmy, że $\mathbf{C}$ jest $\mathbf{M}_z$ –przemiennym sprzężeniem w $L^2(\mathcal{H})$. Wówczas $\mathbf{C}(K_\Lambda) \subset K_\Theta$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje unitarny, J_Λ –symetryczny operator $U_0 \in B(\mathcal{H})$ taki, że $\mathbf{C} = M_{\mathbf{U}_\Lambda} \mathbf{J}_\Lambda^*$, gdzie $\mathbf{U}_\Lambda$ jest stałą funkcją o wartościach operatorowych, $\mathbf{U}_\Lambda(z) = U_0$ dla prawie wszystkich $z \in \mathbb{T}$ oraz $U_0 \Lambda^\# \leq \Theta$.

Załóżmy, że $\Theta, \Lambda \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ są funkcjami wewnętrznymi. Niech J będzie operatorem sprzężenia w $\mathcal{H}$. Określmy

$$\mathbf{C}_J^{\Lambda, \Theta} = M_\Theta \mathbf{J}^* M_\Lambda^*.$$

Wtedy $\mathbf{C}_J^{\Lambda, \Theta}$ jest antyliniową isometrią oraz $\mathbf{C}_J^{\Lambda, \Theta}$ przekształca przestrzeń $\Lambda H^2(\mathcal{H})$ na $\Theta H^2(\mathcal{H})$.

Stwierdzenie 5.8 ([O4]). *Antyliniowy operator $\mathbf{C}_J^{\Lambda, \Theta}$ jest inwolucją (a zatem operatorem sprzężenia w $L^2(\mathcal{H})$) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\Theta(z) J \Lambda^\#(z) = \Lambda(z) J \Theta^\#(z) \quad \text{p.w. na } \mathbb{T}. \quad (5.7)$$

Twierdzenie 5.9. *Niech $\Theta, \Lambda \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ będą funkcjami wewnętrznymi oraz niech J będzie operatorem sprzężenia w $\mathcal{H}$. Istnieje $\mathbf{M}_z$ –przemienne sprzężenie $\mathbf{C}$ w przestrzeni $L^2(\mathcal{H})$ takie, że $\mathbf{C}(\Lambda H^2(\mathcal{H})) \subset \Theta H^2(\mathcal{H})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja wewnętrzna $\Psi \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ taka, że*

$$(\Psi \Lambda^* \Theta)_J = (\Psi \Lambda^* \Theta)^*. \quad (5.8)$$

W tym przypadku, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_J^{\Lambda, \Gamma}$ dla pewnej funkcji wewnętrznej $\Gamma \in H^\infty(B(\mathcal{H}))$ takiej, że $\Theta \leq \Gamma$ oraz

$$\Gamma \Lambda_J^* = \Lambda \Gamma_J^*. \quad (5.9)$$

6 Opis pozostałych osiągnięć naukowych

Pozostałe publikacje naukowe:

- [P1] C. Benhida, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak. Skew-symmetric operators and reflexivity. *Mathematica Slovaca*, 68:415–420, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1515/ms-2017-0112>.
- [P2] J. Bračič, K. Kliś-Garlicka, V. Müller, and I. G. Todorov. Operator hyperreflexivity of subspace lattices. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 68:383–390, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00020-010-1804-9>.

- [P3] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Invertibility, fredholmness and kernels of dual truncated Toeplitz operators. *Banach J. Math. Anal.*, 14:1558–1580, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s43037-020-00077-8>.
- [P4] M. C. Câmara, K. Kliś-Garlicka, and M. Ptak. *(Asymmetric) Dual Truncated Toeplitz Operators*. Springer, pp. 429–460, Operator and norm inequalities and related topics, Trends in mathematics edition, 2022.
- [P5] K. Kliś and M. Ptak. Quasinormal operators are hyperreflexive. *Topological Algebras, their Applications, and Related Topics, Banach Center Publications*, 67:241–244, 2005.
- [P6] K. Kliś and M. Ptak. k -hyperreflexive subspaces. *Houdson J. Math.*, 32:299–313, 2006.
- [P7] K. Kliś-Garlicka. Rank-one perturbation of Toeplitz operators and reflexivity. *Opuscula Mathematica*, 32(3):505–509, 2012. DOI: <http://dx.doi.org/10.7494/OpMath.2012.32.3.505>.
- [P8] K. Kliś-Garlicka. Reflexivity of bilattices. *Czechoslovak Math. J.*, 63(4):995–1000, 2013. DOI <https://doi.org/10.1007/s10587-013-0067-4>.
- [P9] K. Kliś-Garlicka. Perturbation of Toeplitz operators and reflexivity. *Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math.*, 13:15–18, 2014. DOI: 10.2478/aupcsm-2014-0002.
- [P10] K. Kliś-Garlicka. Hyperreflexivity of bilattices. *Czechoslovak Math. J.*, 66(1):119–125, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10587-016-0244-3>.
- [P11] K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, and M. Ptak. Characterization of truncated Toeplitz operators by conjugations. *Oper. Matrices*, 11(3):807–822, 2017. DOI: [dx.doi.org/10.7153/oam-11-57](https://doi.org/10.7153/oam-11-57).
- [P12] K. Kliś-Garlicka and V. Müller. Non-operator reflexive subspace lattice. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 62:595–599, 2008.
- [P13] K. Kliś-Garlicka and M. Ptak. C -symmetric operators and reflexivity. *Oper. Matrices*, 9(1):225–232, 2015.

6.1 Refleksywność

Zagadnienie refleksywności jest związane z dobrze znanym problemem istnienia nietrywialnej podprzestrzeni niezmienniczej. Mianowicie operator nazywany jest

refleksywnym, jeśli ma te same podprzestrzenie niezmiennicze, co domknięta algebra generowana przez ten operator i identyczność. Refleksywność początkowo została określona dla algebr operatorowych i pojedynczych operatorów (D. Sarason). Definicja refleksywności została później uogólniona na podprzestrzenie operatorów [13], co z punktu widzenia topologii wydaje się bardziej naturalnym spojrzeniem na problem refleksywności.

Niech $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ będzie domkniętą podprzestrzenią. *Domknięcie refleksywne* $\mathcal{M}$ definiujemy jako

$$\text{Ref } \mathcal{M} = \{T \in B(\mathcal{H}) : Th \in [\mathcal{M}h] \text{ dla każdego } h \in \mathcal{H}\}.$$

(Tu $[x]$ oznacza domkniętą podprzestrzeń generowaną przez x .) Podprzestrzeń $\mathcal{M}$ nazywamy *refleksywną*, jeśli $\mathcal{M} = \text{Ref } \mathcal{M}$. Jeśli zaś $\text{Ref } \mathcal{M} = B(\mathcal{H})$, to mówimy, że $\mathcal{M}$ jest *tranzytywną*. W przypadku, gdy podprzestrzeń jest słabo*-domkniętą, jej refleksywność jest równoważna gęstości operatorów rzędu jeden w jej preanihilatorze [14]. Z kolei tranzytywność oznacza, że w preanihilatorze nie ma operatorów rzędu jeden. Oznaczmy przez $\tau\mathcal{C}$ przestrzeń wszystkich operatorów śladowych na $\mathcal{H}$ i przez F_k zbiór operatorów, których rząd jest nie większy niż k . *Preanihilator* podprzestrzeni $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ jest określony jako

$$\mathcal{M}_\perp = \{t \in \tau\mathcal{C} : \text{tr}(Tt) = 0 \text{ dla każdego } T \in \mathcal{M}\}.$$

Dla słabo*-domkniętej podprzestrzeni $\mathcal{M}$ refleksywność jest równoważna równości $\mathcal{M}_\perp = [\mathcal{M}_\perp \cap F_1]$, zaś tranzytywność $\mathcal{M}$ oznacza, że $\mathcal{M}_\perp \cap F_1 = \emptyset$ ([14]). To prowadzi w naturalny sposób do definicji k -refleksywności ([2]). Mówimy, że podprzestrzeń $\mathcal{M}$ jest k -*refleksywną*, jeśli $\mathcal{M}_\perp = [\mathcal{M}_\perp \cap F_k]$.

Niech C będzie operatorem sprzężenia w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Oznaczmy zbiór wszystkich C -symetrycznych operatorów przez

$$\mathcal{C} = \{T \in B(\mathcal{H}) : CTC = T^*\}.$$

Operator A nazywany jest C -*skośnie-symetrycznym*, jeśli $CAC = -A^*$. Znanym faktem jest, że każdy operator $A \in B(\mathcal{H})$ może być przedstawiony jako suma C -symetrycznego i C -skośnie-symetrycznego operatora, czyli $A = X + Y$, gdzie $X = \frac{1}{2}(A + CA^*C)$, $Y = \frac{1}{2}(A - CA^*C)$.

W pracy [P1] udowodniliśmy, że podprzestrzeń wszystkich C -skośnie-symetrycznych operatorów w $\mathcal{H}$ jest refleksywna. Z kolei podprzestrzeń $\mathcal{C}$ jest bardzo daleka od bycia refleksywną. W istocie przestrzeń wszystkich C -symetrycznych operatorów na $\mathcal{H}$ jest tranzytywna ([P13]), czego konsekwencją jest to, że nie ma operatorów rzędu jeden w preanihilatorze $\mathcal{C}$. Jednakże możemy opisać wszystkie operatory rzędu dwa w $\mathcal{C}_\perp$ i to pozwoliło nam udowodnić 2-refleksywność przestrzeni $\mathcal{C}$ ([P13]).

Rozważmy teraz klasyczną przestrzeń Hardy'ego H^2 oraz $\{e_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ bazę kanoniczną w H^2 . Oznaczmy przez $\mathcal{T}$ przestrzeń wszystkich operatorów Toeplitza na H^2 , czyli $\mathcal{T} = \{T_\phi : \phi \in L^\infty\}$, oraz przez $\mathcal{M}_{ml}$ podprzestrzeń postaci $\mathcal{T} + \mathbb{C}(e_l \otimes e_m)$. W pracy [P7] dowodzimy, że ta podprzestrzeń $\mathcal{M}_{ml}$ nie jest refleksywna ale jest 2-refleksywna.

Ponieważ własność refleksywności nie jest zazwyczaj dziedziczna, do uzyskania dziedziczności wymagane jest dodatkowe założenie, którym jest własność zazwyczaj nazywana $\mathbb{A}_{1/k}$. W [P7] dowodzimy, że podprzestrzeń $\mathcal{M}_{lm} = \mathcal{T} + \mathbb{C}(e_l \otimes e_m)$ ma własność $\mathbb{A}_{1/4}$ i w konsekwencji uzyskujemy, że każda słabo*-domknięta podprzestrzeń zawarta w $\mathcal{M}_{lm} = \mathcal{T} + \mathbb{C}(e_l \otimes e_m)$ jest 4-refleksywna. Uzyskujemy również silniejszą własność, czyli 2-hyperrefleksywność $\mathcal{M}_{lm} = \mathcal{T} + \mathbb{C}(e_l \otimes e_m)$ ze stałą $\kappa_2(\mathcal{M}_{lm}) \leq 2$.

Wyniki te zostały uogólnione w [P9], gdzie rozważaliśmy

$$\mathcal{M}_J = \text{span}\{e_i \otimes e_j : (i, j) \in J\}$$

oraz podprzestrzenie postaci

$$\mathcal{M} = \mathcal{T} + \mathcal{M}_J = \text{span}\{T_\varphi + g : \varphi \in L^\infty, g \in \mathcal{M}_J\},$$

tu J jest skończonym podzbiorem $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Pokazaliśmy, że $\mathcal{M}$ jest słabo*-domknięta, nie jest refleksywna, ale jest 2-refleksywna. Jest ona ponadto 2-hyperrefleksywna ze stałą $\kappa_2(\mathcal{M}) \leq 2$.

Pojęcie bikraty zostało wprowadzone przez V. Shulmana w [17] jako uogólnienie krat podprzestrzeni. Badania te były kontynuowane w [19]. Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Oznaczmy przez $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ kratę wszystkich ortogonalnych projekcji na $\mathcal{H}$. Jeśli $M, N \subset \mathcal{H}$ są domkniętymi podprzestrzeniami możemy zdefiniować dwa działania *łączenie* $M \vee N = \text{cl}\{f + g : f \in M, g \in N\}$ oraz *przecięcie* $M \wedge N = M \cap N$. Często identyfikujemy domkniętą podprzestrzeń liniową z projekcją ortogonalną na nią. Zatem $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ z działaniami łączenie i przecięcie stanowi kratę zupełną. *Kratą podprzestrzeni* nazywamy SOT-domkniętą podkratę $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$ taką, że $0, I \in \mathcal{L}$. Krata podprzestrzeni $\mathcal{L}$ jest *refleksywna*, jeśli $\mathcal{L} = \text{Lat Alg } \mathcal{L}$ [15].

Bikratą nazywamy zbiór $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$ takich, że $(0, I), (I, 0), (0, 0) \in \Sigma$ oraz jeśli $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2) \in \Sigma$, to $(P_1 \wedge P_2, Q_1 \vee Q_2), (P_1 \vee P_2, Q_1 \wedge Q_2) \in \Sigma$.

Niech $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$ będzie bikratą. Możemy wtedy zdefiniować podprzestrzeń

$$\text{op } \Sigma = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K}) : QTP = 0, \forall (P, Q) \in \Sigma\}.$$

Zauważmy, że $\text{op } \Sigma$ jest refleksywna, a ponadto wszystkie refleksywne podprzestrzenie są takiej postaci. Z każdą podprzestrzenią $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ możemy powiązać

bikratę bil $\mathcal{S}$ daną jako

$$\text{bil } \mathcal{S} = \{(P, Q) : QSP = \{0\}\}.$$

Bikratę $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$ nazywamy *refleksywną*, jeśli $\text{bil op } \Sigma = \Sigma$.

Dla danej kraty podprzestrzeni $\mathcal{L}$ możemy zdefiniować bikratę $\Sigma_{\mathcal{L}}$ jako

$$\Sigma_{\mathcal{L}} = \{(P, Q) : \text{istnieje } L \in \mathcal{L} \text{ przy } P \leq L \leq Q^\perp\}.$$

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ pary $(P, 0)$, $(0, Q)$ należą do $\Sigma_{\mathcal{L}}$. Z kolei dla danej bikraty Σ można skonstruować kratę

$$\mathcal{L}_\Sigma = \{P \oplus Q^\perp : (P, Q) \in \Sigma\}.$$

W pracy [P8] opisano zależności między refleksywnością $\mathcal{L}$ a refleksywnością $\Sigma_{\mathcal{L}}$. Opisano również zależność refleksywności Σ a refleksywności $\mathcal{L}_\Sigma$. Udowodniono w szczególności, że jeśli $\mathcal{L}$ jest kratą podprzestrzeni, to $\text{op } \Sigma_{\mathcal{L}} = \text{alg } \mathcal{L}$ oraz $\text{bil op } \Sigma_{\mathcal{L}} = \Sigma_{\text{lat alg } \mathcal{L}}$. W konsekwencji otrzymano, że refleksywność $\mathcal{L}$ jest równoważna refleksywności $\Sigma_{\mathcal{L}}$.

Z kolei w [P8] pokazano, że refleksywność bikraty Σ implikuje refleksywność $\mathcal{L}_\Sigma$, ale przeciwna implikacja nie zachodzi, co zilustrowano przykładem.

6.2 Hyperrefleksywność

Hyperrefleksywność jest własnością silniejszą niż refleksywność. Badania nad nią zapoczątkował W. T. Arveson [1], który udowodnił, że odległość dowolnego operatora $T \in B(\mathcal{H})$ od refleksywnej algebry gniazdowej $\mathcal{A}$ jest dana przez równość:

$$\text{dist}(T, \mathcal{A}) = \sup\{\|(I - P)TP\| : P \in \text{Lat } \mathcal{A}\},$$

innymi słowy, algebra $\mathcal{A}$ jest hyperrefleksywna ze stałą 1. Pojęcie hyperrefleksywności wprowadzone było najpierw dla algebr operatorowych, a następnie uogólnione na podprzestrzenie operatorowe przez J. Krausa i D. Larsona. Podprzestrzeń operatorów $\mathcal{M}$ jest *hyperrefleksywna*, jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że dla dowolnego $T \in B(\mathcal{H})$ zachodzi

$$\text{dist}(T, \mathcal{M}) \leq c \sup\{\|QTP\| : P, Q \text{ projekcje takie, że } Q\mathcal{M}P = 0\}. \quad (6.1)$$

Oznaczmy przez $\alpha(T, \mathcal{M})$ supremum po prawej stronie (6.1). Wielkość $\alpha(T, \mathcal{M})$ może być również obliczona przy wykorzystaniu operatorów rzędu jeden, mianowicie

$$\alpha(T, \mathcal{M}) = \sup\{|tr(Tt)| : t \in \mathcal{M}_\perp \cap F_1, \|t\|_1 \leq 1\}. \quad (6.2)$$

W świetle powyższego naturalnym uogólnieniem hyperrefleksywności jest pojęcie k -hyperrefleksywności (wprowadzone w [P6]). Podprzestrzeń $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ nazywamy k -hyperrefleksywną, jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$\text{dist}(T, \mathcal{M}) \leq c \sup\{|tr(Tt)| : t \in \mathcal{M}_\perp \cap F_k, \|t\|_1 \leq 1\}. \quad (6.3)$$

Artykuł [P6] jest poświęcony k -hyperrefleksywności podprzestrzeni operatorów. Jego podstawą jest moja rozprawa doktorska. Podajemy tam wiele podstawowych wyników dotyczących k -hyperrefleksywności, jak również formułujemy warunki równoważne i dowodzimy, że pod pewnymi warunkami własność ta jest dziedziczna. Badamy także problem, jak zachowuje się k -hyperrefleksywność względem sumy ortogonalnej. To znajduje zastosowanie w konstruowaniu interesujących przykładów, przykładowo pokazujemy, że istnieje k -refleksywna ale nie k -hyperrefleksywna podprzestrzeń. Dowodzimy ponadto 2-hyperrefleksywności przestrzeni wszystkich operatorów Toeplitza. Badamy także podprzestrzenie skończone wymiarowe i dowodzimy w szczególności, że każda k -wymiarowa podprzestrzeń ($k > 2$) jest k -hyperrefleksywna.

Davidson w [8] uzyskał rezultat, że operator przesunięcia jednostronnego jest hyperrefleksywny ze stałą co najwyżej 19. W [P5] pokazaliśmy, że stała ta nie jest większa niż 12, ponadto uzyskaliśmy hyperrefleksywność operatorów quasinormalnych ze stałą co najwyżej 259. Z tego twierdzenia wynika między innymi, że każda izometria jest hyperrefleksywna.

Problem hyperrefleksywności rozważany był również w [P13, P1]. Udowodniliśmy w [P1], że jeśli C jest operatorem sprzężenia w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, to podprzestrzeń wszystkich C -skośnie-symetrycznych operatorów na $\mathcal{H}$ jest hyperrefleksywna ze stałą co najwyżej 3 oraz 2-hyperrefleksywna ze stałą 1. Dla podprzestrzeni wszystkich C -symetrycznych operatorów nie można oczekiwać, że jest ona hyperrefleksywna (gdyż nie jest refleksywna), ale uzyskaliśmy w [P13], że jest 2-hyperrefleksywna ze stałą 1.

Pojęcie hyperrefleksywności dla bikrat zostało wprowadzone i badane w [P10]. Dla bikraty $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$ oraz pary projekcji $(P, Q) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$ definiujemy

$$\alpha((P, Q), \Sigma) = \sup\{\|QTP\| : \|T\| \leq 1, T \in \text{op } \Sigma\}$$

oraz

$$d((P, Q), \Sigma) = \inf\{\|P - L_1\| + \|Q - L_2\| : (L_1, L_2) \in \Sigma\}.$$

Zauważmy, że $\alpha((P, Q), \Sigma) \leq d((P, Q), \Sigma)$.

Bikrata $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times \mathcal{P}(\mathcal{K})$ nazywana jest *hyperrefleksywną*, jeśli istnieje stała $\kappa > 0$ taka, że $d((P, Q), \Sigma) \leq \kappa \alpha((P, Q), \Sigma)$, dla każdej pary $(P, Q) \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \times$

$\mathcal{P}(\mathcal{K})$. Infimum po wszystkich stałych κ oznaczamy przez $\kappa(\Sigma)$ i nazywamy *stałą hyperrefleksywności* dla Σ .

W [P10] dowodzimy, że hyperrefleksywność bikraty Σ implikuje jej refleksywność. Ponadto hyperrefleksywność krat podprzestrzeni jest dziedziczna w tym sensie, że jeśli $\mathcal{M}$ jest hyperrefleksywną kratą podprzestrzeni ze stałą a , $\mathcal{L}$ jest podkratą $\mathcal{M}$, to, jeśli istnieje stała $b > 0$ taka, że

$$d(M, \mathcal{L}) \leq b\alpha(M, \mathcal{L})$$

dla wszystkich $M \in \mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ jest hyperrefleksywna ze stałą $\kappa(\mathcal{L}) \leq a + b + 2ab$.

Ponadto w [P10] uzyskano wynik, że jeśli bikrata Σ jest hyperrefleksywna, to krata $\mathcal{L}_\Sigma$ jest hyperrefleksywna, ale hyperrefleksywność $\mathcal{L}_\Sigma$ nie implikuje hyperrefleksywności Σ , co zilustrowano odpowiednim przykładem. Pokazujemy również, że dla kraty podprzestrzeni $\mathcal{L}$ zachodzi implikacja: jeśli $\Sigma_{\mathcal{L}}$ jest hyperrefleksywna, to $\mathcal{L}$ jest hyperrefleksywna.

6.3 Operatorowa refleksywność oraz operatorowa hyperrefleksywność krat podprzestrzeni

Niech $\mathcal{H}$ będzie przestrzenią Hilberta oraz niech $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ oznacza zbiór wszystkich projekcji ortogonalnych w $\mathcal{H}$. Krata projekcji $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$ nazywana jest *operatorowo refleksywną* (lub *1-domkniętą*), jeśli $\mathcal{L} = \text{ref } \mathcal{L}$. W [18] pokazano, że pewne ważne klasy krat podprzestrzeni (na przykład zwarte lub refleksywne w zwykłym sensie) są operatorowo refleksywne. Udowodniono również, że wszystkie kraty podprzestrzeni są algebraicznie refleksywne. Postawiono tam jednak otwarty problem: czy wszystkie kraty podprzestrzeni są operatorowo refleksywne. W publikacji [P12] dowodzimy, że odpowiedź jest negatywna. Konstruujemy przykład silnie domkniętej kraty projekcji $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathcal{H})$, której operatorowo-refleksywna otoczka jest całym $\mathcal{P}(\mathcal{H})$. Oznacza to, że $\mathcal{L}$ nie jest operatorowo refleksywna.

Dla kraty podprzestrzeni $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H})$ oraz projekcji $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ oznaczamy przez

$$\text{dist}(P, \mathcal{L}) = \inf\{\|P - Q\|; \quad Q \in \mathcal{L}\} = \inf_{Q \in \mathcal{L}} \sup_{\|x\| \leq 1} \|Px - Qx\|$$

odległość P od $\mathcal{L}$. Za [9] definiujemy

$$\beta(P, \mathcal{L}) = \sup\{\|P^\perp AP\|; \quad A \in (\text{alg } \mathcal{L})_1\},$$

gdzie $(\text{alg } \mathcal{L})_1$ oznacza zbiór wszystkich kontrakcji w $\text{alg } \mathcal{L}$. Łatwo zauważyć, że $\beta(P, \mathcal{L}) \leq 2 \text{dist}(P, \mathcal{L})$ dla dowolnego P . Krata podprzestrzeni $\mathcal{L}$ nazywana jest *hyperrefleksywną*, jeśli istnieje stała dodatnia κ taka, że

$$\text{dist}(P, \mathcal{L}) \leq \kappa \beta(P, \mathcal{L}) \quad \text{dla każdego } P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}). \quad (6.4)$$

Infimum $\kappa(\mathcal{L})$ po wszystkich stałych κ spełniających (6.4) nazywamy *stałą hyperrefleksywności dla $\mathcal{L}$* . Każda hyperrefleksywna krata podprzestrzeni jest refleksywna, ale przeciwna implikacja zazwyczaj nie zachodzi.

W artykule [P2] wprowadzamy inny sposób mierzenia odległości dla krat podprzestrzeni, który jest naturalną analogią do odległości wprowadzonej przez Arvesona. Dla kraty podprzestrzeni $\mathcal{L}$ i $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ określmy

$$\alpha(P, \mathcal{L}) = \sup\{\text{dist}(Px, \mathcal{L}x); \|x\| \leq 1\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \inf_{Q \in \mathcal{L}} \|Px - Qx\|.$$

Zauważmy, że $\alpha(P, \mathcal{L}) \leq \text{dist}(P, \mathcal{L})$. Kratę podprzestrzeni $\mathcal{L}$ nazywamy *operatorowo hyperrefleksywną*, jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$\text{dist}(P, \mathcal{L}) \leq c \alpha(P, \mathcal{L}), \quad \text{for all } P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}). \quad (6.5)$$

Infimum $c(\mathcal{L})$ po wszystkich stałych c spełniających (6.5) nazywamy *stałą operatorowej hyperrefleksywności dla $\mathcal{L}$* . Łatwo zauważyć, że każda operatorowo hyperrefleksywna krata jest operatorowo refleksywna.

W publikacji [P2] badamy relacje między refleksywnością, hyperrefleksywnością, operatorową refleksywnością a operatorową hyperrefleksywnością krat podprzestrzeni. W szczególności dowodzimy, że każda hyperrefleksywna krata podprzestrzeni jest operatorowo hyperrefleksywna. Ponadto, jeśli $\mathcal{L}$ jest hyperrefleksywną kratą podprzestrzeni ze stałą hyperrefleksywności $\kappa(\mathcal{L})$, to stała dla operatorowej hyperrefleksywności dla $\mathcal{L}$ jest nie większa niż $4\kappa(\mathcal{L})$. Uzyskujemy również wynik, że każda skończona krata podprzestrzeni $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$ jest operatorowo hyperrefleksywna oraz $c(\mathcal{L}) \leq \sqrt{n}$. Konstruujemy operatorowo refleksywną kratę podprzestrzeni, która nie jest operatorowo hyperrefleksywna, a także dowodzimy, że operatorowa hyperrefleksywność jest dziedziczna na podkraty podprzestrzeni oraz zachowuje się poprzez sumy ortogonalne.

Podsumowując, w [P2] pokazano, że relacje między tymi własnościami krat podprzestrzeni są jak w poniższym diagramie:

$$\begin{array}{ccc} \text{refleksywność} & \implies & \text{operatorowa refleksywność} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{hyperrefleksywność} & \implies & \text{operatorowa hyperrefleksywność} \end{array}$$

Implikacje przeciwne do tych w diagramie nie zachodzą, co zostało zilustrowane odpowiednimi przykładami.

6.4 Charakteryzacja operatorów Toeplitza oraz obciętych operatorów Toeplitza przez operatory sprzężenia

W [P11] udowodniliśmy, że operatory Toeplitza mają tę ciekawą własność, że mogą być scharakteryzowane przez rodzinę operatorów sprzężenia. W pracy tej rów-

niez uzyskaliśmy charekteryzację za pomocą operatorów sprzężenia dla obciążonych operatorów Toeplitza w pewnych szczególnych przypadkach przestrzeni modelowych. Najpierw rozważaliśmy przypadek, kiedy przestrzeń modelowa zadana jest przez funkcję wewnętrzną będącą iloczynem Blaschkego z pojedynczym zerem, następnie badaliśmy przypadek, gdy funkcja wewnętrzna jest skończonym iloczynem Blaschkego z różnymi zerami. Podaliśmy również charakteryzację obciążonych operatorów Toeplitza na przestrzeni modelowej zadanej przez nieskończony iloczyn Blaschkego, którego zera są jednostajnie separowalne.

6.5 Dualne obciążone operatory Toeplitza

W pracy [P3] wprowadzamy i badamy nowe pojęcie asymetrycznych dualnych operatorów Toeplitza, które są naturalnym uogólnieniem dualnych i obciążonych dualnych operatorów Toeplitza. Badamy w szczególności jądra oraz różne własności spektralne takie jak własność Fredholma oraz odwracalność tych operatorów. Uzyskane rezultaty wykorzystane są do opisu widma kilku klas dualnych obciążonych operatorów Toeplitza, w szczególności dualnego obciążonego operatora przesunięcia i jego sprzężenia. Uzyskujemy to poprzez nowe podejście do tych operatorów i ich asymetrycznych analogów. Dowodzimy, że są one równoważne po rozszerzeniu do sparowanych operatorów na $L^2 \oplus L^2$ i uzyskujemy związek z twierdzeniem korony. To pozwala ponadto na udowodnienie, że dla odwracalnych symboli w $L^\infty(\mathbb{T})$ dualne obciążone operatory Toeplitza są w istocie równoważne po rozszerzeniu obciążonym operatorom Toeplitza z odwracalnym symbolem.

Pozycja [P4] jest rozdziałem w książce "Operator and Norm Inequalities and Related Topics", która z kolei jest tomem w serii książek: "Trends in Mathematics". Zawieramy w [P4] znaczące rezultaty dotyczące tematyki (asymetrycznych) dualnych obciążonych operatorów Toeplitza.

7 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej

7.1 Staże i wizyty naukowe

01.09.2002–30.11.2002 trzymiesięczny staż w Instytucie Matematycznym "Simon Stoilow" Rumuńskiej Akademii Nauk w Bukareszcie fundowany przez stypendium naukowe w ramach programu EURROMAT. W trakcie pobytu realizowałam badania nad refleksywnością i k-hyperrefleksywnością podprzestrzeni operatorowych oraz hyperrefleksywnością operatorów quasinormalnych. Wyniki tych

badan zostały opublikowane w mojej rozprawie doktorskiej oraz w publikacjach [P6, P5].

- 22.04.2002–26.04.2002 wizyta naukowa w Instytucie Matematycznym Czeskiej Akademii Nauk, współpraca z prof. Vladimirem Müllerem. W trakcie wizyty pracowałam nad hyperrefleksywnością algebr i podprzestrzeni operatorowych.
- 04.11.2003–29.11.2003 miesięczny staż w Department of Pure Mathematics, Queen's University Belfast, finansowany przez grant fundowany przez London Mathematical Society. W trakcie stażu pracowałam nad refleksywnością i hyperrefleksywnością krat i bikrat podprzestrzeni. Nawiązałam także współpracę z dr Ivanem Todorowem. Ta i późniejsze krótsze wizyty (17.06.2004–26.06.2004 oraz 03.03.2007–18.03.2007) zaowocowały publikacjami [P8, P10, P2].
- 05.05.2008–09.05.2008 wizyta naukowa w Instytucie Matematycznym Czeskiej Akademii Nauk, współpraca z prof. Vladimirem Müllerem oraz prof. J. Bračičem. W trakcie wizyty pracowaliśmy nad operatorową refleksywnością i operatorową hyperrefleksywnością krat podprzestrzeni. Wyniki tej współpracy ukazały się w [P12, P2].
- 01.10.2015–20.06.2016 staż w krakowskim oddziale Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk. W ramach projektu wraz z prof. Chafiq Benhida (Universite Lille 1) oraz z prof. Markiem Ptakiem badaliśmy między innymi algebraiczne własności operatorów C-skośnie symetrycznych, głównie pod kątem ich refleksywności i hyperrefleksywności. Wyniki badań zostały opublikowane w [P1].
- od 2016 roku współpracuję naukowo z prof. Marią Cristiną Câmara. W związku z tym odbyłam kilka wizyt w Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa np. tydzień w maju 2016, 2 tygodnie w maju 2017 oraz wyjazdy związane z konferencjami WOTCA. Podczas tych wizyt prowadziłyśmy badania nad własnościami obciętych operatorów Toeplitza, dualnych obciętych operatorów Toeplitza. Współpraca ta zaowocowała cyklem publikacji [O1, O8, O7, O4, O3, O2, O6, O5] oraz [P3, P4].

7.2 Recencje prac naukowych

Recenzowałam publikacje naukowe dla takich czasopism jak:

- Annals of Functional Analysis,
- Bulletin of the Malaysian Mathematical Society,

- Complex Analysis and Operator Theory,
- Complex Variables and Elliptic Equations,
- European Journal of Mathematics,
- Filomat,
- Journal of the London Mathematical Society,
- Journal of Operator Theory,
- Kyungpook Mathematical Journal,
- Linear and Multilinear Algebra,
- Mathematica Bohemica,
- Monatshefte für Mathematik,
- Operators and Matrices,
- Science China Mathematics,
- Special Matrices.

8 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

Doświadczenia dydaktyczne

Od października 1996 roku prowadzę zajęcia dydaktyczne (ćwiczenia, wykłady i zajęcia projektowe) z matematyki wyższej, analizy matematycznej, geometrii krzywej, statystyki oraz technologii informacyjnej dla studentów różnych kierunków Uniwersytetu Rolniczego takich jak: Geodezja i Kartografia, Inżynieria Środowiska, Ochrona Zasobów Leśnych, Leśnictwo, Technologia Żywności, Dietetyka, Biotechnologia, Bioinformatyka i Analiza Danych. Prowadziłam również kursy adaptacyjne z matematyki dla studentów pierwszego roku. Brałam udział w egzaminach wstępnych na kierunku Geodezja i Kartografia i maturach łączonych z egzaminami wstępnymi na kierunek Inżynieria Środowiska. Prowadziłam również kursy analizy w języku angielskim dla uczestników programu Erasmus+. Brałam udział w opracowaniu nowego programu studiów oraz opracowałam wiele programów i efektów kształcenia kursów. Brałam udział w egzaminach inżynierskich jako członek komisji.

Ponadto w 2008 roku przygotowałam i prowadziłam serię konwersatoriów dla pracowników Wydziału Inżynierii Środowiska i Geodezji zatytułowanych "Chaos w inżynierii środowiska". Wykłady dotyczyły zastosowań matematycznej teorii chaosu w naukach przyrodniczych ze szczególnym naciskiem na inżynierię środowiska.

Byłam również opiekunem pierwszego roku kierunku Geodezja i Kartografia oraz członkiem komisji wydziałowej ds. dydaktycznych na kierunku Geodezja i Kartografia.

Działalność organizacyjna

W latach 2004, 2006, 2008, 2014, 2016, 2018, 2020 byłam współorganizatorem cyklu międzynarodowych konferencji SWOT (Small/Summer Workshop on Operator Theory) organizowanych przez pracowników Katedry Zastosowań Matematyki Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie. W 2022 roku brałam udział w organizowaniu The International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2022).

Byłam członkiem Rady Wydziału Inżynierii Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie, byłam członkiem Rady Dyscypliny Matematyka. Obecnie jestem członkiem Kolegium Wydziałowego Wydziału Inżynierii Środowiska i Geodezji Uniwersytetu Rolniczego w Krakowie.

9 Inne ważne informacje dotyczące kariery zawodowej

2021 nagroda za najlepszą publikację roku w Banach Journal of Mathematical Analysis za artykuł: M. C. Cămară, K. Kliś-Garlicka, B. Łanucha, M. Ptak, *Invertibility, Fredholmness and kernels of dual truncated Toeplitz operators*, Banach J. Math. Anal. **14** (2020), 1558–1580.

2008 ekspert zewnętrzny w Narodowym Programie Foresight "Polska 2020".

2007–2009 udział w polsko-słoweńskim projekcie badawczym pt. *Reflexivity and hyper-reflexivity of spaces of operators*.

2004–2006 udział w projekcie badawczym Grant KBN nr 1 P03A 016 27, *"Podprzestrzenie refleksywne i hyperrefleksywne"*.

Literatura

- [1] N. T. Arveson. Interpolation problems in nest algebras. *J. Func. Anal.*, 20:208–233, 1975.

- [2] E. A. Azoff. K -reflexivity in finite dimensional subspaces. *Duke Math.*, 40:821–830, 1973.
- [3] A. Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. Mashregi, and D. Timotin. Bounded symbols and reproducing kernels thesis for truncated Toeplitz operators. *J. Func. Anal.*, 259:2673–2701, 2010.
- [4] H. Bercovici and D. Timotin. Truncated Toeplitz operators and complex symmetries. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146, 02 2017.
- [5] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. *J. Reine Angew. Math.*, 76:89–102, 1963.
- [6] M. C. Câmara and J. R. Partington. Asymmetric truncated Toeplitz operators and Toeplitz operators with matrix symbol. *J. Oper. Theory*, 77:455–479, 2017. DOI: <https://doi.org/10.7900/jot.2016apr27.2108>.
- [7] N. Chevrot, E. Frician, and D. Timotin. The characteristic function of a complex symmetric contraction. *Proc. Amar. Math. Soc.*, 135:2877–2886, 2007.
- [8] K. Davidson. The distance to the analytic Toeplitz operators. *Illinois J. Math*, 31(2):265–273, 1987.
- [9] K. R. Davidson and K. J. Harrison. Distance formulae for subspace lattices. *J. Math. Soc.*, 39:309–323, 1989.
- [10] S. R. Garcia, J. Mashregi, and W. T. Ross. *Introduction to model spaces and their operators*. Cambridge University Press, 2016.
- [11] S. R. Garcia, E. Prodan, and M. Putinar. Mathematical and physical aspects of complex symmetric operators. *J. Phys A: Math. Theor.*, 47:353001, 2014.
- [12] S. R. Garcia and M. Putinar. Complex symmetric operators and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 358:1285–1315, 2006.
- [13] W. Loginov and V. Shulman. Hereditary and intermediate reflexivity of W^* algebras. *Math. USSR-Izv.*, 9:1189–1201, 1975.
- [14] W. E. Longstaff. On the operation Alg Lat in finite dimensions. *Lin. Alg. Appl.*, 27:27–29, 1979.
- [15] D. Sarason. Invariant subspaces and unstarred operator algebras. *Pacific J. Math.*, 17:511–517, 1966.

- [16] D. Sarason. Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. *Oper. Matrices*, 1:491–526, 2007.
- [17] V. S. Shulman. "nest algebras" by K. R. Davidson: a review. *Algebra and Analiz*, 2:236–255, 1990.
- [18] V. S. Shulman and I. Todorov. On subspace lattices. I. Closedness type properties and tensor products. *Integr. Equ. Oper. Theory*, 52:561–579, 2005.
- [19] V. S. Shulman and L. Turowska. Operator synthesis. I. Synthetic sets, bilattices and tensor algebras. *J. Funct. Anal.*, 209(2):293–331, 2004.
- [20] B. Sz.-Nagy, C.F. Foias, H. Bercovici, and L. Kérchy. *Harmonic Analysis of Operators on a Hilbert Space*. Springer, London, second edition, 2010.

*Komila
Chis-Gordale*