PODPIS ZAUFANY
JOANNA IRENA
JURECZKO
11.09.2023 10:00:45 [GMT+2]
Dokument podpisany elektronicznie podpisem zaufanym

Załącznik nr 3

Wrocław, 11.09.2023r.

Dr Joanna Jureczko
Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

AUTOREFERAT

Spis treści

1 Imię i nazwisko

Joanna Jureczko

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej

- **Magister matematyki (2001)**,
  Uniwersytet Śląski w Katowicach,
  Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Instytut Matematyki,
  tytuł pracy: „Działania na grupach permutacji",
  promotor: dr hab. Mieczysław Kula.

- **Doktor nauk matematycznych (2007)**,
  Uniwersytet Śląski w Katowicach,
  Wydział Matematyki, Fizyki i Chemii, Instytut Matematyki,
  tytuł rozprawy: „Wokół metody Bolzano-Weierstrassa",
  promotor: dr hab. Marian Turzański.

- **Licencjat sztuki (2004)**,
  Uniwersytet Śląski w Katowicach (Filia w Cieszynie),
  Wydział Artystyczny, Instytut Muzyki,
  tytuł pracy: „Muzyka a matematyka",
  promotor: prof. dr hab. Magdalena Dziadek.

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

- **2017 – obecnie**,
  Politechnika Wrocławska,
  Wydział Informatyki i Telekomunikacji,
  Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki,
  stanowisko: adiunkt badawczo-dydaktyczny.

- **2008 – 2017,**
  Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie,
  Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Szkoła Nauk Ścisłych,
  Instytut Matematyki,
  stanowisko: adiunkt naukowo-dydaktyczny.

- **2004 – 2012**,
  Wyższa Szkoła Bankowa w Poznaniu, Wydział Zamiejscowy w Chorzowie,
  stanowisko: nauczyciel akademicki.

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.)

4.1 Tytuł osiągnięcia naukowego

Niemierzalne zbiory i sumy zbiorów

4.2 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego

Osiągnięcie naukowe stanowi monografia naukowa

wydana przez wydawnictwo, które w roku opublikowania monografii w ostatecznej formie było ujęte w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. a,

[M1] J. Jureczko, *On nonmeasurable sets and unions*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2023, 156 s. MNiSW: 80.

Monografia [M1] zawiera wyniki opublikowane w pracach [C1-C5] oraz inne wyniki, w tym między innymi zamieszczone w pracach [N1-N4].

[C1] R. Frankiewicz, **J. Jureczko**, B. Węglorz, On Kuratowski partitions in the Marczewski and Laver structures and Ellentuck topology. Georgian Math. J. 26 (2019), no. 4, 591–598.

[C2] R. Frankiewicz, **J. Jureczko**, On the Gitik-Shelah theorem. Georgian Math. J. 26 (2019), no. 4, 555–559.

[C3] **J. Jureczko**, The new operations on complete ideals, Open Math. 17 (2019) no. 1, 415–422.

[C4] **J. Jureczko**, Special partitions of Baire spaces and precipitous ideals, Top. App. 322 (2022), 108304, 10pp.

[C5] **J. Jureczko**, Remarks on the existence of measurable cardinals, Bull. Sci. Math. 186 (2023), Paper No. 103283.

oraz inne wyniki, w tym między innymi zamieszczone w pracach:

[N1] **J. Jureczko** A note on Kuratowski partitions in metric spaces, https://arxiv.org/pdf/2303.16649.pdf.

[N2] **J. Jureczko** On some generalizations of the Halpern-Läuchli theorem, https://arxiv.org/pdf/2303.17327.pdf.

[N3] **J. Jureczko** Nonmeasurable sets in tree structures and Ellentuck topology, https://arxiv.org/pdf/2303.16650.pdf.

[N4] **J. Jureczko** Partitions and point-finite covers of Baire spaces, https://arxiv.org/pdf/2303.16652.pdf.

4.3 Opis osiągnięcia naukowego

Moje główne osiągnięcia z dyscypliny Matematyka dotyczą tematyki:

a) zbiorów niemierzalnych,

b) silnych ciągów,

c) porządku Rudin-Frolik.

W dyscyplinie Matematyka jestem autorem 12 prac samodzielnych oraz 3 współautorem. Wszystkie prace zostały opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora. Prace ukazały się między innymi w czasopismach: Bulletin des Sciences Mathématiques, Results in Mathematics, Topology and Its Applications, Georgian Mathematical Journal, Open Mathematics.
Kolejnych 7 prac samodzielnych jest w procesie recenzji.

Ponadto, opublikowałam 3 prace z zastosowań matematyki oraz 15 prac z dydaktyki matematyki.

4.3.1 Zarys problematyki wchodzącej w skład osiągnięcia naukowego

Tematyka autorskiej monografii [M1] dotyczy rozważań wokół istnienia zbiorów niemierzalnych (przedstawianych w postaci sumy "małych" zbiorów w sensie miary i kategorii). Uzyskane przeze mnie wyniki dotyczą między innymi rozwiązania problemu Kuratowskiego z 1935 roku, którego (uogólnione) sformułowanie można przedstawić następująco.

Jakie własności musi spełniać przestrzeń X, aby miała rozkład $\mathcal{F}$ na "małe" zbiory (w sensie miary i kategorii) taki, że dla dowolnej podrodziny $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ suma mnogościowa $\bigcup \mathcal{F}'$ jest "dużym" zbiorem (w sensie miary i kategorii)?

Rozkład, o którym mowa w powyższym sformułowaniu nazywamy *rozkładem Kuratowskiego*. W uzyskanych przeze mnie wynikach w monografii [M1] udowodniłam, że istnieją struktury (niekoniecznie tworzące przestrzeń toplogiczną), które nie mają rozkładów Kuratowskiego. Podałam też przykład przestrzeni metrycznej z rozkładem Kuratowskiego, która po uzupełnieniu nie ma takiej własności. Zdefiniowałam także tzw. K-ideał, czyli ideał związany z rozkładem Kuratowskiego rozważanej przestrzeni, dla którego udowodniłam szereg jego własności.

Jako wnioski z nieistnienia rozkładów Kuratowskiego dla konkretnych struktur udowodniłam pewne uogólnienia znanych twierdzeń: Louveau-Simpson, Halpern-Läuchli oraz sformułowałam i udowodniłam równoważne warunki na nieizomorficzność pewnych algebr Boole'a znane jako Twierdzenia Gitika-Shelaha. Ponadto uogólniłam wyniki, przedstawione w [C1], dotyczące nieistnienia rozkładu

Kuratowskiego dla rozważanych w [C1] struktur poprzez zastąpienie rozkładów pokryciami punktowo-skończonymi. Jako wniosek z tych rozważań uzyskałam twierdzenie o istnieniu selektorów mierzalnych.

4.3.2 Struktura monografii

Wyniki zamieszczone w pracach [C1-C5] oraz inne wyniki, między innymi przedstawione w jeszcze nie opublikowanych pracach [N1-N4], przedstawiłam w monografii [M1], której zawartość podzieliłam na cztery części, a każdą z nich na kilka rozdziałów.

W Części I (Rozdział 1) przedstawiłam podstawowe definicje, twierdzenia i własności wykorzystywane w dalszych częściach monografii, a także krótki opis przykładów zbiorów niemierzalnych znanych w literaturze (Rozdział 2).

W Części II zawarłam obszerne informacje na temat problemu Kuratowskiego, pojęcia rozkładu Kuratowskiego (Rozdział 3), a także najnowsze autorskie oraz współautorskie wyniki dotyczące istnienia/nieistnienia rozkładów Kuratowskiego w różnych strukturach. I tak: w Rozdziałach 4 i 5 zamieściłam wyniki dotyczące nieistnienia rozkładów Kuratowskeigo w strukturach drzewa (ang. tree structures) i topologii Ellentucka. W Rozdziale 6 zawarłam wyniki dotyczące głównie własności K-ideału związanego z rozkładem Kuratowskiego pewnych przestrzeni. W Rozdziałach 7 i 8 zamieściłam wyniki dotyczące związku K-ideału z ideałem precipitous (ang. precipitous ideal). Z kolei w Rozdziale 8 przedstawiłam wyniki z Rozdziału 7 w terminologii teorii gier. W Rozdziale 9 zamieściłam wyniki związane z dalszymi własnościami K-ideału i badaniem własności, jakie musi spełniać przestrzeń metryczna zupełna, aby miała rozkład Kuratowskiego. Ponadto wykazałam związek między istnieniem rozkładu Kuratowskiego a istnieniem liczby kardynalnej mierzalnej. W Rozdziale 10 przedstawiłam przykład przestrzeni metrycznej z rozkładem Kuratowskiego, która po uzupełnieniu nie ma takiego rozkładu.

W Części III zamieściłam wyniki będące konsekwencją nieistnienia rozkładów Kuratowskiego w strukturach omawianych w Części II. I tak: w Rozdziale 11 przedstawiłam uogólnienie Twierdzenia Louveau-Simpsona. W Rozdziale 12 zaś przedstawiłam równoważność twierdzeń Gitika-Shelaha o nieizomorficzności pewnych algebr Boole'a z nieistnieniem rozkładu Kuratowskiego w rozważanych przestrzeniach. W Rozdziale 13 udowodniłam uogólnione Twierdzenie Halpern-Läuchli.

W Części IV zawarłam wyniki dotyczące istnienia zbioru niemierzalnego dla pokryć punktowo-skończonych (Rozdział 14), a także wyniki analogiczne do tych zawartych w Rozdziałach 4 i 5, ale rozważając pokrycia punktowo-skończone danych struktur zamiast ich rozkłady (Rozdział 15). Natomiast, w Rozdziale 16 udowodniłam uogólnione wersje twierdzeń o selektorach mierzalnych.

Monografię kończy Bibliografia zawierająca cytowane pozycje oraz Indeks występujących haseł i symboli.

4.3.3 Wstęp

W matematyce zbiór niemierzalny to taki, którego nie da się "zmierzyć", przy czym pojęcie miary można różnie rozumieć w zależności od struktury, w której jest rozpatrywany zbiór. Pierwszymi, znanymi w literaturze zbiorami niemierzalnymi są: zbiór Vitali'ego (1905) oraz zbiór Bernsteina (1908). Obydwa te zbiory są skonstruowane na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ i przy założeniu Aksjomatu Wyboru (AC) (ang. Axiom of Choice). O ile niemierzalność zbioru Vitali'ego zależy od teorio-grupowych własności miary Lebesgue'a, to niemierzalność zbioru Bernsteina zależy od czysto topologicznych własności (więcej informacji na temat zbiorów niemierzalnych można znaleźć w pracy [33]).

W późniejszych latach zdefiniowano jeszcze kilka zbiorów niemierzalnych, między innymi: zbiór Sierpińskiego (1938) oraz zbiór Łuzina (1956). W 1984 roku Shelah udowodnił, że isnienie zbioru niemierzalnego wymaga założenia aksjomatyki Zermelo-Fraenkla (ZF) (ang. Zermelo-Fraenkel Axioms) oraz Aksjomatu Wyborów Zależnych (DC) (ang. Axiom of Dependent Choice). Z drugiej strony, w 1970 roku Solovay w pracy [46] skonstruował model, w którym wszystkie podzbiory prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ są mierzalne. Jednak jego wynik zależny jest od istnienia liczb kardynalnych nieosiągalnych, których istnienie i niesprzeczność nie może być udowodniona na gruncie standardowych aksjomatów teorii mnogości.

Jak widać, w literaturze jest niewiele przykładów zbiorów niemierzalnych, a część wyników z tej tematyki dotyczy tylko udowodnienia istnienia takich zbiorów, bez podania ich dokładnej konstrukcji. Jednak samo istnienie zbiorów niemierzalnych, w danej strukturze, może mieć istotne konsekwencje. Przykładami zbiorów niemierzalnych, które można przedstawić w postaci sumy (mnogościowej) pewnych "małych" zbiorów, są zbiory uzyskane w wyniku rozważań dotyczących rozwiązania problemu Kuratowskiego z 1935 roku. Od lat 70-tych ubiegłego wieku rozpoczęły się badania nad istnieniem zbiorów niemierzalnych właśnie w kontekście rozwiązania tego problemu.

W monografii [M1] przedstawiam zarówno wcześniej znane jak i najnowsze wyniki (te ostatnie mojego autorstwa lub współautorstwa) dotyczące rozwiązania problemu Kuratowskiego. Z uwagi na obszerne i wielokierunkowe omówienie tematu można uznać, że uzyskane wyniki są rozwiązaniem problemu Kuratowskiego w pewnych strukturach, (tzn. w strukturach, w których prawdziwy jest Lemat Fuzji).

Terminologia: "mały" i "duży" zbiór jest znana w literaturze i stosowana z powodu "ujednolicenia" nazw rodzajów zbiorów w różnych strukturach, szczególnie z powodu dualności między pojęciami: zbiór mierzalny w sensie Lebesgue'a, a zbiór mający własność Baire'a, (więcej informacji o tej dualności można znaleźć w monografii [42]). Ogólnie rzecz biorąc, w danej strukturze (niekoniecznie będącej przestrzenią topologiczną) możemy rozważyć pewną rodzinę $\mathcal{A}$ (np. σ-ciało lub algebrę Boole'a), której elementy nazwiemy "dużymi". Spośród elementów z rodziny $\mathcal{A}$ wybieramy te, które tworzą ideał. Te z kolei nazwiemy zbiorami "małymi". Jak przedstawiłam w monografii [M1], zbiory niemierzalne mogą mieć postać sumy (mnogościowej) pewnych "małych" zbiorów w sensie rozważanej struktury (Rozdziały 4 i 5), przy czym przez zbiór niemierzalny rozumiemy tutaj zbiór, który nie należy do rodziny $\mathcal{A}$.

4.3.4 Definicje, oznaczenia i znane fakty

W tej części przedstawiam jedynie wybrane definicje i twierdzenia, z których korzystam w dalszej części tego opisu. Więcej informacji znajduje się w Rozdziale 1 monografii [M1] oraz w monografiach [18, 31, 42].

Przyjmujemy następujące oznaczenia. Literami X, Y oznaczamy przestrzenie topologiczne. Symbolem

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subseteq X\}$$

oznaczamy zbiór potęgowy. Zbiór liczb naturalnych z naturalnym porządkiem oznaczamy przez ω, symbolem $\mathfrak{c}$ oznaczamy moc zbioru liczb rzeczywistych. Ponadto, jeżeli nie założymy inaczej, małe litery alfabetu greckiego będą oznaczać liczby kardynalne.

Będziemy używać notacji

$$[X]^\kappa = \{A \subset X \colon |A| = \kappa\}$$

oraz

$$[X]^{<\kappa} = \{A \subset X \colon |A| < \kappa\}.$$

Niech dana będzie funkcja $f \colon X \to Y$. Symbolem $f|A$ oznaczamy *restrykcję* funkcji f do zbioru $A \subset X$, tzn. funkcję $g \colon A \to Y$ taką, że $g(x) = f(x)$ dla każdego $x \in A$.

Niech $\mathcal{A} = \{A_i \subset X \colon i \in I\}$ będzie rodziną zbiorów, gdzie I oznacza tutaj dowolny zbiór indeksów, W dalszej części używamy notacji: $\bigcup \mathcal{A}$ oraz $\bigcap \mathcal{A}$, która oznacza odpowiednio:

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A} = \bigcup \{A_i \colon i \in I\}$$

oraz

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A} = \bigcap \{A_i \colon i \in I\}.$$

Symbolem ZF oznaczamy (standardowo) aksjomatykę Zermelo-Fraenkla (ang. Zermelo-Fraenkel Axioms), a przez ZFC aksjomatykę Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru (AC) (ang. Axiom of Choice).

Zbiory z własnością Baire'a. Zbiór $U \subset X$ ma *własność Baire'a* (ang. the Baire property), jeżeli istnieją: zbiór otwarty $V \subset X$ oraz zbiór pierwszej kategorii (ang. meager set) $M \subset X$ takie, że

$$U = V \vartriangle M,$$

gdzie $\vartriangle$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów.

Funkcje z własnością Baire'a. Funkcja $f\colon X \to Y$ ma *własność Baire'a*, jeżeli dla każdego zbioru otwartego $V \subset Y$ przeciwobraz $f^{-1}(V)$ ma własność Baire'a.

Twierdzenie lokalizacyjne Banacha.

Twierdzenie 4.1 (Banach [36]) *Jeżeli $\{A_i\}_{i\in I}$ jest rodziną (dowolnej mocy) zbiorów otwartych względem sumy $\bigcup_{i\in I} A_i$ oraz jeżeli każdy zbiór A_i jest zbiorem pierwszej kategorii, to $\bigcup_{i\in I} A_i$ jest także zbiorem pierwszej kategorii.*

Przestrzeń Ellentucka. *Przestrzenią Ellentucka* $[\omega]^\omega_{EL}$ na zbiorze $[\omega]^\omega$ nazywamy przestrzeń generowaną przez zbiory postaci

$$[a, A] = \{B \in [A]^\omega \colon a \subset B \subseteq a \cup A\},$$

gdzie $a \in [\omega]^{<\omega}$ oraz $A \subseteq [\omega]^\omega$. Zbiory te nazywamy *zbiorami Ellentucka* (ang. Ellentuck sets) *(skr. EL-zbiorami)*, uporządkowanymi przez relację $\subseteq$, tzn.

$$[a, A] \subseteq [b, B] \Leftrightarrow b \subseteq a \text{ oraz } A \subseteq B.$$

Zbiór $M \subseteq [\omega]^\omega$ nazywamy *całkowicie Ramseyowskim* (ang. completely Ramsey) (skr. *CR-zbiorem*), jeżeli dla każdego $[a, A]$ istnieje zbiór $B \subseteq [A]^\omega$ taki, że

$$[a, B] \subseteq M \text{ albo } [a, B] \cap M = \emptyset.$$

Zbiór $M \subseteq [\omega]^\omega$ nazywamy *nigdzie Ramseyowskim* (ang. nowhere Ramsey) (skr. *NR-zbiorem*), jeżeli dla każdego $[a, A]$ isnieje zbiór $B \subseteq [A]^\omega$ taki, że

$$[a, B] \cap M = \emptyset.$$

Rodzinę wszystkich CR-zbiorów oraz rodzinę wszystkich NR-zbiorów oznaczamy odpowiednio przez $\mathbb{CR}$ oraz $\mathbb{NR}$.

Ciąg $([a_n, A_n])_{n\in\omega}$ EL-zbiorów nazywamy *ciągiem fuzyjnym* (ang. fusion sequence), jeżeli jest nieskończony oraz

(1) $(a_n)_{n\in\omega}$ jest niemalejącym ciągiem liczb naturalnych rozbieżnym do ∞;

(2) $A_{n+1} \in [a_n, A_n]$ dla każdego $n \in \omega$.

Twierdzenie 4.2 (Lemat Fuzji [30]) *Jeżeli* $([a_n, A_n])_{n\in\omega}$ *jest ciągiem fuzyjnym, to jego fuzja*

$$[a, A] = \bigcap_{n\in\omega} [a, A_n] = [a, \bigcap_{n\in\omega} A_n],$$

jest EL*-zbiorem.*

Funkcje CR-mierzalne. Funckję $f\colon [\omega]^\omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *CR-mierzalną* (ang. (CR)-measurable), jeżeli dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}$, przeciwobraz $f^{-1}(U)$ jest CR-zbiorem.

Twierdzenie 4.3 ([1]) *Dla każdej przestrzeni metrycznej* X *funkcja* $f\colon [\omega]^\omega \to X$ *jest* CR*-mierzalna, gdzie* $[\omega]^\omega \subseteq \{0,1\}^\omega$*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* EL*-zbioru* $[a, A]$ *istnieje nieskończony podzbiór* $B \subseteq A$ *taki, że* $f|[a, B]$ *jest funkcją ciągłą, gdzie ciągłość rozpatrywana jest w topologii podprzestrzeni.*

Drzewa, ideały w strukturach drzew. Niech $K \subseteq \omega$ będzie dowolnym zbiorem (skończonym lub nieskończonym). Zbiór $T \subseteq K^{<\omega}$ nazywamy *drzewem* (ang. tree), jeżeli $t|n \in T$, dla każdego $t \in T$ oraz $n \leqslant |t|$. Zakładamy, że drzewa nie mają węzłów końcowych (ang. terminal nodes).

Niech $\mathbb{T}$ oznacza rodzinę wszystkich drzew w $K^{<\omega}$. Dla każdego $T \in \mathbb{T}$ oraz $t \in T$ oznaczamy liczbę następników węzłów (ang. successor nodes) w T jako:

$$split(t, T) = |\{n \in K\colon t^\frown n \in T\}|,$$

gdzie $t^\frown n$ oznacza konkatenację (ang. concatenation) ciągu t z elementem n. Drzewo T nazywamy

1. *drzewem Sacksa* (lub *drzewem doskonałym*), jeżeli $K = \{0, 1\}$ i dla każdego $t \in T$ istnieje $s \in T$ takie, że $t \subseteq s$ oraz $split(t, T) = 2$;

2. *drzewem Lavera*, jeżeli $K = \omega$ oraz istnieje $s \in T$ takie, że dla każdego $t \in T$:

   (a) $t \subseteq s$ albo $s \subseteq t$;

   (b) $split(t, T)$ jest liczbą nieskończoną, dla każdego $t \in T$.

Symbolem $\mathbb{S}$ oznaczamy zbiór wszystkich drzew Sacksa, a symbolem $\mathbb{L}$ zbiór wszystkich drzew Lavera.

Niech

$$[T] = \{s \in K^\omega\colon \forall_{n\in\omega}\, s|n \in T\}$$

będzie zbiorem wszystkich nieskończonych ścieżek w T. Zbiór $A \subseteq K^\omega$ nazywamy *t-zbiorem*, jeżeli

$$\forall_{T\in\mathbb{T}}\, \exists_{Q\in\mathbb{T}}\, Q \subseteq T \wedge ([Q] \subseteq A \vee [Q] \cap A = \emptyset).$$

Zbiór $A \subseteq K^\omega$ nazywamy *t^0-zbiorem*, jeżeli

$$\forall_{T\in\mathbb{T}}\, \exists_{Q\in\mathbb{T}}\, Q \subseteq T \wedge [Q] \cap A = \emptyset.$$

Podzbiór $A \subseteq 2^\omega$ będący t- (t^0-zbiorem) oznaczamy odpowiednio jako s- (s^0-zbiór), a podzbiór $M \subseteq \omega^\omega$ będący t- (t^0-zbiorem) oznaczamy odpowiednio jako l- (l^0-zbiór). Rodzina wszystkich s^0-zbiorów (l^0-zbiorów) tworzy σ-ideał odpowiednio w 2^ω (w ω^ω), który oznaczamy symbolem $\mathbb{S}^0$ ($\mathbb{L}^0$), odpowiednio. Ponadto, rodzina wszystkich s- (l-zbiorów) tworzy σ-ciało. W dalszej części, jeżeli będziemy prowadzić rozważania wspólne dla drzew Sacksa i Lavera, to będziemy używać terminologii t-zbiór zamiast odpowiednio s- (l-zbiór). Podobnie, będziemy używać terminologii t^0-zbiór zamiast odpowiednio s^0- (l^0-zbiór).

Porządek w rodzinie $\mathbb{S}$ definiujemy następująco: dla dowolnych $Q, T \in \mathbb{S}$

$$Q \leqslant T \Leftrightarrow Q \subseteq T$$

oraz

$$Q \leqslant_n T \Leftrightarrow Q \leqslant T$$

i każdy węzeł z n-tego poziomu w T należy do n-tego poziomu w Q.

Jeżeli $T \in \mathbb{L}$, to $\{s \in [T] \colon stem(T) \in s\}$ (tj. część drzewa T powyżej $stem(T)$) może być ponumerowana jako:

$$s_0^T = stem(T), s_1^T, ..., s_n^T, ... ,$$

gdzie $stem(T)$ oznacza węzeł $s \in T$ taki, że $split(s,T) = 1$ oraz $split(t,T) > 1$ dla dowolnego $t \supsetneq s$.

Definiujemy porządek w rodzinie $\mathbb{L}$ następująco: dla dowolnych $Q, T \in \mathbb{L}$

$$Q \leqslant T \Leftrightarrow Q \subseteq T$$

oraz

$$Q \leqslant_n T \Leftrightarrow stem(Q) = stem(T) \text{ oraz } s_k^Q = s_k^T \text{ dla dowolnych } k = 0, 1, ..., n.$$

Niech $\mathbb{T}$ będzie rodziną wszystkich drzew. Ciąg $(T_n)_{n\in\omega}$ drzew z rodziny $\mathbb{T}$ taki, że

$$T_0 \geqslant_0 T_1 \geqslant_1 ... \geqslant_{n-1} T_n \geqslant_n ...$$

nazywamy *ciągiem fuzyjnym* (ang. fusion sequence).

Twierdzenie 4.4 (Lemat Fuzji [30]) *Jeżeli $(T_n)_{n\in\omega}$ jest ciągiem fuzyjnym, to jego fuzja*

$$T = \bigcap_{n\in\omega} T_n,$$

należy do $\mathbb{T}$.

<u>**Funkcje t-mierzalne.**</u> Funkcję $f\colon K^\omega \to X$ nazywamy *t-mierzalną* (ang. t-measurable), jeżeli dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ przeciwobraz $f^{-1}(U)$ jest t-zbiorem.

<u>**Ideały precipitous.**</u> Niech κ będzie liczbą kardynalną, a I ideałem na κ oraz S zbiorem miary dodatniej, tj. $S \in P(\kappa) \setminus I$. W dalszej części będę używać oznaczenia I^+ zamiast $P(\kappa) \setminus I$.

Maksymalną rodzinę W podzbiorów zbioru S miary dodatniej taką, że dla dowolnych parami różnych zbiorów $A, B \in W$ zachodzi $A \cap B \in I$ nazywamy *I-rozkładem* (ang. I-partition) zbioru S. I-rozkład W_1 zbioru S jest *rozdrobnieniem* (ang. refinement) I-rozkładu W_2 w S ($W_1 \leqslant W_2$), jeżeli każdy zbiór $A \in W_1$ jest podzbiorem pewnego zbioru $B \in W_2$.

Funkcjonałem (ang. functional) Φ na S nazywamy rodzinę wszystkich funkcji $f\colon S \to \kappa$ taką, że rodzina $\{dom(f)\colon f \in \Phi\}$ jest I-rozkładem zbioru S oraz $dom(f) \neq dom(g)$, jeżeli $f \neq g$ oraz $g \in \Phi$, gdzie $dom(f)$ oznacza dziedzinę funkcji f. Taki I-rozkład oznaczamy przez W_Φ. Elementy funkcjonału nazywamy *I-funkcjami* (ang. I-functions).

Niech I będzie ideałem κ-zupełnym na κ zawierającym zbiory jednopunktowe (tzw. singletony). Wtedy I nazywamy ideałem *precipitous* (ang. precipitous ideal), gdy $S \in I^+$ oraz ciąg I-rozkładów $(W_n)_{n<\omega}$ zbioru S spełniający warunek

$$W_0 \geqslant W_1 \geqslant ... \geqslant W_n \geqslant ...,$$

pociąga istnienie ciągu zbiorów

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq ... \supseteq X_n \supseteq ...,$$

takiego że $X_n \in W_n$ dla każdego $n \in \omega$ oraz $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \neq \emptyset$.

Twierdzenie 4.5 ([31]) *Następujące warunki są równoważne:*

(i) I jest ideałem precipitous;

(ii) nie istnieje zbiór S miary dodatniej taki, że ciąg funkcjonałów $\Phi_0, \Phi_2, ..., \Phi_n, ...$ na S spełnia warunek $\Phi_0 > \Phi_1 > ... > \Phi_n > ...$.

Twierdzenie 4.6 ([31]) *Niech κ będzie nieprzeliczalną liczbą regularną. Wtedy $[\kappa]^{<\kappa}$ nie jest ideałem precipitous.*

Ideał taki, że

$$[\kappa]^{<\kappa} = \{A \subset \kappa \colon |A| < \kappa\}$$

nazywamy *ideałem Frécheta* (ang. Fréchet ideal) na κ.

Liczby kardynalne mierzalne. Nieprzeliczalną liczbę kardynalną regularną κ nazywamy *mierzalną*, jeżeli istnieje nietrywialny maksymalny κ-zupełny ideał na κ. Równoważnie: nieprzeliczalna liczba kardynalna regularna κ jest *mierzalna*, jeżeli istnieje niegłówny κ-zupełny ultrafiltr na κ.

Rzeczywiście mierzalne liczby kardynalne. Niech S będzie zbiorem nieskończonym i $\mu \colon \mathcal{P}(S) \to [0,1]$ nietrywialną miarą. Niech $\{A_\xi \colon \xi < \gamma\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru S taką, że dla każdego $\xi < \gamma < \kappa$ mamy $\mu(A_\xi) = 0$. Miarę μ nazywamy *κ-addytywną*, gdy zbiór $\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi$ jest miary zero.

Istnieje największa liczba κ taka, że μ jest κ-addytywna. Niech

$$add(\mu) = \min\{\kappa \colon \mu(\bigcup_{\xi<\kappa} A_\xi) > 0, \mu(A_\xi) = 0\}.$$

Liczbę kardynalną κ nazywamy *rzeczywiście mierzalną* (ang. real-valued measurable cardinal), jeżeli istnieje nietrywialna miara κ-addytywna na κ.

Twierdzenie 4.7 ([47]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną rzeczywiście mierzalną. Jeżeli $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$, to istnieje rozszerzenie μ miary Lebesgue'a zdefiniowane na wszystkich podzbiorach prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ takie, że $add(\mu) = \kappa$.*

Ideał I na S jest *κ-saturowalny* (ang. κ-saturated), jeżeli zawiera wszystkie zbiory jednopunktowe (tzw. singletony) oraz każda rodzina $W \subseteq \mathcal{P}(S)$ zbiorów parami rozłącznych nie należących do I ma moc mniejszą niż κ.

Twierdzenie 4.8 (Ulam [47, 31]) *Niech κ będzie rzeczywiście mierzalną liczbą kardynalną, a μ nietrywialną miarą na κ. Wtedy ideał $I = \{A \subseteq \kappa \colon \mu(A) = 0\}$ jest $\aleph_1$-saturowalny.*

Miara doskonała. Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą (ang. measure space). Miarę μ nazywamy *miarą doskonałą* (ang. perfect measure), jeżeli dla każdego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ oraz każdej funkcji $f\colon X \to \mathbb{R}$ takiej, że $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$ istnieje zbiór Borela $B \subset E$ spełniający równość

$$\mu(f^{-1}(E)) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Trójkę $(X, \mathcal{S}, \mu)$ nazywamy *przestrzenią z miarą doskonałą.*

4.3.5 Rozkład Kuratowskiego - rys historyczny

W tym podrozdziale przedstawię krótką historię badań nad problemem Kuratowskiego. Pojęcie rozkładu Kuratowskiego jest ściśle związane z problemem postawionym przez Kuratowskiego w 1935 roku. W pracy [35] Kuratowski udowodnił, następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.9 (Kuratowski [35]) *Niech $f\colon X \to Y$ będzie funkcją mającą własność Baire'a określoną na przestrzeni metryzowalnej X o wartościach w przestrzeni metryzowalnej zupełnej Y. Wtedy dla pewnego zbioru $M \subset X$ pierwszej kategorii, restrykcja $f|(X \setminus M)$ jest ciągła.*

W tej samej pracy Kuratowski postawił pytanie, czy założenie zupełności przestrzeni Y w Twierdzeniu 4.9 jest istotne? Oczywiście, takie rozważania mają sens tylko wtedy, gdy prowadzimy je dla przestrzeni Baire'a.

W niedługim czasie po opublikowaniu pracy Kuratowskiego, Kunugi [34] sformułował następujący warunek nazwany *warunkiem* (α).

Dla danej liczby porządkowej γ niech $\{A_\xi\colon \xi < \gamma\}$ będzie rodziną złożoną z parami rozłącznych podzbiorów zbioru X będących zbiorami pierwszej kategorii. Jeżeli suma $\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi$ jest zbiorem drugiej kategorii, to można ją podzielić na dwa rozłączne zbiory $\bigcup_{\xi'} A_{\xi'}$ oraz $\bigcup_{\xi''} A_{\xi''}$ w taki sposób, że każdy podzbiór tych sum jest zbiorem drugiej kategorii ze względu na wspólny podzbiór zbioru X.

Korzystając z tego warunku Kunugi udowodnił poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.10 (Kunugi [34, 26]) *Niech X będzie przestrzenią spełniającą warunek (α), Y przestrzenią metryczną, a $f\colon X \to Y$ funkcją mającą własność Baire'a. Wtedy istnieje zbiór pierwszej kategorii $M \subset X$ taki, że restrykcja $f|(X \setminus M)$ jest ciągła.*

Inspiracją dla sformułowania warunku (α) mogło być poniższe Twierdzenie Łuzina.

Twierdzenie 4.11 (Łuzin [41, 26]) *Dla dowolnego podzbioru $A \subset I$ drugiej kategorii odcinka I istnieje odcinek $I' \subset I$ oraz dwa rozłączne podzbiory A_0, A_1 zbioru A będące zbiorami drugiej kategorii takie, że $A_i \cap V$ są zbiorami drugiej kategorii dla dowolnego otoczenia V punktu $x \in I'$ oraz $i \in \{0, 1\}$.*

Dodajmy, że w pracy [41] Twierdzenie Łuzina zostało również sformułowane w terminologii miary Lebesgue'a.

Twierdzenie 4.12 (Łuzin [41, 26]) *Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną złożoną z rozłącznych podzbiorów przestrzeni ośrodkowej zupełnej Y, będących zbiorami miary zero i niech $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Jeżeli $\lambda^*(A) > 0$ (tj. zewnętrzna miara Lebesgue'a zbioru A jest dodatnia), to istnieje $I' \subset I$ taki, że $\bigcup_{i \in I'} A_i$ oraz $\bigcup_{i \in I \setminus I'} A_i$ nie mogą być rozdzielone zbiorami mierzalnymi.*

Niezależnie od tych wyników, na początku lat 70-tych ubiegłego stulecia Solovay (w nieopublikowanym manuskrypcie) przedstawił dowód twierdzenia z którego wynika, że każdy rozkład odcinka $[0, 1]$ na zbiory miary Lebesgue'a zero, zawiera zbiór niemierzalny. W dowodzie Solovay wykorzystał metody forcingowe. W 1979 roku Bukovský w pracy [9] zaprezentował krótszy i mniej skomplikowany dowód niż Solovay, a wyniki przedstawił zarówno w terminologii miary Lebesgue'a, jak i w terminologii kategorii. Poniżej cytowane są obydwa twierdzenia.

Twierdzenie 4.13 ([9]) *Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rozkładem odcinka $[0, 1]$ na zbiory miary Lebesgue'a zero. Wtedy istnieje zbiór $I' \subseteq I$ taki, że suma $\bigcup_{i \in I'} A_i$ jest zbiorem niemierzalnym w sensie miary Lebesgue'a.*

Twierdzenie 4.14 ([9]) *Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rozkładem odcinka $[0, 1]$ na zbiory pierwszej kategorii. Wtedy istnieje zbiór $I' \subseteq I$ taki, że suma $\bigcup_{i \in I'} A_i$ nie ma własności Baire'a.*

W tym samym numerze czasopisma Bulletin of Polish Academy of Sciences, w którym ukazała się praca Bukovský'ego, Emeryk, Frankiewicz i Kulpa opublikowali prace [16, 17], w których wykazali że problem Kuratowskiego jest równoważny problemowi istnienia rozkładu przestrzeni metryzowalnej zupełnej na zbiory pierwszej kategorii taki, że suma pewnej podrodziny tego rozkładu nie ma własności Baire'a. Tym samym autorzy uogólnili twierdzenie Bukovský'ego na klasę przestrzeni wagi nie większej niż 2^ω. Dokładniej, w pracy [17] wykazano, że następujące dwa twierdzenia są równoważne.

Twierdzenie 4.15 ([16, 17]) *Niech X będzie przestrzenią zupełną Čecha taką, że $\pi w(X) \leqslant 2^\omega$. Niech $\mathcal{F}$ będzie rozkładem przestrzeni X na zbiory pierwszej kategorii. Wtedy istnieje rodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ taka, że $\bigcup \mathcal{F}'$ nie ma własności Baire'a.*

Twierdzenie 4.16 ([16, 17]) *Jeżeli X jest przestrzenią zupełną Čecha taką, że $\pi w(X) \leqslant 2^\omega$, to dla każdego odwzorowania $f\colon X \to Y$ mającego własność Baire'a o wartościach w przestrzeni Y z bazą σ-rozłączną istnieje zbiór pierwszej kategorii $M \subset X$ taki, że restrykcja $f|(X \setminus M)$ jest ciągła.*

Jako wniosek autorzy uzyskali następujący wynik.

Twierdzenie 4.17 ([16]) *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest rozkładem prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ na zbiory pierwszej kategorii (zbiory miary zero), to istnieje rodzina $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ taka, że zbiór $\bigcup \mathcal{A}$ nie ma własności Baire'a (jest niemierzalny).*

Korzystając z powyższych twierdzeń można sformułować następujące definicje rozkładu Kuratowskiego.

Definicja 4.1 *Niech X będzie przestrzenią, a $\mathcal{F}$ rozkładem przestrzeni X na zbiory pierwszej kategorii. Rozkład $\mathcal{F}$ nazywamy rozkładem Kuratowskiego, jeżeli dla każdej podrodziny $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup \mathcal{F}'$ ma własność Baire'a.*

Definicja 4.2 *Niech $(X, \mathcal{S}, m)$ będzie przestrzenią z miarą, a $\mathcal{F}$ rozkładem przestrzeni X na zbiory miary zero. Rozkład $\mathcal{F}$ nazywamy rozkładem Kuratowskiego, jeżeli dla każdej podrodziny $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup \mathcal{F}'$ jest zbiorem m-mierzalnym.*

Niezależnie od powyższych wyników, Brzuchowski, Cichoń, Grzegorek i Ryll-Nardzewski w tym samym numerze Bulletin of Polish Academy of Sciences opublikowali następujący wynik dla pokryć punktowo-skończonych.

Twierdzenie 4.18 ([8]) *Niech X będzie przestrzenią polską (tj. przestrzenią metryczną zupełną ośrodkową), $\mathcal{A}$ σ-ideałem z bazą Borela oraz $(A_i)_{i\in I}$ pokryciem punktowo-skończonym przestrzeni X zbiorami należącymi do $\mathcal{A}$. Wtedy istnieje $I' \subset I$ taki, że $\bigcup\{A_i \colon i \in I'\}$ nie jest różnicą symetryczną zbioru Borela i pewnego zbioru z $\mathcal{A}$.*

Kolejne istotne wyniki dotyczące rozkładów Kuratowskiego zostały opublikowane przez Frankiewicza i Gutka w 1982 roku.

Twierdzenie 4.19 ([20]) *Jeżeli $\mathcal{F}$ jest pokryciem punktowo-skończonym złożonym z podzbiorów pierwszej kategorii π-bazowej zwartej przestrzeni X takiej, że $\pi w(X) \leqslant 2^\omega$, to istnieje rodzina $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ taka, że zbiór $\bigcup \mathcal{F}'$ nie ma własności Baire'a.*

Także w tym samym roku ukazała się praca Frankiewicza, Gutka, Plewika i Roczniaka, w której udowodniono następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.20 ([21]) *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą doskonałą, a $\mathcal{B}$ pokryciem punktowo-skończonym złożonym ze zbiorów miary zero i takim, że moc pokrycia $\mathcal{B}$ jest mniejsza od najmniejszej liczby mierzalnej. Wtedy istnieje podrodzina $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ taka, że zbiór $\bigcup \mathcal{B}'$ nie jest $\mathcal{S}$-mierzalny (tj. $\bigcup \mathcal{B}' \notin \mathcal{S}$) i ma miarę wewnętrzną równą zero.*

Kolejnym istotnym wynikiem dotyczącym rozkładów Kuratowskiego jest rezultat uzyskany przez Frankiewicza i Kunena w 1987 roku.

Twierdzenie 4.21 ([22]) *Następujące warunki są równoważne:*

(1) ZFC + "istnieje liczba kardynalna mierzalna";

(2) ZFC + "istnieje przestrzeń metryczna zupełna X, przestrzeń metryczna Y oraz funkcja $f\colon X \to Y$ mająca własność Baire'a taka, że nie istnieje zbiór pierwszej kategorii $M \subset X$, dla którego restrykcja $f|(X \setminus M)$ jest ciągła";

(3) ZFC + "istnieje przestrzeń metryczna Baire'a X, przestrzeń metryczna Y i funkcja $f\colon X \to Y$ mająca własność Baire'a taka, że nie istnieje zbiór pierwszej kategorii $M \subset X$, dla którego restryckja $f|(X \setminus M)$ jest ciągła".

W następnych latach opublikowano jeszcze inne wyniki dotyczące istnienia zbiorów i sum niemierzalnych. Nie będą one jednak w tym miejscu cytowane, gdyż nie dotyczą bezpośrednio omawianego tutaj problemu Kuratowskiego.

W dalszej części przedstawiam moje wyniki zamieszczone w monografii [M1].

4.3.6 Rozkłady Kuratowskiego w strukturach drzewa i w topologii Ellentucka

W świetle znanych wyników dotyczących rozkładu Kuratowskiego naturalnym wydaje się pytanie: dla jakich struktur istnieje lub nie istnieje taki rozkład? W tym podrozdziale przedstawię dwie istotnie różne struktury, w których nie istnieją rozkłady Kuratowskiego.

W pierwszej kolejności rozpatrywać będę struktury, które można przedstawić w postaci drzewa. Mianowicie, będą to: struktura zbiorów Marczewskiego (podobna do forcingu Sacksa) oraz struktura Lavera (podobna do forcingu Lavera), przy czym dodam że tak naprawdę rozważam strukturę typu Lavera, której dokładną różnicę pomiędzy nią a strukturą Lavera przedstawię w dalszej części.

W tym miejscu należy podkreślić, że struktury: Marczewskiego i Lavera zestawione są tu nieprzypadkowo, bo choć są istotnie różne to jednak z drugiej strony podobne z technicznego punktu widzenia (który łatwo zauważyć w dowodach twierdzeń). Mianowicie, w obydwu przypadkach nie sposób skonstruować "dużego" zbioru mającego rozkład mocy kontinuum na "małe" zbiory bez zastosowania fuzji (Twierdzenie 4.4), która daje nam pewność, że można uzyskać taki rozkład zbioru na "małe" zbiory. Należy podkreślić, że fuzja w przypadku każdej z wymienionych struktur przebiega w inny sposób. Stąd wynika twierdzenie, że we wspomnianych strukturach nie istnieje rozkład Kuratowskiego (dowody przebiegają bez założenia Hipotezy Continuum (CH)).

Coprawdaż, pomimo tego że prowadzone tutaj rozważania dotyczą tylko struktury Marczewskiego i Lavera, można je po odpowiedniej modyfikacji przenieść na inne struktury, np. forcing Silvera-Prikry'ego czy forcing Millera, czyli na struktury, w których zachodzi Lemat Fuzji.

W dalszej częsci tego podrozdziału zastosuję następującą terminologię: "duży" i "mały" zbiór w strukturze Marczewskiego oznaczamy odpowiednio przez s- i s^0-zbiór, a "duży" i "mały" zbiór w strukturze Lavera przez l- i l^0-zbiór. Gdy rozważania będą wspólne dla obydwu struktur to "duży" i "mały" zbiór oznaczać będziemy przez t- i t^0-zbiór, odpowiednio. W związku z tym, korzystając z wprowadzonych oznaczeń, definicja rozkładu Kuratowskiego przyjmuje postać.

Definicja 4.3 *Niech $A \subseteq K^\omega$. Rozkład $\mathcal{F}$ zbioru A na t^0-zbiory nazywamy rozkładem Kuratowskiego, jeżeli dla każdej podrodziny $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup \mathcal{F}'$ jest t-zbiorem.*

Poniższe dwa lematy są kluczowe do wykazania, że w strukturach drzewa (dla których zachodzi Twierdzenie 4.4) nie ma rozkładu Kuratowskiego.

Lemat 4.1 ([C1]) *Niech $A \in P(2^\omega) \setminus \mathbb{S}^0$. Dla dowolnego rozkładu $\mathcal{F}$ zbioru A na s^0-zbiory oraz dowolnego drzewa Sacksa $T \in \mathbb{S}$ istnieje poddrzewo Sacksa $Q \leqslant T$ takie, że rodzina*

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum.

Lemat 4.2 ([C1]) *Niech $A \in P(\omega^\omega) \setminus \mathbb{L}^0$. Dla dowolnego rozkładu $\mathcal{F}$ zbioru A na l^0-zbiory i dowolnego drzewa Lavera $T \in \mathbb{L}$ istnieje poddrzewo Lavera $Q \leqslant T$ takie, że rodzina*

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum.

Dowody obydwu lematów przebiegają podobnie, z tą różnicą, że forcing Sacksa i forcing Lavera różnią się od siebie. Zamiast forcingu Lavera, stosuję nieco zmodyfikowany forcing, który mogę tu nazwać forcingiem typu Lavera. Forcing ten różni się od klasycznego forcingu Lavera tym, że w n-tym kroku indukcyjnym dokonujemy podziału zbioru węzłów w poddrzewach na $n+1$ podzbiorów, a nie na ω jak to ma miejsce w forcingu Lavera.

Poniżej zamieszczam szkic dowodu Lematu 4.1.

Dowód (szkic). Niech $\mathcal{F}$ będzie rozkładem zbioru $A \in P(2^\omega)\setminus\mathbb{S}^0$ na s^0-zbiory oraz $T \in \mathbb{S}$. Indukcyjnie, względem $n \in \omega$, będziemy konstruować kolekcje podrodzin $\{\mathcal{F}_h \colon h \in 2^n\}$ rodziny $\mathcal{F}$ i s-poddrzew $\{T_h \colon h \in 2^n\}$ drzewa T mające następujące własności: dla dowolnych $h, h' \in 2^n$, takich, że $h \neq h'$

(1) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}$ oraz $T_h \leqslant T$;

(2) $\bigcup\{\mathcal{F}_h \colon h \in 2^n\} = \bigcup \mathcal{F}$;

(3) $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{S}^0$;

(4) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}_{h|(n-1)}$ oraz $T_h \leqslant_n T_{h|(n-1)}$, tj. $[T_h] \subseteq [T_{h|(n-1)}]$;

(5) $\mathcal{F}_h \cap \mathcal{F}_{h'} = \emptyset$ oraz $[T_h] \cap [T_{h'}] = \emptyset$;

(6) $A \cap [T_h] \subseteq \mathcal{F}_h$ oraz $A \cap [T_h] \notin \mathbb{S}^0$.

Następnie, dokonujemy konstrukcji podrodzin i poddrzew zgodnie z definicją forcingu Sacksa. Po zakończeniu tej konstrukcji stosujemy Twierdzenie 4.4, dzięki któremu uzyskujemy tezę lematu. ■

Lematy 4.1 oraz 4.2 stosujemy w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.22 ([C1]) *Niech $A \in P(K^\omega)\setminus\mathbb{T}^0$ oraz $\mathcal{F}$ będzie rozkładem zbioru A na t^0-zbiory. Jeżeli dla dowolnego drzewa $T \in \mathbb{T}$ takiego, że $A \cap [T] \neq \emptyset$, istnieje poddrzewo $Q \leqslant T$ takie, że $A \cap [Q] \neq \emptyset$ oraz rodzina*

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum, to istnieje podrodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, dla której $\bigcup \mathcal{F}'_{[Q]}$ nie jest t-zbiorem.

Dowód. Niech dany będzie zbiór drzew

$$\mathbb{T}' = \{T_\alpha \in \mathbb{T} \colon A \cap [T_\alpha] \neq \emptyset, \alpha \in 2^\omega\}.$$

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ jest rozkładem zbioru A na t^0-zbiory. Z założenia twierdzenia wynika, że dla każdego drzewa $T_\alpha \in \mathbb{T}'$ istnieje poddrzewo $Q_\alpha \leqslant T_\alpha$ takie, że rozkład

$$\mathcal{F}_{[Q_\alpha]} = \{F \cap [Q_\alpha] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum. Istnienie takiego rozkładu wynika z Lematów 4.1 oraz 4.2. Stąd, dla każdego Q_α można wybrać rozłączne zbiory

$$B_\alpha^\varepsilon \in \{F \in \mathcal{F}\colon F \cap [Q_\alpha] \neq \emptyset\} \setminus (\{B_\beta^0\colon \beta < \alpha,\} \cup \{B_\beta^1\colon \beta < \alpha\}),$$

gdzie $\varepsilon \in \{0, 1\}$ oraz $\alpha \in 2^\omega$. Następnie rozważamy rodziny

$$\mathcal{B}^\varepsilon = \{B_\alpha^\varepsilon\colon \alpha \in 2^\omega\}.$$

Oczywiście, na podstawie konstrukcji obydwu zbiorów $\mathcal{B}^0 \cap \mathcal{B}^1 = \emptyset$.

Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$ nie są t-zbiorami. Załóżmy nie wprost, że $\bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$ jest t-zbiorem dla pewnego $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Wtedy istnieje $Q_\alpha \leqslant T_\alpha$ takie, że

$$[Q_\alpha] \cap \bigcup \mathcal{B}^\varepsilon = \emptyset.$$

Ale na podstawie kontrukcji zbiorów $\mathcal{B}^\varepsilon$ mamy, że

$$\{F \in \mathcal{F}\colon F \cap [Q_\alpha] \cap \bigcup \mathcal{B}^\varepsilon \neq \emptyset\}$$

jest zbiorem niepustym, co prowadzi do sprzeczności.

Jeżeli $\bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$ nie jest t-zbiorem dla pewnego $\varepsilon \in \{0, 1\}$, to istnieje poddrzewo $Q_\alpha \leqslant T_\alpha$ takie, że $[Q_\alpha] \subseteq \bigcup \mathcal{B}^\varepsilon$. Z konstrukcji zbiorów $\mathcal{B}^\varepsilon$ wynika, że $[Q_\alpha] \cap \bigcup \mathcal{B}^{1-\varepsilon} \neq \emptyset$, co przeczy rozłączności rodzin $\mathcal{B}^0$ oraz $\mathcal{B}^1$. ■

Bezpośrednio z Twierdzenia 4.22 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.1 ([C1]) *Nie istnieje zbiór $A \in P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$, który ma rozkład Kuratowskiego.*

Drugą istotnie różną strukturą, która nie ma rozkładu Kuratowskiego jest przestrzeń z topologią Ellentucka. Jest to również struktura, dla której zachodzi Lemat Fuzji (Twierdzenie 4.2), który umożliwia uzyskanie rozkładu "dużego" zbioru na kontinuum "małych" zbiorów. Definicja rozkładu Kuratowskiego ma w tym przypadku postać.

Definicja 4.4 *Rozkład $\mathcal{F}$ zbioru $M \subseteq [\omega]^\omega$ na NR-zbiory nazywamy rozkładem Kuratowskiego, jeżeli dla każdej podrodziny $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup \mathcal{F}'$ jest CR-zbiorem.*

Podobnie jak dla struktury drzewa, tutaj istotnym wynikiem jest poniższy lemat, dowodzony indukcyjnie z wykorzystaniem Twierdzenia 4.2. Konstrukcja zawarta w dowodzie Lematu 4.3 jest inna niż w dowodach Lematów 4.1 oraz 4.2. Wynika to ze specyfiki topologii Ellentucka, która jest podobna do forcingu Mathiasa.

Lemat 4.3 **([C1])** *Niech $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ będzie zbiorem otwartym i gęstym (w sensie topologii Ellentucka). Dla każdego rozkładu $\mathcal{F}$ zbioru M na NR-zbiory oraz dla każdego $[a, A] \subseteq [\omega]^\omega_{EL}$ istnieje EL-zbiór $[b, B] \subseteq [a, A]$ taki, że rodzina*

$$\mathcal{F}_{[b,B]} = \{F \cap [b, B] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum.

Dowód poniższego twierdzenia oparty jest o Lemat 4.3. Wymaga on szczególnej uwagi ze względu na własności zbiorów w topologii Ellentucka.

Twierdzenie 4.23 **([C1])** *Niech $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ i $\mathcal{F}$ będzie rozkładem zbioru M na NR-zbiory. Jeżeli dla każdego EL-zbioru $[a, A]$, takiego, że $M \cap [a, A] \neq \emptyset$, istnieje EL-zbiór $[b, B] \subseteq [a, A]$ spełniający warunek $M \cap [b, B] \neq \emptyset$, taki, że rodzina*

$$\mathcal{F}_{[b,B]} = \{F \cap [b, B] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum, to istnieje podrodzina $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, dla której $\bigcup \mathcal{F}'_{[b,B]}$ nie jest CR-zbiorem.

Bezpośrednio z Twierdzenia 4.23 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.2 **([C1])** *Nie istnieje zbiór $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ otwarty i gęsty (w sensie topologii Ellentucka), który ma rozkład Kuratowskiego.*

4.3.7 Ideały związane z rozkładami Kuratowskiego

Z rozkładem Kuratowskiego można w naturalny sposób powiązać pewien ideał, który w dalszej części opisu będzie nazywany K-ideałem. Pojęcie to zostało wprowadzone przeze mnie w pracy [C3].

Definicja 4.5 *Niech X będzie przestrzenią mającą rozkład Kuratowskiego oraz*

$$\kappa = \min\{|\mathcal{F}| \colon \mathcal{F} \text{ jest rozkładem Kuratowskiego przestrzeni } X\}.$$

Dla rozkładu Kuratowskiego $\mathcal{F} = \{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ przestrzeni X definiujemy ideał

$$I_{\mathcal{F}} = \{A \subset \kappa \colon \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha \text{ jest zbiorem pierwszej kategorii}\},$$

który nazywamy K-ideałem.

Zauważmy, że ideał $I_{\mathcal{F}}$ nie jest ideałem głównym. Ponadto, $[\kappa]^{<\kappa} \subseteq I_{\mathcal{F}}$.

Celem moich badań dotyczących K-ideału było udowodnienie pewnych jego własności, które uzyskałam poprzez zastosowanie pewnych operacji na przestrzeni (z rozkładem Kuratowskiego), m.in. sumy prostej przestrzeni. Wydawać by się mogło, że K-ideał mógłby być przydatny w uzyskaniu informacji, czy dana przestrzeń nad którą ten ideał jest rozważany ma rozkład Kuratowskiego, czy też nie. Okazuje się, że to nie jest jednoznaczne, ponieważ taki ideał może być ideałem Frécheta czyli nie być ideałem precipitous (na podstawie Twierdzenia 4.6) albo zawierać ideał Frécheta i być podideałem pewnego ideału zupełnego. Zatem, aby móc "odkodować" z K-ideału rozkład Kuratowskiego potrzebujemy jeszcze pełnej informacji o strukturze przestrzeni, w jakiej są prowadzone rozważania.

Badanie K-ideałów są po części motywowane rezultatami z pracy [22], w której główny wynik (Twierdzenie 4.21) "wiąże" istnienie rozkładu Kuratowskiego z istnieniem liczby kardynalnej mierzalnej.

Jak zdefiniowałam powyżej, rozkład Kuratowskiego $\mathcal{F}$ danej przestrzeni jest indeksowany liczbami porządkowymi, ale K-ideał związany z rozkładem $\mathcal{F}$ jest ideałem κ-zupełnym na liczbie kardynalnej.

Dwa kolejne twierdzenia dotyczą pewnych własności K-ideałów. W Twierdzeniu 4.24 dowodzę, że taki ideał może być ideałem Frécheta, a w Twierdzeniu 4.25 dowodzę, że każdy κ-zupełny ideał może być "reprezentowany" przez pewien K-ideał. W obydwu dowodach stosuję techniki polegające na powiększaniu przestrzeni mającej rozkład Kuratowskiego poprzez sumę prostą pewnych kopii tej przestrzeni.

Twierdzenie 4.24 **([C3])** *Niech Y będzie przestrzenią Baire'a, a $X \subset Y$ przestrzenią Baire'a z rozkładem Kuratowskiego $\mathcal{F}$ taką, że:*

(i) $|\mathcal{F}| = \kappa$, *gdzie*

$$\kappa = \min\{|\mathcal{F}| \colon \mathcal{F} \text{ jest rozkładem Kuratowskiego przestrzeni } X\}$$

jest nieprzeliczalną liczbą kardynalną regularną,

(ii) $\bigcup \mathcal{F}'$ *jest zbiorem pierwszej kategorii, dla każdego $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ mocy mniejszej niż κ.*

Dalej, niech Π będzie zbiorem wszystkich permutacji elementów z κ oraz

$$\{X_\pi \colon \pi \in \Pi\}$$

rodziną przestrzeni homeomorficznych z X indeksowanych elementami z Π. Wtedy suma prosta $\oplus_{\pi\in\Pi} X_\pi$ ma rozkład Kuratowskiego $\mathcal{F}^*$ oraz K-ideał $I_{\mathcal{F}^*}$ związany z $\mathcal{F}^*$ jest równy $[\kappa]^{<\kappa}$.

Dowód. Niech $\mathcal{F} = \{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ będzie ustalonym rozkładem Kuratowskiego przestrzeni X. Weźmy zbiór $\Pi = \kappa!$ wszystkich permutacji elementów z κ. Niech $\{X_\pi \colon \pi \in \Pi\}$ będzie zbiorem przestrzeni homeomorficznych z X indeksowanych przez Π. Weźmy sumę prostą $\bigoplus_{\pi\in\Pi} X_\pi$. Oczywiście, każdy X_π jest zbiorem otwartym w $\bigoplus_{\pi\in\Pi} X_\pi$. Dla każdej permutacji $\pi \in \Pi$, niech $\mathcal{F}_\pi$ będzie rozkładem X_π takim, że

$$\mathcal{F}_\pi = \{F_{\pi(\alpha)} \colon \alpha < \kappa\}.$$

(W rzeczywistości używamy kopii $F_{\pi(\alpha)}$ wewnątrz X_π).
Taka rodzina jest rozkładem Kuratowskiego zbioru X_π. Dla każdego $\alpha < \kappa$ rozważmy

$$F^*(\alpha) = \bigcup \{F_{\pi(\alpha)} \colon \pi \in \Pi\}.$$

Na podstawie Twierdzenia 4.1, zbiór $F^*(\alpha)$ jest zbiorem pierwszej kategorii w $\bigoplus_{\pi\in\Pi} X_\pi$ oraz

$$\mathcal{F}^* = \{F^*(\alpha) \colon \alpha < \kappa\}$$

jest rozkładem Kuratowskiego zbioru $\bigoplus_{\pi\in\Pi} X_\pi$.

Niech $I_{\mathcal{F}^*}$ będzie K-ideałem związanym z $\mathcal{F}^*$. Na podstawie założenia (ii) mamy, że $[\kappa]^{<\kappa} \subset I_{\mathcal{F}^*}$. Zauważmy, że istnieje zbiór $A \subset \kappa$, $|A| = \kappa$ taki, że $A \notin I_{\mathcal{F}^*}$. Jeżeli nie, to $\bigcup_{\alpha\in A} F^*(\alpha)$ jest zbiorem pierwszej kategorii, dla każdego zbioru $A \subset \kappa$ mocy κ. Na podstawie Twierdzenia 4.1, zbiór $\bigcup_{A\subset\kappa} \bigcup_{\alpha\in A} F^*(\alpha)$ mógłby być zbiorem pierwszej kategorii, ale to jest niemożliwe, ponieważ X jest przestrzenią Baire'a. Pokażemy, że żaden zbiór $A \subset \kappa$ mocy κ nie należy do $I_{\mathcal{F}^*}$. Przypuśćmy, że istnieje $A_0 \in I_{\mathcal{F}^*}$ taki, że $|A_0| = \kappa$. Wtedy istnieje $B_0 \subset \kappa$ mocy κ taki, że $|A_0 \cap B_0| = \kappa$ oraz $B_0 \notin I_{\mathcal{F}^*}$. Weźmy permutację $\pi_0 \in \Pi$ taką, że $\pi_0(A_0) = B_0$. Zatem, $\bigcup_{\beta\in B_0} F^*_\beta$ jest zbiorem drugiej kategorii. Jednak, na podstawie powyższej konstrukcji

$$\bigcup_{\beta\in B_0} F^*_\beta = \bigcup_{\beta\in\pi_0(A_0)} F^*_\beta = \bigcup_{\alpha\in A_0} F^*_{\pi_0(\alpha)} = \bigcup_{\alpha\in A_0} F^*_\alpha,$$

co prowadzi do sprzeczności z definicją K-ideału $I_{\mathcal{F}^*}$. ∎

W dowodzie Twierdzenia 4.25 również stosuję sumę prostą przestrzeni. Różnica polega na tym, że w dowodzie Twierdzeniu 4.24 powiększam przestrzeń, aby uzyskać sumę (mnogościową) zbiorów, która będzie zbiorem drugiej kategorii, natomiast w dowodzie Twierdzenia 4.25 zastępuję sumy będące zbiorami drugiej kategorii sumami będącymi zbiorami pierwszej kategorii.

Należy podkreślić, że w Twierdzeniu 4.25 założenie, że κ jest liczbą kardynalną mierzalną jest istotne (por. Twierdzenie 4.21). Ponadto, zakładam że κ jest najmniejszą liczbą kardynalną mierzalną, ponieważ w myśl Twierdzenia 4.8 może być wiele liczb kardynalnych mierzalnych.

Twierdzenie 4.25 **([C3])** *Załóżmy, że ZFC + "istnieje liczba kardynalna mierzalna" jest niesprzeczne. Niech κ będzie najmniejszą liczbą kardynalną mierzalną. Wtedy dla każdego κ-zupełnego ideału I na κ takiego, że $[\kappa]^{<\kappa} \subseteq I$ istnieje przestrzeń z rozkładem Kuratowskiego $\mathcal{F}^{\#}$ mocy κ taka, że I jest postaci $I_{\mathcal{F}^{\#}}$.*

Zauważmy, że jeżeli κ jest liczbą niemierzalną oraz istnieje rozkład Kuratowskiego mocy κ przestrzeni X, to możemy otrzymać ideał Frécheta, jak pokazałam w Twierdzeniu 4.24, lub też κ-zupełny ideał zawierający ideał Frécheta i zawarty w K-ideale związanym z rozkładem Kuratowskiego pewnej przestrzeni, jak pokazałam w Twierdzeniu 4.25.

4.3.8 Rozkłady Kuratowskiego w przestrzeniach Baire'a

Rozpatrując rozkłady Kuratowskiego w przestrzeniach Baire'a warto się zastanowić jakie własności będzie miał K-ideał związany z takim rozkładem. Okazuje się, że taki ideał może być ideałem precipitous, jeżeli rozkład Kuratowskiego ograniczymy do pewnego zbioru otwartego w przestrzeni, na której rozważamy ten rozkład. Mamy zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.26 **([C4])** *Niech X będzie przestrzenią Baire'a, a $\mathcal{F}$ rozkładem Kuratowskiego przestrzeni X mocy κ, gdzie*

$$\kappa = \min\{|\mathcal{G}|\colon \mathcal{G} \textit{ jest rozkładem Kuratowskiego przestrzeni } X\},$$

jest liczbą kardynalną regularną. Wtedy istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że K-ideał $I_{\mathcal{F}\cap U}$ na κ związany z $\mathcal{F} \cap U = \{F \cap U\colon F \in \mathcal{F}\}$ jest ideałem precipitous.

Dowód (szkic). Niech $\mathcal{F} = \{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\}$. Pokażemy, że istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że

$$I_{\mathcal{F}\cap U} = \{A \subset \kappa\colon \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha \cap U \text{ jest zbiorem pierwszej kategorii}\},$$

jest ideałem precipitous.

Załóżmy nie wprost, że dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$ ideał $I_{\mathcal{F}\cap U}$ nie jest ideałem precipitous. Ustalmy rodzinę $\mathcal{U}$ zbiorów otwartych i rozłącznych przestrzeni X taką, że zbiór $\bigcup\mathcal{U}$ jest gęsty w X. Bez straty ogólności możemy założyć, że $|\mathcal{U}| > 1$.

Dla ustalonego $U \in \mathcal{U}$, stosując Twierdzenie 4.5, otrzymujemy ciąg funkcjonałów

$$\Phi_0^U > \Phi_1^U > ...$$

na pewnym zbiorze $S^U \in I^+_{\mathcal{F}\cap U}$, takim, że $\kappa \setminus S^U \in I_{\mathcal{F}\cap U}$, i związanych z nimi $I_{\mathcal{F}\cap U}$-funkcji $\phi^U_k \in \Phi^U_k$. Bazując na tych ostatnich, definiujemy ciąg funkcji $\{f_k\colon k \in \omega\}$, gdzie $dom(f_k) = G(V_k)$ dla pewnych zbiorów $G(V_k)$. Zbiory

$$\{x\colon f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$$

mają taką własność, że dla dowolnego $k \in \omega$ ich dopełnienia w X są zbiorami pierwszej kategorii. Wtedy na podstawie Twierdzenia Baire'a, istnieje

$$x' \in \bigcap_{k\in\omega} \{x\colon f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$$

oraz

$$f_0(x') > f_1(x') > f_2(x') > \dots ,$$

co jest sprzeczne, ponieważ $f_k(x')$ są liczbami porządkowymi. Zatem, istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $I_{\mathcal{F}\cap U}$ jest ideałem precipitous. ■

Bezpośrednio z Twierdzenia 4.26 wynika następujący wniosek.

Wniosek 4.3 ([C4]) *Następujące warunki są równoważne:*

(i) istnieje ideał precipitous,

(ii) istnieje przestrzeń Baire'a z rozkładem Kuratowskiego,

(iii) istnieje przestrzeń metryczna Baire'a z rozkładem Kuratowskiego.

Dodam, że Twierdzenie 4.26 można też udowodnić w terminologii teorii gier. Dowód jest krótszy ale wymaga wprowadzenia pewnych definicji i faktów z teorii gier, dlatego ten dowód tutaj pomijam. Zamieściłam go w pracy [C4] oraz w Rozdziale 8 monografii [M1]. Na uwagę jednak zasługuje problem otwarty kończący Rozdział 8 w monografii [M1]: czy istnieje zbiór otwarty $U \subset X$ taki, że $I_{\mathcal{F}\cap U}$ jest ideałem precipitous, który jest normalny? Odpowiedź na to pytanie może nie być taka oczywista, gdyż w pewnych modelach w ZFC istnieją ideały precipitous nie będące ideałami normalnymi.

4.3.9 Rozkłady Kuratowskiego w przestrzeniach metrycznych zupełnych

Istnienie ideału precipitous jest ściśle związane z istnieniem liczby mierzalnej. Jaki jest zatem związek pomiędzy istnieniem liczby mierzalnej, a istnieniem rozkładu Kuratowskiego? Przy dodatkowym założeniu udowodniłam Lemat 4.4. Zanim go sformułuję, wprowadzę niezbędne oznaczenie.

Niech I będzie ideałem na κ oraz $I^+ = P(\kappa) \setminus I$. Rozważmy zbiór

$$X(I) = \{x \in (I^+)^\omega \colon \bigcap_{n\in\omega} x(n) \neq \emptyset \text{ oraz } \forall_{n\in\omega} \bigcap_{m<n} x(m) \in I^+\}.$$

Zbiór $X(I)$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej zupełnej $(I^+)^\omega$, gdzie I^+ jest przestrzenią z topologią dyskretną.

Lemat 4.4 **([M1])** *Jeżeli X jest przestrzenią Baire'a z rozkładem Kuratowskiego $\mathcal{F}$ mocy κ oraz $I_\mathcal{F}$ jest K-ideałem związanym z $\mathcal{F}$ takim, że $X(I_\mathcal{F})$ jest przestrzenią metryczną zupełną, to $I_{\mathcal{F}\cap U}$ jest ideałem maksymalnym dla pewnego zbioru otwartego $U \subset X$.*

Odpowiedź na postawione wyżej pytanie nie jest tak oczywista jak by się wydawało. Intuicyjnie można by badać własności K-ideału ale bez informacji o przestrzeni, w której rozpatrywany jest rozkład Kuratowskiego związany z tym ideałem ale byłoby to trudne. Jedyne co można udowodnić to istnienie przestrzeni metrycznej zupełnej małej mocy, która posiada rozkład Kuratowskiego. Twierdzenie to wymaga dodatkowych założeń. Jednym z nich jest ograniczenie "$\leqslant 2^\omega$", które wynika z własności udowodnionych w pracy [16].

Twierdzenie 4.27 **([M1])** *Jeżeli κ jest liczbą kardynalną regularną i najmniejszą rzeczywiście mierzalną taką, że $\aleph_1 < \kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$, to istnieje przestrzeń metryczna zupełna mocy nie większej niż 2^κ mająca rozkład Kuratowskiego.*

Dowód (szkic). Dla ułatwienia notacji załóżmy, że $X = [0, 1]$. Niech

$$\mu \colon P(X) \to X$$

będzie nietrywialną miarą κ-addytywną. Na podstawie Twierdzenia 4.7, μ rozszerza miarę Lebesgue'a na X. Weźmy μ-mierzalne zbiory $A, B \in \mathcal{P}(X)$ i zdefiniujmy relację równoważności

$$A \sim B \Leftrightarrow \mu(A \bigtriangleup B) = 0,$$

gdzie $\bigtriangleup$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów. Przez $[A]$ oznaczamy klasę równoważności wyznaczoną przez zbiór A. Niech

$$Y = \{[A] \colon A \in \mathcal{P}(X), A \text{ jest zbiorem } \mu\text{-mierzalnym}\}.$$

Zdefiniujmy metrykę $\rho([A], [B]) = \mu(A \bigtriangleup B)$ na Y. Ponieważ $A, B \in \mathcal{P}(X)$ są μ-mierzalne, metryka ρ jest dobrze zdefiniowana. Ponadto, przestrzeń (Y, ρ) jest zupełna, ponieważ granica każdego ciągu $([A_n])_{n\in\omega}$ spełniająca warunek Cauchy'ego jest postaci $[\bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k=0}^n A_k]$ i należy do Y.

Ponumerujmy elementy przestrzeni X następująco $\{x_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{c}\}$. Dla każdego elementu $x_\alpha \in X$ wybierzmy otoczenie U_{x_α} takie, że $x_\alpha \in U_{x_\alpha}$ oraz $U_{x_\alpha} \neq U_{x_\beta}$, gdy $\alpha \neq \beta$. Dla każdego $\alpha < \mathfrak{c}$ zdefiniujmy

$$G_\alpha = \{[A] \in Y\colon \alpha = \min\{\beta < \mathfrak{c}\colon U_{x_\beta} \cap A \neq \emptyset\}\}.$$

Wtedy $\mathcal{G} = \{G_\alpha\colon \alpha < \mathfrak{c}\}$ jest szukanym rozkładem Kuratowskiego. ■

4.3.10 Przykład przestrzeni metrycznej bez rozkładu Kuratowskiego

W rozważaniach nad istnieniem rozkładów Kuratowskiego zrodziło się pytanie:

Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną, a Y jest jej podprzestrzenią, która ma rozkład Kuratowskiego. Czy X ma rozkład Kuratowskeigo?

Pewne odpowiedzi na to pytanie można znaleźć w pracach [23, 32] ale tylko dla zbiorów Borela. Udowodniłam, że istnieje przestrzeń metryczna z rozkładem Kuratowskiego, dla której przestrzeń uzupełniona nie ma rozkładu Kuratowskiego. Dowód jest oparty na Twierdzeniu 4.28 i Lemacie 4.5.

Twierdzenie 4.28 ([22]) *Niech X będzie przestrzenią, a I ideałem na liczbie kardynalnej regularnej κ. Wtedy:*

(i) $X(I)$ jest przestrzenią Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy I jest ideałem precipitous.

(ii) Jeżeli I jest ideałem precipitous, to $X(I)$ ma rozkład Kuratowskiego

$$\{F_\alpha\colon \alpha < \kappa\},$$

gdzie $F_\alpha = \{x \in X(I)\colon \alpha = \min \bigcap_{n\in\omega} x(n)\}$.

Lemat 4.5 ([C3]) *Załóżmy, że ZFC + "istnieje liczba mierzalna" jest niesprzeczne. Wtedy ZFC + "$2^\omega = 2^{\omega_1}$" + "istnieje ideał precipitous na ω_1" jest również niesprzeczne.*

Dowód. Dowód jest forcingowy z zastosowaniem forcingu Cohena i wydaje się, że jest to najprostsza metoda do udowodnienia tego lematu. ■

Głównym wynikiem zamieszczonym w tym podrozdziale jest poniższe twierdzenie, które podaję razem z dowodem.

Twierdzenie 4.29 ([C3]) *Załóżmy, że*

$$ZFC + \text{"istnieje liczba kardynalna mierzalna"}$$

jest niesprzeczne. Wtedy istnieje przestrzeń metryczna Baire'a z rozkładem Kuratowskiego, dla której uzupełnienie nie ma rozkładu Kuratowskiego.

Dowód. Na podstawie Lematu 4.5, istnieje model w ZFC, w którym

$$ZFC + \text{"}2^{\omega_0} = 2^{\omega_1}\text{" + "istnieje ideał precipitous na } \omega_1\text{"}$$

jest niesprzeczne. Niech I będzie ideałem precipitous na ω_1, a $X(I)$ będzie takie jak zdefiniowano w podrozdziale 4.3.9. Z Twierdzenia 4.28 wynika, że $X(I)$ jest przestrzenią Baire'a oraz ma rozkład Kuratowskiego. Dalej, z Twierdzenia [28, Theorem 8.1 str. 32-33] mamy

$$w(X(I)) = 2^{\omega_1}.$$

Rozważmy uzupełnienie $\tilde{X}(I)$ przestrzeni $X(I)$, w sensie Twierdzenia [18, Theorem 4.3.19, str. 272]). Na jego podstawie mamy $w(X(I)) = w(\tilde{X}(I))$. Stąd

$$w(\tilde{X}(I)) = 2^{\omega_1}.$$

Dalej, na podstawie Twierdzenia [28, Theorem 8.1 str. 32-33] otrzymujemy, że $w(\tilde{X}(I)) = \pi w(\tilde{X}(I))$. Zatem

$$\pi w(\tilde{X}(I)) = 2^{\omega_1}.$$

Ale z założenia $2^{\omega_0} = 2^{\omega_1}$, więc mamy

$$\pi w(\tilde{X}(I)) = 2^{\omega_0}.$$

Zatem, na podstawie Twierdzenia 4.15, przestrzeń $\tilde{X}(I)$ nie ma rozkładu Kuratowskiego. ■

4.3.11 Uogólnienie Twierdzenia Louveau-Simpsona

W 1982, Louveau oraz Simpson ([40]) udowodnili twierdzenie, które w perspektywie czasu okazało się być użyteczne w dowodzeniu wielu twierdzeń z analizy matematycznej (zob. np. [2, str. 186]).

Twierdzenie 4.30 (Louveau-Simpson [40]) *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $f\colon [\omega]^{\omega}_{EL} \to X$ odwzorowaniem takim, że przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest CR-zbiorem. Wtedy istnieje nieskończony podzbiór T zbioru ω taki, że $f([T]^{\omega})$ jest przestrzenią ośrodkową.*

Jako że Twierdzenie 4.30 zostało udowodnione dla całej przestrzeni $[\omega]^\omega$ z topologią Ellentucka, naturalnym jest więc pytanie: czy jest ono prawdziwe dla podzbioru $[\omega]^\omega$, który nie jest CR-zbiorem? Okazuje się, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, a wyniki z tym związane zostały opublikowane w pracy [C1] oraz znajdują się w Rozdziale 11 monografii [M1]. Choć dowód w tej pracy przedstawiony jest dla rozkładów, może być on wykorzystany do udowodnienia Twierdzenia 4.30 dla pokryć punktowo-skończonych.

Zaczniemy od następującego lematu dowodzącego, że problem Kuratowskigo jest równoważny istnieniu rozkładów Kuratowskiego danego zbioru.

Lemat 4.6 ([C1]) *Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi oraz $A \subset X$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) Zbiór A nie ma rozkładu Kuratowskiego.

(ii) Dla dowolnego odwzorowania $f\colon A \to Y$ mającego własność Baire'a istnieje zbiór pierwszej kategorii $M \subset A$ taki, że restrykcja $f|(A \setminus M)$ jest ciągła.

Lemat 4.6 jest kluczowy do udowodnienia uogólnionego Twierdzenia Louveau-Simpsona (Twierdzenie 4.31), które przedstawię razem z dowodem.

Twierdzenie 4.31 ([C1]) *Niech Y będzie przestrzenią metryczną, podzbiór $A \in \mathcal{P}([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{CR}$ oraz $f\colon A \to Y$ jest funkcją CR-mierzalną. Wtedy istnieje nieskończony zbiór $T \subset \omega$ taki, że $f([T]^\omega \cap A)$ jest przestrzenią ośrodkową.*

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $f([T]^\omega \cap A)$ nie jest przestrzenią ośrodkową dla dowolnego nieskończonego zbioru $T \subset \omega$. Weźmy rodzinę $\mathcal{C}$ rozłącznych zbiorów otwartych z Y taką, że dla dowolnego nieskończonego zbioru $T \subset \omega$ rodzina

$$\mathcal{C}_T = \{U \in \mathcal{C}\colon U \cap f([T]^\omega \cap A) \neq \emptyset\}$$

jest nieprzeliczalna. Niech $\mathcal{B}$ oznacza bazę otwartą w $[\omega]^\omega_{EL}$. Wtedy dla dowolnego nieskończonego zbioru $T \subset A$ rodzina

$$\mathcal{B}_T = \{V \in \mathcal{B}\colon V \subset f^{-1}(U) \cap [T]^\omega \cap A\}$$

jest także nieprzeliczalna co oznacza, że $f^{-1}(U) \in \mathbb{CR}$ dla dowolnego nieskończonego zbioru $T \subset \omega$ oraz $U \in \mathcal{C}_T$. Na podstawie Wniosku 4.2, zbiór A nie ma rozkładu Kuratowskiego. Korzystając z Lematu 4.6 istnieje zbiór $M_0 \in \mathbb{NR}$ taki, że restrykcja $f|(A \setminus M_0)$ jest ciągła. Stąd, $M_0 \cap [T_0]^\omega \cap A = \emptyset$ dla pewnego nieskończonego zbioru $T_0 \subset \omega$. Weźmy $f^{-1}(U_0) = M_0$ dla pewnego zbioru otwartego $U_0 \in \mathcal{C}_T$. Otrzymujemy sprzeczność. ■

Bezpośrednio z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.32 **([C1])** *Następujące warunki są równoważne.*

(i) *Jeżeli Y jest przestrzenią metryczną, podzbiór $A \in \mathcal{P}([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{CR}$ oraz $f\colon A \to Y$ funkcją CR-mierzalną, to istnieje nieskończony zbiór $T \subset \omega$ taki, że przestrzeń $f([T]^\omega \cap A)$ jest ośrodkowa.*

(ii) *Nie istnieje zbiór $A \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{CR}$ mający rozkład Kuratowskiego.*

4.3.12 O równoważnościach Twierdzenia Gitika-Shelaha

Badając algebry ilorazowe stajemy przed problemem ich klasyfikacji, tzn. wykazania różnic pomiędzy nimi. Jednym z bardziej znanych wyników w tym temacie jest Twierdzenie Gitika-Shelaha. Wynika z niego, że jeżeli liczba kardynalna $\kappa > \aleph_1$, to forcing z κ-zupełnym ideałem na zbiorze X, gdzie $|X| > \kappa$, nie jest izomorficzny z żadnym z następujących forcingów: forcingiem Cohena, forcingiem randomowym, forcingiem Hechlera czy forcingiem Sacksa.

Analizując struktury algebr ilorazowych rozważanych w Twierdzeniu Gitika-Shelaha dochodzimy do wniosku, że są one bardzo mocno związane z istnieniem rozkładów Kuratowskiego odpowiednich przestrzeni. Ze względu na pewne różnice w strukturach przedstawię rozważania dla prostej rzeczywistej z miarą Lebesgue'a oraz dla przestrzeni z topologią Ellentucka. Można przypuszczać, że dowody dla pozostałych forcingów przebiegają podobnie.

Poniższe twierdzenia zostało udowodnione wyłącznie metodami kombinatorycznymi, bez użycia forcingu. Z uwagi na to, że dowody obydwu twierdzeń przebiegają podobnie z technicznego punktu widzenia (różnice wynikają ze specyfiki każdej ze struktur) przedstawię tylko szkic dowodu Twierdzenia 4.34, w którym korzystam z następującego lematu.

Lemat 4.7 **([C1])** *Niech $M \in \mathbb{CR} \setminus \mathbb{NR}$ będzie zbiorem otwartym i gęstym (w sensie topologii Ellentucka). Wtedy istnieje rodzina*

$$\{M_{f|n} \subseteq M\colon\, f \in 2^\omega, n \in \omega\},$$

spełniająca poniższe warunki: dla dowolnych $f, f' \in 2^\omega$ takich, że $f \neq f'$

(i) $M_{f|n} \cap M_{f'|n} = \emptyset$*, o ile* $f|n \neq f'|n$*;*

(ii) $M_{f|m} \subseteq M_{f|n}$ *dla dowolnego* $m \geqslant n$*;*

(iii) $M_{f|n} \in \mathbb{CR} \setminus \mathbb{NR}$*;*

(iv) $M \setminus \bigcup_{f \in 2^\omega} M_{f|n} \in \mathbb{NR}$*;*

(v) $\bigcap_{n \in \omega} M_{f|n} \in \mathbb{NR}$*;*

(vi) $M = \bigcup_{f\in 2^\omega} \bigcap_{n\in\omega} M_{f|n}$.

Twierdzenie 4.33 ([C2]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną taką, że $\kappa > \aleph_1$, a I niegłównym ideałem κ-zupełnym na κ. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

(i) $\mathcal{P}(\kappa)/I \not\simeq LM/\triangle_\mu$*, gdzie* $\triangle_\mu = \{A \subset \kappa \colon \mu(A) = 0\}$.

(ii) Nie istnieje rozkład Kuratowskiego w odcinku $[0, 1]$.

Twierdzenie 4.34 ([C2]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną taką, że $\kappa > \aleph_1$, a I niegłównym ideałem κ-zupełnym na κ. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(i) $\mathcal{P}(\kappa)/I \not\simeq \mathbb{CR}/\mathbb{NR}$.

(ii) Nie istnieje rozkład Kuratowskiego w $P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$.

Dowód (szkic). Przypuśćmy nie wprost, że istnieje izomorfizm

$$\psi \colon \mathcal{P}(\kappa)/I \to \mathbb{CR}/\mathbb{NR}.$$

Z Lematu 4.7 wynika istnienie rodziny zbiorów

$$\{M_{f|n} \subseteq [\omega]^\omega \colon f \in 2^\omega, n \in \omega\}$$

o własnościach (i)-(vi). Poprzez izomorfizm ψ "odtwarzamy" rodzinę

$$\{B_{f|n} \colon [B_{f|n}] = \psi^{-1}([M_{f|n}]), M_{f|n} \in \mathcal{M}_f\}$$

w $P(\kappa)/I$, która ma analogiczne własności do tych z Lematu 4.7. Następnie wykazujemy pewne własności tych zbiorów, które po przekształceniu przez izomorfizm ψ dają nam istnienie rozkładu Kuratowskiego w $[\omega]^\omega$ z topologią Ellentucka, co przeczy Wnioskowi 4.2. ■

4.3.13 Uogólnienie Twierdzenia Halpern-Läuchli

Klasyczne Twierdzenie Halpern-Läuchli ([27]) dotyczy produktów skończenie wielu drzew o wysokości ω, które mają skończoną liczbę gałęzi, ale nie mają węzłów końcowych.

Twierdzenie 4.35 (Halpern-Läuchli [27]) *Niech $d < \omega$. Jeżeli $(T_i)_{i<d}$ jest ciągiem drzew doskonałych, $A \subseteq \omega$ zbiorem, a*

$$\bigcup_{n\in A} \bigotimes_{i<d} T_i(n) = G_0 \cup G_1,$$

to istnieje zbiór $B \in [\omega]^\omega$ oraz poddrzewa doskonałe (skierowane w dół) T'_i drzewa T_i $(i < \omega)$ takie, że

$$\bigcup_{n \in B} \bigotimes_{i<d} T'_i(n) \subseteq G_j,$$

gdzie $j \in \{0, 1\}$.

Twierdzenie 4.35 oznaczane jest w literaturze jako HL_d, gdzie $d < \omega$. Przypadek, gdy $d = \omega$ został udowodniony przez Lavera w pracy [39] i można go zapisać w następującej postaci.

Twierdzenie 4.36 (Laver [39]) *Jeżeli f_i $(i \in \omega)$ są funkcjami ciągłymi odwzorowującymi kostkę Hilberta $[0, 1]^\omega$ w odcinek $[0, 1]$, to istnieją niepuste zbiory doskonałe $P_i \subseteq [0, 1]$ $(i \in \omega)$ oraz zbiór $B \in [\omega]^\omega$ takie, że f_i $(i \in B)$ są funkcjami monotonicznymi oraz jednostajnie zbieżnymi na $\bigotimes_{i \in \omega} P_i$.*

Twierdzenie Halpern-Läuchli doczekało się wielu uogólnień, również w wersji nieprzeliczalnej oraz dla liczb mierzalnych (zob. np. [12, 13]), a dowody tych twierdzeń często bazują na metodach forcingowych.

Wyniki zawarte w tej części dotyczą uogólnień Twierdzenia Halpern-Läuchli w strukturach drzew, a także w przestrzeni z topologią Ellentucka. Poniżej przedstawiam twierdzenia wymagające jedynie dowodów kombinatorycznych. Z uwagi na fakt, że kluczowymi lematami wykorzystywanymi w dowodach Twierdzeń 4.37 oraz 4.38 są Lematy 4.2 i 4.3 można wnioskować, że również prawdziwe są podobne wyniki dla pozostałych struktur, dla których zachodzi Lemat Fuzji, czyli Twierdzenia 4.4 oraz 4.2.

Głównymi wynikami tego podrozdziału są: Twierdzenie 4.37 w przypadku struktur drzewa oraz Twierdzenie 4.38 w przypadku przestrzeni z topologią Ellentucka.

Twierdzenie 4.37 ([M1]) *Niech $(f_n \colon n \in \omega)$, gdzie $f_n \colon K^\omega \to [0, 1]$, będzie ciągiem funkcji t-mierzalnych. Wtedy istnieją t-drzewa $\{T_k \colon k \in \omega\}$ oraz podciąg*

$$(f_{n_k} \colon k \in \omega)$$

ciągu $(f_n \colon n \in \omega)$, który jest jednostajnie zbieżny na $\bigotimes_{k \in \omega} T_k$.

Twierdzenie 4.38 ([M1]) *Niech $(f_n \colon n \in \omega)$, gdzie $f_n \colon ([\omega]^\omega)^\omega \to [0, 1]$, będzie ciągiem funkcji CR-mierzalnych. Wtedy istnieją EL-zbiory $\{[a_k, A_k] \colon k \in \omega\}$ oraz podciąg*

$$(f_{n_k} \colon k \in \omega)$$

ciągu $(f_n \colon n \in \omega)$, który jest jednostajnie zbieżny na $\bigotimes_{k \in \omega} [a_k, A_k]$.

Z technicznego punktu widzenia, dowody obydwu twierdzeń są nieco podobne (różnice wynikają ze specyfiki tych struktur), dlatego przedstawię jedynie szkic dowodu Twierdzenia 4.38. W dowodzie tego twierdzenia korzystam z następujących lematów.

Lemat 4.8 **([M1])** *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $f\colon K^\omega \to X$ funkcją. Funkcja f jest t-mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego t-drzewa $T \in \mathbb{T}$ istnieje t-poddrzewo $Q \leqslant T$ takie, że restrykcja $f|[Q]$ jest ciągła.*

Lemat 4.9 **([M1])** *Niech $f_n\colon K^\omega \to \{0,1\}, n \in \omega$, będzie ciągiem funkcji t-mierzalnych, $n \in \omega$. Wtedy istnieje t-drzewo $Q \subseteq K^{<\omega}$ oraz podciąg*

$$(f_{n_k}\colon k \in \omega)$$

ciągu $(f_n\colon n \in \omega)$, który jest jednostajnie zbieżny na $[Q]$.

Poniżej przedstawiam zapowiadany szkic dowodu Twierdzenia 4.38.

Dowód (szkic). Korzystając z Lematu 4.8 dowodzę "jedno-wymiarowej" wersji uogólnionego Twierdzenia Halpern-Laüchli. W tym celu stosuję Lemat 4.9 ω razy, dla odpowiednio skonstruowanych funkcji. Szczegóły dowodu są zamieszczone w Rozdziale 13 monografii [M1]. ∎

4.3.14 Rozkłady i pokrycia punktowo-skończone przestrzeni Baire'a

Jak już wspomniałam w podrozdziale 4.3.5, rozważania nad problemem Kuratowskiego były również prowadzone dla pokryć punktowo-skończonych. Główny wynik, który przedstawiam w tej części sprowadza się do wykazania, że istnienie rozkładów Kuratowskiego przestrzeni Hausdorffa spełniającej Twierdzenie Baire'a jest równoważne istnieniu pokrycia punktowo-skończonego tej samej przestrzeni. Wyniki zaprezentowane w tej części zawarłam w Rozdziale 14 monografii [M1].

Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa. Rodzinę zbiorów $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ nazywamy *całkowicie addytywną względem własności Baire'a* (ang. completely additive with respect to the Baire proprty) (skr. $\mathcal{A}$ jest $CA(Baire)$), jeżeli dla dowolnej podrodziny $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ zbiór $\bigcup \mathcal{A}'$ ma własność Baire'a.

W monografii [M1] zamieściłam następujące twierdzenia wraz z dowodami.

Twierdzenie 4.39 **([M1])** *Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, a $A \subset X$ podprzestrzenią Baire'a przestrzeni X, która ma rozkład Kuratowskiego. Wtedy istnieje pokrycie punktowo-skończone $\mathcal{G}$ zbioru A złożone ze zbiorów pierwszej kategorii, które jest $CA(Baire)$.*

Twierdzenie 4.40 **([M1])** *Niech X będzie przestrzenią Hausdorffa, która ma pokrycie punktowo-skończone będące $CA(Baire)$ rodziną złożoną ze zbiorów pierwszej kategorii. Wtedy istnieje zbiór $B \subseteq X$ mający rozkład Kuratowskiego i taki, że $X \setminus B$ jest zbiorem pierwszej kategorii w przestrzeni X.*

O ile dowód Twierdzenia 4.39 jest natychmiastowy, to dowód Twierdzenia 4.40 wymaga skorzystania dodatkowo z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4.41 **([M1])** *Niech κ będzie liczbą kardynalną, $n < \omega$ liczbą naturalną oraz $\{Z_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ pokryciem przestrzeni X takim, że*

$$|\{\alpha < \kappa \colon x \in Z_\alpha\}| = n,$$

dla każdego $x \in X$. Wtedy istnieją zbiory rozłączne $\{Y_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ takie, że

$$Y_\alpha \subseteq Z_\alpha \text{ dla } \alpha < \kappa \text{ oraz } \bigcup_{\alpha<\kappa} Y_\alpha = X.$$

Kolejne twierdzenie dotyczy związków pomiędzy istnieniem $CA(Baire)$ pokrycia punktowo-skończonego przestrzeni Hausdorffa zbiorami pierwszej kategorii, a istnieniem liczby mierzalnej. Z uwagi na piękno dowodu tego twierdzenia przedstawiam go w całości.

Twierdzenie 4.42 **([M1])** *Jeżeli $ZFC+$ "istnieje przestrzeń Hausdorffa Baire'a X i istnieje $CA(Baire)$ punktowo-skończone pokrycie zbioru X złożone ze zbiorów pierwszej kategorii" jest niesprzeczne, to $ZFC+$ "istnieje liczba mierzalna" jest również niesprzeczne.*

Dowód. Niech κ będzie najmniejszą liczbą kardynalną regularną będącą mocą najmniejszego $CA(Baire)$ pokrycia punktowo-skończonego przestrzeni X złożonego ze zbiorów pierwszej kategorii. Wybierzmy pokrycie przestrzeni X mocy κ i oznaczmy je przez $\mathcal{G}$. Na podstawie Twierdzenia 4.40, istnieje podzbiór $B \subseteq X$ mający rozkład Kuratowskiego i taki, że $X \setminus B$ jest zbiorem pierwszej kategorii w X. Niech

$$\mathcal{F} = \{F_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$$

będzie rozkładem Kuratowskiego zbioru B. Rozważmy K-ideał $I_\mathcal{F}$ związany z $\mathcal{F}$. Taki ideał jest κ-zupełny i niegłówny.

Teraz, modyfikujemy odpowiednio dowód przedstawiony w pracy [22]. Definiujemy rodzinę funkcji $P(V)$, gdzie V jest uniwersum, tj. $f \in P(V)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f \colon \bigcup \mathcal{F} \to V$$

oraz istnieje otwarte pokrycie $\mathcal{U}_f$ zbioru $\bigcup \mathcal{F}$, gęste w $\bigcup \mathcal{F}$ takie, że funkcja f jest stała na $U \cap F_\alpha$, dla dowolnego $U \in \mathcal{U}_f$ oraz $F_\alpha \in \mathcal{F}$.

Dla dowolnych funkcji $f, g \in P(V)$ zbiory

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f(x) = g(x)\} \text{ oraz } \{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f(x) \in g(x)\},$$

mają własność Baire'a. Istotnie. Weźmy $W \in \{U \cap V : U \in \mathcal{U}_f, V \in \mathcal{U}_g\}$. Wtedy,

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f(x) = g(x)\} = \bigcup \{F_\alpha \cap W : \alpha \in A\}$$

oraz

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f(x) \in g(x)\} = \bigcup \{F_\alpha \cap W : \alpha \in B\},$$

dla pewnych $A, B \subseteq \kappa$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest rozkładem Kuratowskiego zbioru B, to

$$\mathcal{F} \cap W = \{F_\alpha \cap W \colon F_\alpha \in \mathcal{F}\}$$

jest rozkładem Kuratowskiego zbioru W. Z Twierdzenia 4.1 wynika, że obydwa zbiory

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f(x) = g(x)\} \text{ oraz } \{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f(x) \in g(x)\}$$

mają własność Baire'a.

Niech $\mathbb{B}$ będzie algebrą Boole'a podzbiorów regularnie otwartych zbioru $\bigcup \mathcal{F}$ oraz niech dany będzie G-generujący ultrafiltr (ang. G-generic ultrafilter) nad $\mathbb{B}$.

Rozważmy graniczną ultrapotęgę (ang. limit ultrapower) $P(V)/G$ (w sensie Keislera, zob. np. [10]), która jest modelem w ZFC. Z Twierdzenia Łosia [31, str.159] wynika, że

$$P(V)/G \models \varphi([f_1], [f_2], ..., [f_n])$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon \models \varphi(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))\} \in G,$$

gdzie $f_1, f_2, ..., f_n \in P(V)$.

Podobnie jak w [31, str. 284-288] możemy zdefiniować naturalne zanurzenie (ang. embedding)

$$j_G \colon V \to P(V)/G,$$

takie, że $j_G(x) = [c_x]$, gdzie $c_x \colon \bigcup \mathcal{F} \to V$ oraz $c_x(t) = x$ dla dowolnego $t \in \bigcup \mathcal{F}$. $P(V)/G$ jest dobrze ufundowany (ang. well-founded) (zob. [31, str. 286]), to jest

$$P(V)/G \models f_1 \ni f_2 \ni ... \ni f_n \ni ... \; .$$

Wobec tego

$$\{x \in \bigcup \mathcal{F} \colon f_n(x) \ni f_{n+1}(x)\},$$

jest zbiorem, którego dopełnienie jest zbiorem pierwszej kategorii w $\bigcup \mathcal{F}$. Z Twierdzenia Baire'a wynika istnienie elementu $x_0 \in \bigcup \mathcal{F}$ takiego, że

$$f_0(x_0) \ni f_1(x_0) \ni \ldots \ni f_n(x_0) \ni \ldots .$$

Jak pokazano w [31, str. 287] zachodzi nierówność $j_G(\kappa) > \kappa$. Na podstawie wyniku zamieszczonego w [31, str. 287] istnieje liczba kardynalna mierzalna, co kończy dowód. ■

4.3.15 Zbiory niemierzalne dla pokryć punktowo-skończonych

Część wyników uzyskanych dla rozkładów Kuratowskiego może być także udowodniona rozważając pokrycia punktowo-skończone zamiast rozkładów. Jako przykład przedstawię wyniki analogiczne do tych z podrozdziału 4.3.6 ale dla pokryć punktowo-skończonych. Podobnie jak w podrozdziale 4.3.6, dowód głównego twierdzenia bazuje na poniższych lematach.

Lemat 4.10 ([M1]) *Niech $A \in P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$. Dla dowolnego pokrycia punktowo-skończonego $\mathcal{F}$ zbioru A złożonego z t^0-zbiorów oraz dowolnego drzewa doskonałego $T \in \mathbb{S}$ istnieje poddrzewo doskonałe $Q \leqslant T$ takie, że rodzina*

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q] \colon F_\alpha \in \mathcal{F}\},$$

ma moc kontinuum.

Dowód (szkic). Niech $A \in P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$ będzie dowolnym zbiorem, a $T \in \mathbb{T}$ drzewem. Niech $\mathcal{F}$ będzie pokryciem punktowo-skończonym zbioru A złożonym z t^0-zbiorów. Konstruujemy indukcyjnie, względem $n \in \omega$, podrodziny

$$\{\mathcal{F}_h \colon h \in k^n\}$$

($k = 2$ dla drzew Sacksa oraz $k = n$ dla drzew Lavera) rodziny $\mathcal{F}$ oraz poddrzewa $\{T_h \colon h \in k^n\}$ drzewa T, które mają następujące własności: dla dowolnych $h, h' \in k^n$ takich, że $h \neq h'$

(1) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}$ oraz $T_h \leqslant T$;

(2) $\bigcup\{\mathcal{F}_h \colon h \in k^n\} = \bigcup \mathcal{F}$;

(3) $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}^0$;

(4) $\mathcal{F}_h \subseteq \mathcal{F}_g$ oraz $T_h \leqslant_n T_g$, i.e. $[T_h] \subseteq [T_g]$, dla $h \cap g = g$;

(5) $\mathcal{F}_h \cap \mathcal{F}_{h'} = \emptyset$ oraz $[T_h] \cap [T_{h'}] = \emptyset$;

(6) $A \cap [T_h] \subseteq \mathcal{F}_h$ oraz $A \cap [T_h] \notin \mathbb{T}^0$.

Pierwszy i każdy następnikowy krok dowodu indukcyjnego są zasadniczo podobne. Załóżmy, że dla pewnego $m \in \omega$ skonstruowaliśmy rodziny

$$\{\mathcal{F}_h \colon h \in k^m\} \text{ and } \{T_h \colon h \in k^m\}$$

o własnościach (1)-(6).

Ustalmy teraz dowolne $h \in k^m$. Niech

$$W_n = \{x \in A \colon |\{F \in \mathcal{F} \colon x \in F\}| = n\}.$$

Ponieważ $\bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}^0$, więc istnieje $n \in \omega$ takie, że

$$W_n \cap \bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}^0.$$

Niech

$$n_h = \min\{n \in \omega \colon W_n \cap \bigcup \mathcal{F}_h \notin \mathbb{T}_0\}.$$

Pokażemy, że dla dowolnych A_0 oraz $A_1 = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus A_0$ zachodzi $W_{n_h} \cap A_\varepsilon \notin \mathbb{T}^0$ oraz

$$W_{n_h} \cap A_\varepsilon \cap (\bigcup \mathcal{F}_{h^\frown \nu} \setminus \bigcup \mathcal{F}_{h^\frown (1-\nu)}) \notin \mathbb{T}^0,$$

gdzie $\varepsilon, \nu \in \{0, 1\}$.

Rozważmy rodzinę

$$\{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_h \colon (\bigcup \mathcal{G}) \cap A_0 \cap W_{n_h} \in \mathbb{T}^0\}.$$

Na podstawie Twierdzenia Ulama [35, str. 86], dla każdego $\nu \in \{0, 1\}$ istnieją podrodziny $\mathcal{G}_0$ oraz $\mathcal{G}_1 = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_0$ takie, że

$$\bigcup \mathcal{G}_\nu \cap A_0 \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0.$$

Jeżeli jeden z tych przekrojów należy do $\mathbb{T}^0$, to drugi musi należeć do $P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$ oraz

$$A' = \bigcup \mathcal{G}_0 \cap \bigcup \mathcal{G}_1 \cap A_0 \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0.$$

Kontynuujemy podział na podrodziny $\mathcal{G}_0$ oraz $\mathcal{G}_1$ analogicznie jak powyżej, otrzymując $\mathcal{G}_{00}, \mathcal{G}_{01} = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_{00}, \mathcal{G}_{10}, \mathcal{G}_{11} = \bigcup \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{G}_{10}$ takie, że:

$$A'' = A' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{00} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{01}) \notin \mathbb{T}^0,$$

$$A''' = A' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{01} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{00}) \notin \mathbb{T}^0,$$

$$A^{iv} = A'' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{10} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{11}) \notin \mathbb{T}^0,$$

oraz

$$A^v = A'' \cap (\bigcup \mathcal{G}_{11} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{10}) \notin \mathbb{T}^0.$$

Niech $\mathcal{H}_0 = \mathcal{G}_{00} \cup \mathcal{G}_{10}$ oraz $\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_{01} \cup \mathcal{G}_{11}$.
Oczywiście, $\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \bigcup \mathcal{F}_h$ oraz

$$A^v \cap (\bigcup \mathcal{G}_{11} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{10}) \subseteq A' \cap (\bigcup \mathcal{H}_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}_0),$$

$$A^v \cap (\bigcup \mathcal{G}_{10} \setminus \bigcup \mathcal{G}_{11}) \subseteq A' \cap (\bigcup \mathcal{H}_0 \setminus \bigcup \mathcal{H}_1),$$

$$A_0 \cap (\bigcup \mathcal{H}_1 \setminus \bigcup \mathcal{H}_0) \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0,$$

oraz

$$A_0 \cap (\bigcup \mathcal{H}_0 \setminus \bigcup \mathcal{H}_1) \cap W_{n_h} \notin \mathbb{T}^0.$$

Jeżeli jeden z powyższych zbiorów należałby do $\mathbb{T}^0$, to postępując jak powyżej otrzymujemy $\mathcal{H}_{00}, \mathcal{H}_{01}, \mathcal{H}_{10}, \mathcal{H}_{11}$, itd. aż do momentu uzyskania obydwu zbiorów należących do $\mathbb{T}^0$. Rozpatrujemy rodziny

$$\mathcal{F}_{h^\frown 0} = \{F \in \mathcal{F}_h \colon F \in \mathcal{H}_0\}$$

oraz

$$\mathcal{F}_{h^\frown 1} = \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_{h^\frown 0}.$$

Oczywiście, $\mathcal{F}_{h^\frown 0}$ oraz $\mathcal{F}_{h^\frown 1}$ mają własności (1)-(3). Konstruujemy poddrzewa $T_{h^\frown 0}, T_{h^\frown 1} \leqslant_m T_h$ o własnościach (4) oraz (6). Konstrukcja podzbiorów i poddrzew przebiega zgodnie z definicją forcingu Sacksa w przypadku $K = 2$ (lub forcingu Lavera, gdy $K = \omega$), a następnie stosujemy Twierdzenie 4.4, na podstawie którego uzyskujemy tezę lematu. ■

Lemat 4.11 można udowodnić podobnie jak Lemat 4.10, z uwzględnieniem różnic wynikających ze specyfiki danych struktur.

Lemat 4.11 ([M1]) *Niech $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ będzie zbiorem otwartym i gęstym (w sensie topologii Ellentucka). Dla dowolnego pokrycia $\mathcal{F}$ zbioru M złożonego z NR-zbiorów oraz dowolnego $[a, A] \subseteq [\omega]^\omega_{EL}$ istnieje $[b, B] \subseteq [a, A]$ taki, że rodzina*

$$\mathcal{F}_{[b,B]} = \{F \cap [b, B] \colon F \in \mathcal{F}\}$$

ma moc kontinuum.

Korzystając z Lematów 4.10 oraz 4.11 dowodzimy poniższych twierdzeń. Dowody przebiegają analogicznie jak dowody Twierdzeń 4.22 oraz 4.23. Należy oczywiście uwzględnić różnice wynikające z własności pokryć punktowo-skończonych.

Twierdzenie 4.43 ([M1]) *Niech $A \in P(K^\omega) \setminus \mathbb{T}^0$ będzie zbiorem oraz $\mathcal{F}$ pokryciem punktowo-skończonym zbioru A złożonego z t^0-zbiorów. Jeżeli dla każdego drzewa $T \in \mathbb{T}$ takiego, że $A \cap [T] \neq \emptyset$ istnieje poddrzewo $Q \leqslant T$ dla którego $A \cap [Q] \neq \emptyset$ oraz rodzina*

$$\mathcal{F}_{[Q]} = \{F \cap [Q] \colon F \in \mathcal{F}\},$$

ma moc kontinuum, to dla pewnej podrodziny $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup \mathcal{F}'_{[Q]}$ nie jest t-zbiorem.

Twierdzenie 4.44 ([M1]) *Niech $M \in P([\omega]^\omega) \setminus \mathbb{NR}$ będzie zbiorem oraz $\mathcal{F}$ pokryciem punktowo-skończonym zbioru M złożonym z NR-zbiorów. Jeżeli dla każdego EL-zbioru $[a, A]$ takiego, że $M \cap [a, A] \neq \emptyset$ istnieje EL-zbiór $[b, B] \subseteq [a, A]$ taki, że $M \cap [b, B] \neq \emptyset$ oraz rodzina*

$$\mathcal{F}_{[b,B]} = \{F \cap [b, B] \colon F \in \mathcal{F}\},$$

ma moc kontinuum, to dla pewnej podrodziny $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ zbiór $\bigcup \mathcal{F}'_{[b,B]}$ nie jest CR-zbiorem.

4.3.16 O istnieniu selektorów mierzalnych

Klasycznym twierdzeniem w teorii miary, w którym sformułowany jest warunek wystarczający na to, aby multifunkcje miały selektor mierzalny jest Twierdzenie Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego ([38]). Jest ono fundamentalnym twierdzeniem w teorii selektorów, ściśle związanej z Aksjomatem Wyboru (AC) i jego równoważnymi sformułowaniami. Zanim przypomnimy to twierdzenie przyjmijmy następujące oznaczenia.

Niech $(X, \mathcal{S})$ oraz $(Y, \mathcal{R})$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Funkcję

$$F \colon X \to \mathcal{P}(Y)$$

nazywamy *dolną $\mathcal{S}$-mierzalną* (ang. lower-S), jeżeli

$$\{x \in X \colon F(x) \cap U \neq \emptyset\} \in \mathcal{S} \text{ dla każdego zbioru otwartego } U \subset Y.$$

Jeżeli $\mathcal{S}$ jest rodziną wszystkich podzbiorów otwartych przestrzeni X, a F funkcją dolną $\mathcal{S}$-mierzalną, to F nazywamy funkcją *półciągłą z dołu* (ang. lower semicontinuous function).

Niech $Cl^+(X)$ oznacza rodzinę wszystkich niepustych zbiorów domkniętych w X, a $K^+(X)$ rodzinę wszystkich niepustych zwartych podzbiorów w X. Jeżeli $F \colon X \to \mathcal{P}(X)$ jest odwzorowaniem, to każdą funkcję $f \colon X \to Y$ taką, że dla każdego $x \in X$ mamy $f(x) \in F(x)$ nazywamy *selektorem* (ang. selector) dla funkcji F.

Twierdzenie 4.45 (Kuratowski i Ryll-Nardzewski, [38]) *Niech Y będzie przestrzenią polską (tj. ośrodkową przestrzenią topologiczną, która jest metryzowalna w sposób zupełny) oraz $\mathcal{A}$ ciałem podzbiorów przestrzeni X. Jeżeli $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem generowanym przez $\mathcal{A}$ oraz $F\colon X \to P(Y)$ jest funkcją dolną $\mathcal{S}$-mierzalną, to F ma selektor $\mathcal{S}$-mierzalny f.*

Motywacją do badań nad istnieniem selektorów mierzalnych były dla mnie wyniki zamieszczone w pracy [21]. Jednym z występujących tam założeń było założenie, że obraz danych funkcji F miał mieć moc mniejszą niż najmniejsza liczba mierzalna. W pracy [C5] udowodniłam, że twierdzenia pozostają prawdziwe bez tego założenia, przez co uzyskałam ogólniejsze wyniki. Kluczowym wynikiem, dla dwóch następnych twierdzeń zamieszczonych w tym podrozdziale jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.46 ([C5]) *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą doskonałą, a $\mathcal{C}$ pokryciem punktowo-skończonym złożonym ze zbiorów miary zero. Wtedy istnieje podrodzina $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ taka, że zbiór $\bigcup \mathcal{C}'$ nie należy do $\mathcal{S}$ i ma miarę wewnętrzną zero.*

W dowodach kolejnych twierdzeń korzystam z metod bazujących na dowodach z pracy [21] oraz dowodzie Twierdzenia 4.45.

Twierdzenie 4.47 ([C5]) *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią metryzowalną z zupełną miarą doskonałą, Y przestrzenią metryczną zupełną, a*

$$F\colon X \to Cl^+(Y),$$

funkcją półciągłą z dołu. Wtedy F ma selektor $\mathcal{S}$-mierzalny $f\colon X \to Y$.

Twierdzenie 4.48 ([C1]) *Niech $(X, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z zupełną miarą doskonałą, Y przestrzenią metryczną, a*

$$F\colon X \to K^+(Y)$$

funkcją dolną $\mathcal{S}$-mierzalną . Wtedy F ma selektor $\mathcal{S}$-mierzalny $f\colon X \to Y$.

Dowód (szkic). Dowód Twierdzenia 4.48 oparty jest na metodzie przedstawionej przez Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego w monografii [37, Theorem 1, str. 458].
Bez straty ogólności możemy założyć, że Y jest uzupełnieniem $\bigcup\{F(x)\colon x \in X\}$. Niech ρ będzie metryką na Y taką, że $diam(Y) < 1$. Będziemy definiować selektor jako granicę ciągu funkcji $f_n\colon X \to Y (n \in \omega)$ takich, że dla dowolnych $x \in X$ oraz $n \in \omega$

(1) f_n jest $\mathcal{S}$-mierzalna:

(2) $\rho(f_n(x), F(x)) < \frac{1}{2^n}$;

(3) $\rho(f_n(x), f_{n+1}(x)) < \frac{1}{2^{n+2}}$;

(4) f_0 jest funkcją stałą.

Indukcyjnie, ze względu na $n \in \omega$ konstruujemy $(n+1)$-krok indukcyjny. Niech

$$\mathcal{U}_{n+1} = \{U \subset Y\colon diam(U) < \frac{1}{2^{n+2}}\}$$

będzie lokalnie skończonym pokryciem przestrzeni Y. Ponieważ $F(x)$ jest zbiorem zwartym, więc

$$|\{U \in \mathcal{U}_{n+1}\colon F(x) \cap U \neq \emptyset\}| < \omega.$$

Uporządkujmy rodzinę

$$\mathcal{U}_{n+1} = \{U_\alpha^{n+1}\colon \alpha \in I_{n+1}\},$$

gdzie I_{n+1} jest pewnym zbiorem indeksów. Dla każdego $\alpha \in I_{n+1}$, niech

$$C_\alpha^{n+1} = \{x \in X\colon F(x) \cap U_\alpha^{n+1} \neq \emptyset\}$$

oraz

$$D_\alpha^{n+1} = \{x \in X\colon \rho(f_n(x), y) < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ dla pewnego } y \in U_\alpha^{n+1}\}.$$

Oczywiście,

$$\{C_\alpha^{n+1}\colon \alpha \in I_{n+1}\}$$

oraz

$$\{B_\alpha^{n+1}\colon \alpha \in I_{n+1}, B_\alpha^{n+1} = C_\alpha^{n+1} \cap D_\alpha^{n+1}\}$$

są punktowo-skończonymi pokryciami przestrzeni X. Ponadto, dla dowolnego $I'_{n+1} \subset I_{n+1}$ zbiór $\bigcup\{B_\alpha^{n+1}\colon \alpha < I'_{n+1}\} \in \mathcal{S}$. Na mocy Twierdzenia 4.46, istnieje przeliczalny zbiór $J'_{n+1} \subset I'_{n+1}$ taki, że dla dowolnych $\alpha \in J'_{n+1}$ mamy $\mu(B_\alpha^{n+1}) = 0$ oraz

$$\mu(\bigcup\{B_\alpha^{n+1}\colon \alpha \in I'_{n+1} \setminus J'_{n+1}\}) = 0.$$

Zdefiniujmy zbiory

$$A_\alpha^{n+1} = \begin{cases} B_\alpha^{n+1} \setminus (\bigcup\{B_\beta^{n+1}\colon \beta < \alpha, \beta \in I'_{n+1} \setminus J'_{n+1}\} \cup \\ \bigcup\{B_\gamma^{n+1}\colon \gamma \in J'_{n+1}\}) & \Leftrightarrow \alpha \in I'_{n+1} \setminus J'_{n+1} \\ \\ B_\alpha^{n+1} \setminus \bigcup\{B_\beta^{n+1}\colon \beta < \alpha, \beta \in I'_{n+1}\} & \Leftrightarrow \alpha \in J'_{n+1} \end{cases}$$

Stąd, $\{A_\alpha^{n+1} \colon \alpha \in I_{n+1}\}$ jest rozłącznym pokryciem $\mathcal{U}_{n+1}$ oraz

$$\bigcup\{A_\alpha^{n+1} \colon \alpha \in I'_{n+1}\} \in \mathcal{S},$$

dla dowolnego $I'_{n+1} \subset I_{n+1}$.

Definiujemy funkcję

$$f_{n+1}(x) = z_\alpha \Leftrightarrow x \in A_\alpha^{n+1} \text{ oraz } z_\alpha \in U_\alpha^{n+1}.$$

Oczywiście, f_{n+1} spełnia (1)-(4). Zatem, tak skonstruowany ciąg funkcji

$$(f_n \colon n \in \omega)$$

spełnia warunki (1)-(4). Ponadto dla dowolnego $x \in X$, jeżeli

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

to $f(x) \in F(x)$ oraz ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f. Na mocy Twierdzenia 4.45, selektor f jest $\mathcal{S}$-mierzalny. ■

4.4 Opis wkładu w prace współautorskie

Spośród 9-ciu prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowgo [M1] jestem samodzielnym autorem 7-miu, a pozostałych dwóch [C1, C2] jestem współautorem. Prace [C1, C2] były wynikiem wielu dyskusji prowadzonych przez wszystkich współautorów. Mój wkład w te prace był następujący: weryfikowałam i modyfikowałam poszczególne wersje twierdzeń i lematów oraz ich dowodów. Wprowadziłam zapis dowodów w terminologii drzew. Ponadto, napisałam wstęp do obydwu prac, dokonałam doboru literatury oraz dokonałam modyfikacji obu prac uwzględniających uwagi recenzentów. Mój wkład procentowy w pracę [C1] oceniam na 33,33%, a w pracę [C2] na 50%.

4.5 Podsumowanie i znaczenie wyników

Moje osiągnięcie naukowe przedstawione w monografii [M1] dotyczy badania istnienia zbiorów niemierzalnych rozpatrywanych na gruncie teorii miary, teorii mnogości i topologii ogólnej, co stanowi jedno z najważniejszych zagadnień we współczesnej matematyce i ma zastosowanie w analizie harmonicznej, teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, teorii prawdopodobieństwa, teorii układów dynamicznych i wielu innych działach matematyki.

Moje osiągnięcie naukowe mogę ogólnie scharakteryzować jako rozwiązanie problemu Kuratowskiego dotyczącego istnienia lub nieistnienia zbiorów niemierzalnych w strukturach, dla których zachodzi Lemat Fuzji (np. Twierdzenia 4.4

i 4.2) oraz zastosowania uzyskanych wyników do dowodzenia i uogólniania znanych twierdzeń (np. Uogólnienie Twierdzenia Louveau-Simpsona, [40], uogólnienie Twierdzenia Halpern-Läuchli, [27]) oraz do wykazania równoważności między rozwiązaniem problemu Kuratowskiego (tj. istnieniem lub nieistnieniem rozkładów Kuratowskiego), a istnieniem ideału precipitous (w konsekwencji istnieniem liczby mierzalnej) oraz Twierdzenia Gitika-Shelaha, [25]. Ponadto, rozpatrując pokrycia punktowo-skończone zamiast rozkładów uzyskałam kolejne wyniki, w tym uogólnienie twierdzenia o istnieniu selektorów mierzalnych.

Wyniki, które uzyskałam choć nie podają konkretnych konstrukcji zbiorów niemierzalnych, to pokazują ich istnienie i to niejednokrotnie wystarczy do udowodnienia twierdzeń znacznie ogólniejszych niż te znane w literaturze. Istnienie liczby mierzalnej, ideału precipitous czy istnienie izomorfizmów algebr ilorazowych, są jednymi z istotniejszych zagadnień w teorii mnogości. Zatem, wykazanie ich równoważności z istnieniem lub nieistnieniem rozkładu Kuratowskiego omawianych struktur wnosi istotny wkład w dyscyplinę matematyka.

Twierdzenie 4.48 o istnieniu selektora mierzalnego, którego szkic dowodu przedstawiłam w podrozdziale 4.3.16, jest pośrednio związane z istnieniem rozkładu Kuratowskiego. Twierdzenia o selektorach mierzalnych są jednymi z głównych twierdzeń w różnych działach matematyki (a także m.in. w ekonomii, biologii) i ma szerokie zastosowanie z uwagi na fakt jego związków z istotnym aksjomatem teorii mnogości - Aksjomatem Wyboru (AC). Aksjomat Wyboru, jak wiadomo, jest niezależny od powszechnie przyjmowanych aksjomatów Zermelo-Fraenkla (ZF).

Uzyskanie omawianych wyników było możliwe dzięki zastosowaniu twierdzeń i metod dowodzenia należących do trzech działów matematyki: teorii mnogości, topologii i teorii miary oraz wykorzystaniu różnych metod dowodzenia, zarówno kombinatorycznych (w części opartych o indukcję pozaskończoną) jak i zaawansowanych metod forcingowych (gdy inne metody nie były skuteczne) oraz konstrukcji topologicznych (np. suma prosta przestrzeni topologicznych). W pracy [C4] zastosowałam również metody oparte o teorię gier jako alternatywne metody dowodzenia twierdzeń, nieco upraszczające w ten sposób zapis dowodu kombinatorycznego.

Tematyka badań, które przedstawiam jako moje osiągnięcie naukowe, jest jednym z istotniejszych nurtów w matematyce, zwłaszcza w teorii mnogości i topologii (i dualnie, w teorii miary). Świadczą o tym regularnie ukazujące się prace dotyczące zbiorów niemierzalnych. Choć znanych jest niewiele konstrukcji zbiorów niemierzalnych, to samo udowodnienie ich istnienia ma istotny wpływ na kontynuację dalszych badań.

Moje wyniki wchodzące w skład monografii [M1] pochodzą z ostatnich kilku lat. Pierwsze ukazały się pod koniec 2019 roku (prace [C1, C2, C3]), kolejna w 2022 roku ([C4]), następna w 2023 roku ([C5]), a pozostałe są na ostatnim etapie recenzji w czasopismach matematycznych. Z uwagi na długi proces redakcyjny jak i wyniki, które nie zostały zamieszczone w żadnych z powyższych prac podjęłam decyzję o przedstawieniu tych wyników w monografii [M1].

Podsumowując, moje osiągnięcia naukowe wnoszą istotny wkład w rozwój badań nad zbiorami niemierzalnymi, jednym ze znaczących nurtów występujących w kilku działach matematyki. Pragnę podkreślić, że moje osiągnięcie w pełni rozwiązuje problem Kuratowskiego zarówno dla rozkładów w strukturach, w których zachodzi Lemat Fuzji, jak i dla ich pokryć punktowo-skończonych.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni lub instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej

5.1 Aktywność naukowa w trakcie zatrudnienia na Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

W latach 2008-2017 byłam zatrudniona na Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Szkoła Nauk Ścisłych (w dalszej częsci będę używać skrótu UKSW) na stanowisku adiunkta naukowo-dydaktycznego.

W tym okresie prowadziłam działalmość naukową w dyscyplinach: matematyka (głównie teoria mnogości i topologia) oraz dydaktyka matematyki.

Początkowo współpracowałam z dr hab. Marianem Turzańskim (moim promotorem rozprawy doktorskiej). Wspólne wyniki dotyczące związków twierdzeń typu-Ramseya i rodzin niezależnych opublikowaliśmy w pracy [S1].

Następnie, podjęłam współpracę z prof. dr hab. Ryszardem Frankiewiczem (z Instytutu Matematycznego Polskiej Akademii Nauk) oraz prof. dr hab. Bogdanem Węglorzem (z Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie). Od roku 2016 wraz z prof. Frankiewiczem i prof. Węglorzem współprowadziłam seminarium naukowe pt. "Kombinatoryka Nieskończona", którego tematyka dotyczyła rozważań nad istotnymi problemami z pogranicza teorii mnogości, topologii i teorii miary. Seminarium początkowo odbywało się w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk, a następnie od roku 2017 na Politechnice Wrocławskiej. Wyniki, które wspólnie uzyskaliśmy opublikowaliśmy w pracach [C1, C2].

W międzyczasie podejmowałam też samodzielne badania dotyczące rozważań wokół metody silnych ciągów, której to tematyce była poświęcona moja rozprawa doktorska. Efektem tych badań są publikacje [S2-S5], a także publikacja [Z2] dotycząca zastosowań metody silnych ciągów w wyborach społecznych.

W trakcie zatrudnienia na UKSW podjęłam dodatkowe zatrudnienie w liceum ogólnokształcącym. Konieczność zatrudnienia wynikała z charakteru kształcenia studentów na UKSW na kierunku Matematyka o specjalności nauczycielskiej, na którym m.in. prowadziłam zajęcia. W związku z tym poszerzyłam moje zainteresowania naukowe o dydaktykę matematyki, skupiając się głównie na procesie rozumowania i uogólniania, czyli dwóch najistotniejszych nurtach w tej tematyce. Uzyskane wyniki opublikowałam w pracach [D1-D15].

W okresie zatrudnienia na UKSW byłam kierownikiem dwóch projektów naukowych, finansowanych w ramach badań statutowych UKSW, dotyczących tematyki bezpośrednio związanej z matematyką (teorią mnogości i topologią) oraz dydaktyką matematyki. Uzyskane wyniki w ramach tych projektów opublikowałam w pracach [S2, S3] oraz [D5-D10].

Kilkakrotnie złożyłam też wnioski o grant finansowany z Narodowego Centrum Nauki, jednak nie uzyskałam finansowania. Wnioski te dotyczyły zarówno matematyki (teoria mnogości i topologia), jak i dydaktyki matematyki. Mimo braku finansowania kontynuowałam badania naukowe, a ich wyniki opublikowałam w późniejszym czasie.

5.2 Aktywność naukowa w trakcie zatrudnienia na Politechnice Wrocławskiej

W roku 2017 zmieniłam miejsce zatrudnienia na Politechnikę Wrocławską, Wydział Informatyki i Telekomunikacji (przed reorganizacją Wydział Elektroniki) (w dalszej częsci będę używać skrótu PWr), gdzie pracuję do chwili obecnej na stanowisku adiunkta badawczo-dydaktycznego.

W trakcie zatrudnienia na PWr kontynuowałam współprowadzenie seminarium naukowego pt. "Kombinatoryka Nieskończona" (wraz z prof. Frankiewiczem i prof. Węglorzem) rozpoczętego w roku 2016. Podczas tej kilkuletniej współpracy i współprowadzenia seminarium dopracowaliśmy wyniki powstałe od roku 2017 i opublikowaliśmy je w pracach [C1, C2] W tym czasie powstała też moja samodzielna praca [C3]. Następnie kontynuowałam samodzielne badania nad tematyką rozpoczętą w trakcie wspomnianego seminarium. Wyniki są zamieszczone w pracach [C4, C5] oraz [N1-N4]. Wyniki te zamieściłam też w monografii [M1].

W chwili obecnej kontynuuję badania naukowe, których tematyka związana jest z szeroko rozumianą teorią mnogości i topologią. Część tych wyników już opublikowałam w pracach [S6, S7, R1, R2, P2], a kolejne [R3, R4, P1] oraz [N1-N4] są na etapie recenzji w wiodących czasopismach z dyscypliny matematyka.

Ponadto, w okresie zatrudnienia na PWr opublikowałam współautorski artykuł [Z3] dotyczący zastosowań matematyki w naukach inżynieryjno-technicznych.

5.3 Pozostała aktywność naukowa

W latach 2004-2012, w trakcie dodatkowego zatrudnienia w Wyższej Szkole Bankowej w Poznaniu, moje zainteresowania naukowe poszerzyłam o tematykę związaną z zastosowaniami matematyki w naukach ekonomicznych, głównie matematyka finansowa.

W roku 2008 wraz z dr Eugeniuszm Mizerskim uzyskaliśmy kilka wyników, które opublikowaliśmy w pracy [Z1]. Następnie, podjęłam badania naukowe w celu połączenia moich wyników w teorii mnogości z tematyką wyborów społecznych. Uzyskane wyniki opublikowałam w roku 2016 w pracy [Z2].

W latach 2015 i 2017 odbyłam dwa staże w uczelniach zagranicznych: na Katolickim Uniwersytecie w Rużomberoku (Słowacja, 2015) oraz na Uniwersytecie w Walencji (Hiszpania, 2017). W trakcie tych staży wygłosiłam cykle wykładów dla studentów i doktorantów, a także podjęłam kroki w kierunku nawiązania kontaktów z matematykami pracującymi w tych uczelniach. Jednak dłuższa współpraca nie została nawiązana z uwagi na trudności w znalezieniu wspólnych tematów badań.

W roku 2017 odbyłam staż w Tbilisi (Gruzja) będąc zaproszona przez członków Gruzińskiej Akademii Nauk m.in. do wygłoszenia wykładu na konferencji naukowej: "XXXI International Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Insitute of Applied Mathematics of Ivane Javakhsvili Tbilisi State Univeristy". Nawiązałam kontakt z tamtejszymi matematykami. Liczne z nimi rozmowy zainspirowały mnie do dalszych badań nad podjętą już wcześniej tematyką zbiorów niemierzalnych.

5.4 Projekty badawcze i dydaktyczne

Byłam kierownikiem 2 projektów, wykonawcą w 4 projektach oraz zgłosiłam 4 projekty do Narodowego Centrum Nauki (NCN), na które nie uzyskałam finansowania.

1. Kierownik projektów pt.:

   a) "Silne ciągi w zbiorach częściowo uporządkowanych" (badania statutowe UKSW 2012) publikacje [S2, S3].

   b) "Rola kalkulatora graficznego w procesie uczenia się matematyki uczniów szkoły ponadgimnazjalnej" (badania statutowe UKSW 2013) publikacje [D5-D10].

2. Przygotowanie merytoryczne i zgłoszenie następujących wniosków o granty finansowane przez Narodowe Centrum Nauki (nie przyznano środków):

    a) Sonata bis 5, pt.: "Cechy myślenia matematycznego: odkrywanie regularności i uogólnianie" (2015).
    b) Sonata bis 6, pt.: "Proces odkrywania regularności i uogólniania matematycznego na różnych etapach edukacji szkolnej" (2016).
    c) Sonata bis 8, pt.: "Wokół teorii selektorów ze szczególnym uwzględnieniem przypadku nieośrodkowości" (2018).
    d) Opus 18, pt.: "Uogólnienia klasycznego twierdzenia Kuratowskiego i Rylla-Nardzewskiego o selektorach" (2019).

3. Wykonawca w projektach

    a) Projekt w ramach programu operacyjnego Kapitał Ludzki, realizowany w Wyższej Szkole Bankowej w Poznaniu dotyczący zajęć dla kandydatów na studia, (2009-2011).
    b) Projekt pt.: "Partnerzy w nauce" realizowany na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach, (2010-2012).
    c) Projekt pt.: "Nowe metody nauczania w matematyce" nr POKL 09.04.00-14-133/11 realizowany na Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie, (2012).
    d) Projekt pt.: "Cyberbezpieczeństwo dla gospodarki przyszłości" realizowany na Politechnice Wrocławskiej, (2021).

5.5 Recenzowanie artykułów naukowych

Jestem recenzentem w czasopismach naukowych z dyscypliny matematyka (teoria mnogości i topologia) oraz dydaktyka matematyki w tym Mathematical Reviews oraz Educational Research and Reviews. Do tej pory zrecenzowałam ponad 30 prac.

5.6 Udział w konferencjach

Swoje osiągnięcia naukowe na bieżąco prezentowałam na konferencjach naukowych w kraju i za granicą.

Uczestniczyłam w 15 międzynarodowych konferencjach poświęconych teorii mnogości i topologii, na 13 z nich zaprezentowałam swoje wyniki (w takich krajach jak: Czechy, Grecja, Serbia, Słowacja, Ukraina oraz Polska). Ponadto, wygłosiłam wykład na zaproszenie na konferencję "XXXI International Enlarged

Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Insitute of Applied Mathematics of Ivane Javakhsvili Tbilisi State Univeristy", (Gruzja).

Uczestniczyłam także w dwóch krajowych konferencjach poświęconych zastosowaniu matematyki w technice, informatyce i ekonomii wygłaszając referaty, a także w 11 konferencjach poświęconych dydaktyce matematyce (w tym 3 międzynarodowych), na których wygłosiłam referaty dotyczące bieżących wyników prowadzonych badań.

Brałam też udział w konferencjach szkoleniowych, m.in. "8th Young Set Theory Workshop" w Izraelu.

Poniżej przedstawiam wykaz ważniejszych konferencji dotyczących teorii mnogości i topologii, w których brałam udział (podaję dane wraz z tytułami wygłoszonych referatów):

1. Set-theoretic methods in topology and real functions theory, 9-13.09.2019, Kosice (Słowacja),
   referat pt.: "Non “complete” case of Louveau-Simpson theorem".

2. Logic Colloquium 2019, 11-16.08.2019, Praha (Czechy),
   referat pt.: "New results on partitioner-representable algebras".

3. International Conference on Topology and Its Applications, 7-11.07.2018, Nafpaktos (Grecja),
   referat pt.: "On Kuratowski partitions".

4. XXXI International Enlarged Sessions of the Seminar of Ilia Vekua Insitute of Applied Mathematics of Ivane Javakhsvili Tbilisi State Univeristy 18-22.2017, Tbilisi (Gruzja), na zaproszenie członków Gruzińskiej Akademii Nauk.
   wykład na zaproszenie pt: "On solutions of Kuratowski problem".

5. The international conference dedicated to 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, 27.09-1.10.2016, Lwów (Ukraina),
   referat pt.: "On Kuratowski partitions".

6. Novi Sad Conference in the Set Theory and General Topology, SETTOP 2016, 20-23.06.2016, Iriski venac, Fruska Gora (Serbia),
   referat pt.: "Strong sequences in Cichoń diagram".

7. Winter School in Abstract Analysis, section set theory and topology, 30.01-6.02.2016, Hejnice (Czechy),
   referat pt.: "κ-strong sequences and the existence of generalized independent families".

8. 8th Young Set Theory Workshop, October 25-30.10. 2015, Jerozolima (Izrael).
9. XXIX International Summer Conference on Real Functions Theory, 6-11.09. 2015, Niedzica (Polska),
referat pt.: "κ–strong sequences and generalized independent families".
10. Winter School in Abstract Analysis, section set theory and topology, 25.01-1.02.2014, Hejnice (Czechy),
referat pt.: "On some problems concerning strong sequences".
11. Workshop on Set Theory and its Applications to Topology And Real Analysis, 4-6.07.2013, Gdańsk (Polska),
referat pt.: "Special partial orderings".
12. Winter School in Abstract Analysis, section set theory and topology, 26.01-2.02.2013, Hejnice (Czechy),
referat pt.: "On existence of independent sets in partially ordered sets".
13. International Conference dedicated to 120-th anniversary of Stefan Banach, 17-21.09.2012, Lwów (Ukraina),
referat pt.: "Strong sequences and independent sets".
14. 11th Topological Symposium TOPOSYM 2011, 7-12.08.2011, Praga (Czechy),
referat pt.:"Strong sequences in partially ordered sets".
15. Second International Conference „Set theory, topology and Banach space”, 7-11.07.2008, Kielce (Polska),
referat pt.: "On equivalence of some combinatorial methods".

6 Opis pozostałej aktywności naukowej

Tematykę moich pozostałych osiągnięć można podzielić na trzy grupy dotyczące wyników z:

a) teorii mnogości i topologii,

b) zastosowań matematyki w naukach ekonomicznych, społecznych i inżynieryjno-technicznych,

c) dydaktyki matematyki.

Poniżej przedstawiam opis moich osiągnięć naukowych z podziałem na wyszczególnioną powyżej tematykę.

6.1 Osiągnięcia w teorii mnogości i topologii

Moje osiągnięcia naukowe w teorii mnogości i topologii można podzielić na trzy główne nurty. Pierwszy to badania wokół istnienia zbiorów niemierzalnych, co opisałam w Rozdziale 4 niniejszego autoreferatu, drugi to rozważania dotyczące istnienia silnych ciągów, a trzeci to badanie porządku Rudin-Frolik.

6.1.1 Silne ciągi

W tej tematyce opublikowałam następujące prace:

[S1] **J. Jureczko** M. Turzański, From a Ramsey-type theorem to independence, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 49 (2008), no. 2, 47–55.

[S2] **J. Jureczko**, On inequalities among some invariants, Mathematica Aeterna. 6 (2016), no. 1, 87–98.

[S3] **J. Jureczko**, Strong sequences and independent sets, Mathematica Aeterna. 6 (2016), no. 2, 141–152.

[S4] **J. Jureczko**, κ-strong sequences and the existence of generalized independent families, Open Math. 15 (2017), no. 1, 1277–1282.

[S5] **J. Jureczko**, Strong sequences and partition relations, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 16 (2017), 51–59.

[S6] **J. Jureczko**, Some remarks on strong sequences, Scientific Issues of Jan Długosz University in Częstochowa. Mathematics, XXIII (2018), 25–34.

[S7] **J. Jureczko**, On Banach and Kuratowski theorem, K-Lusin sets and strong sequences, Open Math. 16 (2018), no. 1, 724–729.

W pracy [S1] zajmowaliśmy się naturalnymi warunkami nałożonymi na zbiory częściowo uporządkowane i badaliśmy jakie mogą być tego konsekwencje. Poniżej przedstawiam główne wyniki zawarte w tej pracy.

Niech X będzie przestrzenią (topologiczną). Rodzinę zbiorów $\mathcal{S}$ nazywamy *binarną* (ang. binary family), jeżeli dla każdej skończonej podrodziny $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ takiej, że $\bigcap \mathcal{M} \neq \emptyset$ istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{M}$ takie, że $A \cap B = \emptyset$. Rodzinę $\mathcal{S}$ nazywamy *celularną* (ang. cellular family), gdy jej elementy są niepuste i parami rozłączne. Niech

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{S}| \colon \mathcal{S} \text{ jest rodziną celularną w} X\} + \omega.$$

Twierdzenie 6.1 **([S1])** *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną. Każda zwarta przestrzeń zerowymiarowa X może być odwzorowana na kostkę Cantora D^κ wtedy i tylko wtedy, gdy posiada binarną rodzinę $\mathcal{S}$ złożoną ze zbiorów domknięto-otwartych (gdzie $|\mathcal{S}| \geqslant \kappa > c(X)$) zamkniętą ze względu na dopełnienia i posiadającą własności:*

- *dla dowolnych $S_0, S_1, S_2 \in \mathcal{S}$, jeżeli $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ oraz $S_0 \cap S_2 = \emptyset$, to albo $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ albo $S \subset S_2$ albo $S_2 \subset S_1$,*
- *$|\{V \in \mathcal{S} \colon V \subset U\}| < \kappa$ dla każdego $U \in \mathcal{S}$.*

W pracach [S2, S3, S5, S6] przedstawiłam wyniki (prac rozpoczętych w rozprawie doktorskiej) nad tematyką silnych ciągów.

Metoda silnych ciągów została wprowadzona przez Jefimowa w roku 1965 w pracy [14], jako użyteczna metoda służąca do dowodzenia znanych twierdzeń w przestrzeniach diadycznych, tj. ciągłych obrazach kostki Cantora. Jefimow udowodnił między innymi, że w podbazie kostki Cantora nie istnieją silne ciągi. Naturalnym więc stało się pytanie, jakie konsekwencje miałoby istnienie silnych ciągów w innych przestrzeniach? Ta tematyka była podjęta w latach 90-tych ubiegłego wieku przez M. Turzańskiego (pomijam dalsze dane historyczne, które umieściłam w pracy [P2] oraz w mojej rozprawie doktorskiej).

W pracach poświęconych tematyce silnych ciągów wprowadziłam następującą definicję.

Niech (X, r) będzie zbiorem z relacją r i niech κ będzie liczbą kardynalną regularną. Zbiór $A \subset X$ nazywamy *κ-skierowanym* (ang. κ-directed set), jeżeli dla każdego podzbioru $B \subset A$ mocy mniejszej niż κ istnieje element $a \in A$ taki, że dla każdego elementu $b \in B$ zachodzi $(b, a) \in r$.

Definicja 6.1 *Ciąg $(S_\phi, H_\phi)_{\phi<\alpha}$, gdzie $S_\phi, H_\phi \subset X$ oraz $|S_\phi| < \kappa$ nazywamy, silnym ciągiem (ang. strong sequence), gdy:*

- *$S_\phi \cup H_\phi$ jest κ-skierowany,*
- *$S_\psi \cup H_\phi$ nie jest κ-skierowany, jeżeli $\psi > \phi$.*

W pracach [S2, S3] zajmowałam się silnymi ciągami w przypadku gdy $\kappa = \omega$. W pracy [S2] udowodniłam następujące twierdzenie, które nazwałam twierdzeniem o silnych ciągach.

Twierdzenie 6.2 **([S2])** *Niech κ i λ będą liczbami kardynalnymi. Jeżeli (X, r) jest zbiorem z relacją r i istnieje silny ciąg $(S_\alpha, H_\alpha)_{\alpha<(\kappa^\lambda)^+}$ taki, że $|H_\alpha| \leqslant \kappa^\lambda$, dla każdego $\alpha < (\kappa^\lambda)^+$, to istnieje silny ciąg $(T_\alpha, H_\alpha)_{\alpha<(\lambda)^+}$ taki, że $|T_\alpha| < \omega$, dla każdego $\alpha < (\lambda)^+$.*

W tej samej pracy wprowadziłam następujący niezmiennik kardynalny

$$\hat{s}(X) = \sup\{\kappa\colon \text{istnieje silny ciąg w } X \text{ długości } \kappa\}.$$

Liczbę kardynalną κ nazywamy *kalibrem* w X (ang. caliber), jeżeli jest nieskończona oraz każdy zbiór $A \in [X]^{\kappa}$ ma łańcuch długości κ, gdzie przez łańcuch rozumiemy zbiór, w którym dowolne dwa elementy tego zbioru są ze sobą porównywalne w sensie relacji r.

W pracy [S2] udowodniłam następujące twierdzenia.

Twierdzenie 6.3 ([S2]) *Niech (X, r) będzie zbiorem z relacją r, a κ będzie liczbą kardynalną regularną. Wtedy $\kappa > \hat{s}(X)$ jest kalibrem w X.*

Twierdzenie 6.4 ([S2]) *Niech (X, r) będzie zbiorem z relacją r, a*

$$\kappa = \min\{|M|\colon M \textit{ jest gęsty w } X\}$$

będzie kalibrem w X. Wtedy X zawiera nieograniczony ciąg długości κ.

Ponadto, w pracy [S2] przedstawiłam pewne nierówności pomiędzy wprowadzonym przeze mnie niezmiennikiem kardynalnym $\hat{s}(X)$, a znanymi w literaturze niezmiennikami kardynalnymi, tj. $sat(X) \leqslant \hat{s}(X)$, gdzie symbol $sat(X)$ oznacza saturowalność X (ang. saturability of X) oraz $c(X) \leqslant \hat{s}(X)$, gdzie $c(X)$ oznacza celularność X (ang. cellularity of X). Wykazałam również, że przy pewnych założeniach te liczby kardynalne nie mogą być równe.

W pracy [S3] udowodniłam z kolei, że $\hat{s}(X) < i(X)$, gdzie $i(X)$ jest niezmiennikiem kardynalnym związanym z rodziną niezależną (ang. independent family) definiowanym jako

$$i(X) = \sup\{|A|\colon A \text{ jest rodziną niezależną w } X\}.$$

W pracy [S4] zajmowałam się uogólnieniem twierdzenia o silnych ciągach oraz konsekwencjami z niego wynikającymi.

Niech β oraz η będą liczbami kardynalnymi. Symbolem $\beta \ll \eta$ oznaczamy, że η jest *β-silnie nieosiągalna* (ang. β-strongly inacceessible) tzn. $\beta < \eta$ oraz $\alpha^{\lambda} < \eta$, jeżeli tylko $\alpha < \beta$ oraz $\lambda < \eta$.

Twierdzenie 6.5 ([S4]) *Niech β, μ, η będą liczbami kardynalnymi takimi, że $\omega \leqslant \beta \ll \eta, \mu < \beta$, a także β, η będą liczbami regularnymi. Jeżeli X jest zbiorem mocy η i istnieje silny ciąg $(S_\alpha, H_\alpha)_{\alpha<\eta}$ taki, że $|H_\alpha| \leqslant 2^{\mu}$ dla każdego $\alpha < \eta$, to istnieje silny ciąg $(T_\alpha, H_\alpha)_{\alpha<\beta}$ taki, że $|T_\alpha| < \kappa$ dla każdego $\alpha < \beta$ i $\kappa < \eta$.*

Jako wniosek z powyższego twierdzenia uzyskałam następujący wynik, czasami nazywamy Twierdzeniem typu Ramseya.

Wniosek 6.1 ([S4]) *Niech β, μ, η będą liczbami kardynalnymi takimi, że $\omega \leqslant \beta \ll \eta, \mu < \beta$ oraz β, η będą liczbami regularnymi. Niech X będzie zbiorem mocy η. Wtedy albo X zawiera κ-skierowany podzbiór mocy η albo w X istnieje zbiór mocy β złożony z elementów parami nieporównywalnych.*

W pracy [29] zostało wprowadzone pojęcie uogólnionej rodziny niezależnej (ang. generalized independent family). Z uwagi na dość skomplikowaną jej definicję jak i fakt, że to pojęcie jest w powyższym opisie tematem pobocznym, pomijam jej cytowanie. W pracy [S2] udowodniłam, że przy pewnych założeniach taka rodzina istnieje (w dowodzie wykorzystałam wynik z pracy [S4] oraz, że zachodzi nierówność $\hat{s}(X) \leqslant i(\kappa, 1)$, gdzie drugi niezmiennik kardynalny jest związany właśnie z uogólnioną rodziną niezależną).

Z kolei w pracy [S4] pokazałam, że Twierdzenie 6.2 można uogólnić. Wynikiem tego jest Twierdzenie 6.5, które jest równoważne twierdzeniu znanemu w literaturze jako (uogólnione) Twierdzenie Erdösa-Rado. Tę równoważność można łatwo wykazać w oparciu o metody dowodzenia użyte w pracy [S5].

Twierdzenie 6.6 ([11]) *Niech β, μ, η będą liczbami kardynalnymi takimi, że $\omega \leqslant \beta \ll \eta, \mu < \beta$ oraz β, η będą liczbami regularnymi oraz X będzie zbiorem mocy $\eta > \kappa$. Wtedy*

$$(\eta) \to (\beta)^2_\mu,$$

tzn. jeżeli $[\eta]^2 = \bigcup_{i \in \eta} P_i$, to istnieją $A \subset \eta$ oraz $i < \mu$ takie, że $|A| = \beta$ oraz $[A]^2 \subset P_i$, gdzie $P_i \neq P_j$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie 6.5 zastosowałam przy dowodzeniu pewnych nierówności pomiędzy znanymi niezmiennikami kardynalnymi charakteryzującymi przestrzeń topologiczną regularną. Ponadto, w pracy [S5] udowodniłam, że Twierdzenie 6.5 jest też prawdziwe, gdy założymy, że β jest liczbą singularną.

Głównym wynikiem zamieszczonym w pracy [S6] jest Diagram Cichonia uzupełniony przez zależności między poszczególnymi niezmiennikami kardynalnymi i niezmiennikiem związanym z silnymi ciągami. Symbol $\alpha \to \beta$ oznacza $\alpha \leqslant \beta$, a $\mathfrak{a}_e$ minimalną moc maksymalnej rodziny prawie rozłącznej (ang. maximal almost disjoint family (skr. MAD)) w ω^ω. Na Wykresie 1 przedstawiam oryginalny diagram Cichonia, a na Wykresie 2 diagram uzupełniony o wyniki z pracy [S6].

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\aleph_0 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Wykres 1: Oryginalny diagram Cichonia.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{non}(\mathcal{M}) \arrow[rrr] \arrow[dr] & & & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & 2^{\aleph_0} \\
 & & \mathfrak{a}_e \arrow[r] & \hat{\mathfrak{s}} \arrow[urr] & & \\
 & \mathfrak{b} \arrow[uu] \arrow[rrr] & & & \mathfrak{d} \arrow[uu] & \\
\aleph_0 \arrow[r] & \mathrm{add}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[rrr] & & & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) \arrow[u] \arrow[uul] &
\end{tikzcd}
$$

Wykres 2: Diagram Cichonia wzbogacony o wyniki z pracy [S6].

W pracy [5] autorzy opublikowali kilka równoważnych wersji Twierdzenia Banacha i Kuratowskiego z roku 1929 pochodzącego z pracy [4].

Twierdzenie 6.7 ([4]) *Zakładając Hipotezę Continuum (CH), istnieje nieskończona macierz* $\{A^i_k \subseteq [0,1] \colon i,k \in \omega\}$ *taka, że:*

- *dla każdego* $i \in \omega$, $[0,1] = \bigcup_{k\in\omega} A^i_k$,
- *dla każdego* $i \in \omega$, *jeżeli* $k \neq k'$ *to* $A^i_k \cap A^i_{k'} = \emptyset$,
- *dla każdego ciągu* $k_0, k_1, ..., k_i, ...$ *elementów ze zbioru* ω *zbiór*

$$\bigcap_{i\in\omega} (A^i_0 \cup A^i_1 \cup ... \cup A^i_{k_i})$$

  jest co najwyżej przeliczalny.

Macierz występująca w Twierdzeniu 6.7 jest nazywana BK*-macierzą* (ang. BK-matrix). W pracy [5] pokazano, że istnienie BK-macierzy jest równoważne istnieniu zbioru K-Łuzina mocy continuum. W pracy [S7] uogólniłam to pojęcie, dla uogólnionego zbioru K-Łuzina wprowadzając następujące definicje.

Niech $\kappa \geqslant \omega$ będzie liczbą regularną. W zbiorze ${}^{\kappa}\kappa$ rozważmy relację pomiędzy jej elementami: jeżeli $f, g \in {}^{\kappa}\kappa$ to

$$g \preceq f \Leftrightarrow |\{\alpha \in \kappa \colon g(\alpha) > f(\alpha)\}| < \kappa.$$

Zbiór $K \subseteq {}^\kappa\kappa$ nazywamy *domkniętym* (ang. closed set), jeżeli dla dowolnych $f \in K$ i dla dowolnych $g \in {}^\kappa\kappa$ warunek $f \preceq g$ pociąga $g \in K$. Ponadto, domknięty zbiór $K \subseteq {}^\kappa\kappa$ nazywamy *κ-zwartym* (ang. κ-compact set), jeżeli istnieje $f \in {}^\kappa\kappa$ taka, że $K \subseteq \{g \in {}^\kappa\kappa \colon g \preceq f\}$.

Zbiór X mocy 2^κ nazywamy *uogólnionym zbiorem K-Łuzina* (ang. generalized K-Lusin set), jeżeli $|X \cap K| < 2^\kappa$, dla każdego κ-zwartego zbioru $K \subseteq {}^\kappa\kappa$.

W pracy [S7] wykazałam, między innymi, że istnienie uogólnionego zbioru K-Łuzina mocy κ^+ jest równoważne istnieniu uogólnionego silnego ciągu tej samej mocy.

6.1.2 Produkt silnych ciągów

Opublikowałam jedną pracę dotyczącą produktu silnych ciągów, a druga jest w procesie recenzji.

[P1] **J. Jureczko**, On equivalences of polarized partition relations, https://arxiv.org/pdf/2305.02417.pdf.

[P2] **J. Jureczko**, Some remarks on polarized partition relations Bull. Iranian Math. Soc. 49 (2023), no. 3, Paper No. 38, 11 pp.

W pracy [P1] zdefiniowałam skończony produkt silnych ciągów. Warto dodać, że definicja ta może być uogólniona również dla produktu nieskończonego, ale ze szczególną uwagą jaka jest wymagana przy operacjach na nieskończonych produktach.

Niech $n < \omega$. Dla dowolnego $k \in \omega$ takiego, że $1 \leqslant k \leqslant n$, niech (X_k, r_k) będą zbiorami z relacjami r_k, α oraz $\kappa_k \geqslant \omega$ będą liczbami kardynalnymi, a ponadto $|X_k| \geqslant \kappa_k$. Niech
$$X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$
oraz $\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot ... \cdot \kappa_n$.

Ciągi $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ oraz $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in X$ *mają ograniczenie* (ang. have a bound), jeżeli istnieje ciąg $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ taki, że $(a_k, c_k) \in r_k$ oraz $(b_k, c_k) \in r_k$, dla każdego $1 \leqslant k \leqslant n$.

Zbiór $A_k \subseteq X_k$ nazywamy *κ_k-skierowanym* (ang. κ-directed set), jeżeli każdy podzbiór zbioru A_k mocy mniejszej niż κ_k ma ograniczenie, $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Zbiór $A \subseteq X$ nazywamy *κ-skierowanym*, jeżeli każdy podzbiór zbioru A mocy mniejszej niż κ ma ograniczenie.

W pracach [P1, P2] wprowadziłam następujące definicje.

Ciąg $(H^k_\xi)_{\xi<\alpha}$ podzbiorów zbioru X_k nazywamy *κ_k-silnym ciągiem* (ang. κ_k-strong sequence), jeżeli:

(1) H^k_ξ jest κ_k-skierowany dla dowolnych $\xi < \alpha$,

(2) $H^k_\xi \cup H^k_\psi$ nie jest κ_k-skierowany, jeżeli $\xi < \psi < \alpha$,
tzn. istnieje $S^k_\psi \in [H^k_\psi]^{<\kappa_k}$ taki, że dla każdego $\xi < \psi$ zbiór $H^k_\xi \cup S^k_\psi$ nie jest κ_k-skierowany.

Zbiór S^k_ψ z punktu (2) powyższej definicji nazywamy (k, ξ, ψ)-*niszczycielem* (ang. (k, ξ, ψ)-destroyer).

Niech $H_\xi = H^1_\xi \times H^2_\xi \times ... \times H^n_\xi$ dla każdego $\xi < \alpha$. Ciąg $(H_\xi)_{\xi<\alpha}$ podzbiorów zbioru X nazywamy *produktem κ-silnych ciągów* (ang. product of κ-strong sequences), jeżeli:

- H_ξ is κ-skierowany dla wszystkich $\xi < \alpha$,
- $H_\xi \cup H_\psi$ nie jest κ-skierowany zawsze, gdy $\xi < \psi < \alpha$.

Poniższe twierdzenie udowodnione w pracy [P2] jest uogólnieniem Twierdzenie 6.5 na produkt κ-silnych ciągów.

Twierdzenie 6.8 ([P1]) *Niech $n < \omega$. Dla dowolnego $k \in \omega$ takiego, że $1 \leqslant k \leqslant n$, niech $\beta_k, \eta_k, \kappa_k, \mu_k$ będą liczbami kardynalnymi takimi, że:*

- $\omega \leqslant \beta_k \ll \eta_k$,
- $\mu_k < \beta_k$,
- $\omega \leqslant \kappa_k \leqslant 2^{\mu_k}$,
- β_k, η_k *są liczbami regularnymi.*

Niech $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_n$, $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot ... \cdot \eta_n$, $\kappa = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot ... \cdot \kappa_n$ oraz $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ będzie zbiorem takim, że $|X_k| = \eta_k \geqslant \kappa_k$. Jeżeli istnieje produkt κ-silnych ciągów

$$\{H_\alpha \subseteq X : \alpha < \eta\},$$

gdzie $H_\alpha = H^1_\alpha \times H^2_\alpha \times ... \times H^n_\alpha$ oraz $|H^k_\alpha| \leqslant 2^{\mu_k}$ dla dowolnych $\alpha < \eta$, to istnieje produkt κ-silnych ciągów

$$\{T_\alpha : \alpha < \beta\}$$

taki, że $|T^k_\alpha| < \kappa_k$, dla dowolnych liczb kardynalnych $\alpha < \beta$.

W pracy [P1] udowodniłam, że Twierdzenie 6.8 jest równoważne Twierdzeniu 6.9. Twierdzenia tego typu jak Twierdzenie 6.9 wywodzą się z twierdzeń pochodzących z pracy Ramseya [43] oraz pracy Erdósa-Rado [19] i są nazywane w literaturze jako spolaryzowane relacje podziałowe, Ich różne wersje i uogólnienia są rozważane co najmniej od lat 80-tych ubiegłego stulecia. W pracy [P1] dość obszernie przedstawiłam rys historyczny i ważniejsze wyniki oraz wykazałam, że Twierdzenie 6.8 jest równoważne następującemu twierdzeniu.

Twierdzenie 6.9 **([P1])** *Niech $n < \omega$. Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ niech $\beta_k, \eta_k, \kappa_k, \mu_k$ będą liczbami kardynalnymi spełniającymi założenia Twierdzenia 6.8. Niech ponadto dany jest zbiór $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$ taki, że $|X_k| = \eta_k \geqslant \kappa_k$. Wtedy,*

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ ... \\ \eta_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ ... \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\mu},$$

tzn. każda funkcja $c\colon X \rightarrow \mu$ jest stała na pewnym zbiorze A mocy β, tzn. istnieje zbiór $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ z warunkami $A_k \subseteq X_k$ oraz $|A_k| = \beta_k$ taki, że $c^{-1}(\lambda) = A$, dla pewnego $\lambda < \mu$.

W pracy [P2] kontynuowałam badania nad produktami silnych ciągów, których wynikiem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.10 **([P2])** *Niech $n < \omega$. Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ let $\beta_k, \kappa_k, \mu_k, \eta_k$ będą liczbami kardynalnymi spełniającymi założenia Twierdzenia 6.8. Wtedy albo X zawiera κ-skierowany podzbiór mocy η albo X zawiera podzbiór mocy β składający się z elementów parami rozłącznych.*

Następnie, korzystając z tego twierdzenia uzyskałam następujący wniosek.

Wniosek 6.2 **([P2])** *Niech $n < \omega$. Dla $1 \leqslant k \leqslant n$ let $\beta_k, \kappa_k, \mu_k, \eta_k$ będą liczbami kardynalnymi spełniającymi założenia Twierdzenia 6.8. Wtedy,*

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ ... \\ \eta_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta_1 & \beta_1 \\ \eta_2 & \beta_2 \\ ... & ... \\ \eta_n & \beta_n \end{pmatrix},$$

tzn. dla każdego zbioru A_k mocy η_k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ i dla każdej funkcji kolorującej

$$c\colon A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \rightarrow 2$$

albo istnieją zbiory $B_k \subseteq A_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ mocy η_k takie, że

$$c|(B_1 \times B_2 \times ... \times B_n) = \{0\}$$

albo istnieją zbiory $C_k \subseteq A_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ mocy β_k takie, że

$$c|(C_1 \times C_2 \times ... \times C_n) = \{1\}.$$

6.1.3 Porządek Rudin-Frolik

Opublikowałam 2 prace dotyczące porządku Rudin-Frolik, a 2 kolejne są w procesie recenzji.

[R1] **J. Jureczko**, Ultrafilters without immediate predecessors in Rudin-Frolik order for regulars. Results Math. 77 (2022), no. 6, Paper No. 230, 11 pp.

[R2] **J. Jureczko**, A note on special subsets in Rudin-Frolik order for regulars, Math. Slovaca. 73 (2023) no. 4, 825–834.

[R3] **J. Jureczko**, Chains in Rudin-Frolik order for regulars. https://arxiv.org/pdf/2304.00097.pdf

[R4] **J. Jureczko**, Decreasing chains in Rudin-Frolik order for regulars. https://arxiv.org/pdf/2304.01398.pdf

Porządek Rudin-Frolik został zdefiniowany w pracy [24] oraz zastosowany do udowodnienia, że przestrzeń $\beta\omega \setminus \omega$ nie jest przestrzenią jednorodną. Rudin, która prawie sformułowała ten porządek w pracy [44], jako pierwsza opisała zależność między filtrami w tej przestrzeni. Booth w pracy [7] wykazał, że ten porządek jest porządkiem częściowym i nie jest to porządek dobrze-ufundowany (ang. well-founded). W latach 1981-1990 Butkovičová opublikowała szereg prac, w których zawarła wyniki dotyczące m.in. długości łańcuchów, mocy zbiorów elementów nieporównywalnych w przestrzeni $\beta\omega \setminus \omega$ w sensie porządku Rudin-Frolik (pełny przegląd prac Butkovičovéj zamieszczam w pracy [R1]).

Wszystkie dotychczasowe wyniki dotyczące porządku Rudin-Frolik były rozważane w uzwarceniu Čech-Stone'a $\beta\omega$. Naturalnym zatem wydaje się pytanie, czy można te rozważania rozszerzyć dla przestrzeni $\beta\kappa$, gdzie κ jest dowolną liczbą kardynalną, a $\beta\kappa$ oznacza uzwarcenie Čech-Stone'a, gdzie κ jest z topologią dyskretną. Zatem $\beta\kappa$ jest przestrzenią ultrafiltrów na κ, a $\beta\kappa \setminus \kappa$ jest przestrzenią ultrafiltrów na κ nie będących ultrafiltrami głównymi. Okazuje się, że jest to możliwe przy dodatkowych założeniach, co wynika z użycia bardziej zaawansowanych metod niż to miało miejsce w pracach wcześniejszych poświęconych tematyce porządku Rudin-Frolik, m.in. w pracach Butkovičovéj.

W pracach [R1 - R4] rozważałam porządek Rudin-Frolik właśnie w przestrzeni $\beta\kappa$, gdy κ jest liczbą kardynalną regularną. Założenie regularności wynikało z zastosowania metody użytej w pracy [3], która umożliwia przedłużenie indukcji matematycznej do 2^κ jedynie dla liczby regularnej. Przypomnijmy definicję porządku Rudin-Frolik.

Zbiór $\{\mathcal{F}_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ filtrów na κ nazywamy *κ-dyskretnym* (ang. κ-discrete set), jeżeli istnieje pokrycie $\{A_\alpha \colon \alpha < \kappa\}$ zbioru κ zbiorami rozłącznymi takie, że $A_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha$, dla każdego $\alpha < \kappa$.

Definicja 6.2 *Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \beta\kappa \setminus \kappa$ będą ultrafiltrami. Porządek Rudin-Frolík definiujemy jako*

$$\mathcal{F} \leqslant_{RF} \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathcal{G} = \Sigma(X, \mathcal{F}),$$

dla pewnego zbioru κ-dyskretnego $X = \{\mathcal{F}_\alpha \colon \alpha < \kappa\} \subseteq \beta\kappa$, gdzie

$$\Sigma(X, \mathcal{F}) = \{A \subseteq \kappa \colon \{\alpha < \kappa \colon A \in \mathcal{F}_\alpha\} \in \mathcal{F}\}.$$

W pracy [R1] skonstruowałam ultrafiltry bez bezpośredniego poprzednika. Mój wynik rozwiązuje problem postawiony przez P. Simona ponad 40 lat temu dla $\beta\omega \setminus \omega$. Ja podałam rozwiązanie w uogólnionej postaci, czyli dla $\beta\kappa \setminus \kappa$, gdy κ jest liczbą kardynalną regularną. Wynik zawarłam w Twierdzenie 6.11.

Funkcję $\hat{\varphi} \colon [\kappa^+]^{<\omega} \to [\kappa]^{<\omega}$ nazywamy *κ-kurczącą* (ang. κ-shrinking function), jeżeli

- $p \subseteq q$ implikuje $\hat{\varphi}(p) \subseteq \hat{\varphi}(q)$, dla dowolnych $p, q \in [\kappa^+]^{<\omega}$,
- $\hat{\varphi}(0) = 0$.

Twierdzenie 6.11 ([R1]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną oraz $\hat{\varphi}$ funkcją κ-kurczącą. Wtedy istnieje ultrafiltr $\mathcal{G} \in \beta\kappa \setminus \kappa$ w porządku Rudin-Frolik, który nie jest minimalny i nie ma bezpośrednich poprzedników w $\beta\kappa \setminus \kappa$.*

W pracy [R2] udowodniłam także twierdzenie dotyczące istnienia zbioru ultrafiltrów nie mającego infimum.

Twierdzenie 6.12 ([R2]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną oraz $\hat{\varphi}$ funkcją κ-kurczącą. Wtedy istnieje zbiór $A \subseteq \beta\kappa \setminus \kappa$ ultrafiltrów w porządku Rudin-Frolik, taki, że:*

(i) $|A| = 2^{2^\kappa}$,

(ii) $\exists_{\mathcal{F}} \forall_{\mathcal{G} \in A} \mathcal{F} < \mathcal{G}$,

(iii) $\forall_{S \subset A} |S| > 1 \inf(S)$ *nie istnieje.*

Ponadto, w pracy [R3] pokazałam następujący wynik dotyczący istnienia łańcuchów długości $(2^\kappa)^+$.

Twierdzenie 6.13 ([R3]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną oraz $\hat{\varphi}$ funkcją κ-kurczącą. Wtedy istnieje łańcuch porządkowo izomorficzny z $(2^\kappa)^+$ w porządku Rudn-Frolik ultrafiltrów w $\beta\kappa$.*

Z kolei w pracy [R4] udowodniłam poniższe twierdzenie o istnieniu ściśle malejącego łańcucha bez dolnego ograniczenia.

Twierdzenie 6.14 ([R4]) *Niech κ będzie liczbą kardynalną regularną oraz $\hat{\varphi}$ funkcją κ-kurczącą. Dla każdej liczby kardynalnej μ takiej, że $\kappa \leqslant \mu \leqslant 2^\kappa$ istnieje ściśle malejący łańcuch $\{\mathcal{G}_\beta \colon \beta < \mu\}$ bez dolnego ograniczenia w porządku Rudin-Frolik.*

6.2 Osiągnięcia z zakresu zastosowań matematyki w naukach ekonomicznych, społecznych i inżynieryjno-technicznych

Opublikowałam 1 pracę samodzielną i 2 współautorskie poświęcone tematyce zastosowań matematyki w naukach ekonomicznych, społecznych i inżynieryjno-technicznych.

[Z1] **J. Jureczko**, E. Mizerski, „Wycena opcji walutowych w Polsce metodą Garmana-Kohlhagena ", W:„Matematyczne aspekty ekonomii: ryzyko, reasekuracja, równowaga" UKSW W-wa 2008 - materiały pokonferencyjne, 37–48.

[Z2] **J. Jureczko**, Strong sequences and their consequences in social choice, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics, 6 (2016), no. 1, 49–58.

[Z3] M. Andrzejewska, **J. Jureczko** M. Wodecki, "O nauczaniu matematyki w procesie kształcenia współczesnego inżyniera". W: Inżynieria zarządzania : cyfryzacja produkcji. Aktualności badawcze 2 / red. nauk. Ryszard Knosala. Warszawa : Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, cop. 2020, 895-905.

Współautorska praca [Z1] dotyczy wyceny opcji walutowych na rynku polskim. W 1973 Black i Scholes stworzyli model wyceny takich opcji oparty głównie na ryzyku. Jej autorzy wraz z Mertonem otrzymali Nagrodę Nobla z ekonomii w roku 1997. Model ten doczekał się wielu modyfikacji, a jedną z nich jest model Garmana-Kohlhagena, opublikowany w roku 1983 i jest jednym z najczęściej stosowanych w praktyce metod wyceny opcji walutowych. Celem pracy [Z1] było sprawdzenie siły zależności między rzeczywistymi cenami opcji walutowych podawanymi przez serwisy informacyjne, a ceną teoretyczną obliczoną za pomocą wzoru Garmana-Kohlhagena. W pracy przedstawiliśmy analizę danych pozyskanych z serwisów informacyjnych dotyczących ceny kursu EUR/PLN i USD/PLN. W wyniku przeprowadzonej analizy zauważyliśmy, że cena teoretyczna opcji jest wyższa niż cena obserwowana. Oszacowanie błędów prognozy wykazało, że zwłaszcza jest to widoczne dla opcji krótkoterminowej.

Druga z prac, [Z2], dotyczy zastosowań metody silnych ciągów w teorii wyborów społecznych. Jednym z najbardziej znanych twierdzeń w tej tematyce jest Twierdzenie Arrowa z roku 1951, z którego wynika, że po przyjęciu pewnych założeń co do oczekiwanej racjonalności decyzji grupowych, skonstruowanie spełniającej te założenia metody podejmowania grupowych decyzji jest niemożliwe. Od czasu opublikowania tego twierdzenia powstał szereg jego modyfikacji dotyczących skończonych jak i nieskończonych zbiorów wyborców, przy czym nieskończone zbiory traktowane są tutaj jako antycypacje dla przyszłego zachowania wyborców. W pracy [Z2] udowodniłam twierdzenie, na podstawie którego przy określonych założeniach uzyskujemy alternatywę: albo istnieje duży zbiór decydentów albo istnieje mały zbiór wyborców, w którym każdy ma prawo veta.

Trzecia praca, [Z3], jest poświęcona analizie treści programowych przedmiotów matematycznych na kierunkach inżynieryjno-technicznych Wydziału Elektroniki Politechniki Wrocławskiej (obecnie Wydziału Informatyki i Telekomunikacji). W związku ze zmieniającym się rynkiem pracy programy studiów podlegają ciągłym modyfikacjom. Nie tylko nauczyciele akademiccy, rynek pracy, ale także studenci powinni mieć wpływ na takie modyfikacje. Głównym celem tej pracy była analiza anonimowym ankiet przeprowadzonych wśród studentów w/w wydziału pod kątem przyszłych zmian w programach studiów. Zmiany te częściowo zostały juz wprowadzone.

6.3 Osiągnięcia z zakresu dydaktyki matematyki

Opublikowałam 15 prac samodzielnych, których tematyka dotyczy dydaktyki matematyki.

[D1] **J. Jureczko**, Miejsce matematyki w programach: Matury Międzynarodowej i nowej matury polskiej cz 1. Nauczyciele i Matematyka + Technologia Informacyjna, 82 (2012), 26–30.

[D2] **J. Jureczko**, Miejsce matematyki w programach: Matury Międzynarodowej i nowej matury polskiej cz 2. Nauczyciele i Matematyka + Technologia Informacyjna, 83 (2012), 21–26.

[D3] **J. Jureczko**, Projekt edukacyjny w matematyce w monografii: Nowe metody nauczania w matematyce, red. Joanna Kandzia, W-wa 2012, 225–246.

[D4] **J. Jureczko**, Metody aktywizujące w monografii: Nowe metody nauczania w matematyce, red. Joanna Kandzia, W-wa 2012, 247–262.

[D5] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems concerning calculus, Acta Mathematica, 16 (2013), 93–98.

[D6] **J. Jureczko**, Proces uogólniania u uczniów w wieku 17-19 lat na podstawie zadań opartych o szablony wizualne, W: Współczesne Problemy Nauczania Matematyki red. H Kąkol, Bielsko-Biała, 2014, 203–231.

[D7] **J. Jureczko**, The role of The Graphic Display Calculator in forming conjectures on the basis of a special kind of systems of linear equations, Acta Mathematica, 17 (2014), 69–74.

[D8] **J. Jureczko**, The use of graphic display calculator and computer software in mathematical modeling W: Comunication in the mathematical classroom ed. M. Pytlak, 2014, 134–144.

[D9] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems with polynomials with complex numbers, Scientific Issues Jan Długosz University in Częstochowa, Mathematics XIX (2014), 83–93.

[D10] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems concerning differentiation, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th series: Didactica Mathematicae 36 (2014), 5–31.

[D11] **J. Jureczko**, Rola kalkulatora graficznego w uczeniu się matematyki w: Współczesne problemy nauczania matematyki, red. H. Kąkol, 2015, 211–240.

[D12] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems concerning limits of sequences and functions, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th series: Didactica Mathematicae 37 (2015), 5–24.

[D13] **J. Jureczko**, Spatial modeling as motivation for studying mathematics, W: Inquiry based mathematical education, Editirs B. Maj-Tatsis, M. Pytlak, E. Swoboda, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2016, 245–254.

[D14] **J. Jureczko**, A task about a cube: or, on generalization in 3D, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th series: Didactica Mathematicae, 38 (2016), 93–112.

[D15] **J. Jureczko**, The strategies of using a special kind of number patterns in different stages of education, Educational Research and Reviews, 12 (2017), 643–652.

Pierwsze dwie prace [D1, D2] dotyczą analizy programu nauczania matematyki w programie matury międzynarowej, która stanowi alternatywny system nauczania w szkołach średnich ale wciąż jest niezbyt popularna w Polsce.

Prace [D3, D4] powstały na bazie udziału w projekcie dotyczącym nowych metod nauczania w matematyce (kierowanym do czynnych zawodowo nauczycieli), czyli projekt edukacyjny i metody aktywizujące proces uczenia się matematyki. Prace miały na celu możliwą zmianę metod nauczania. Zawierają one między innymi gotowe pomysły do zastosowania na lekcjach matematyki.

Tematyka pozostałych prac, opisywanych w tej części, dotyczy badania uogólniania matematycznego jako fundamentalnego procesu w nauczaniu matematyki. Analiza przeprowadzonych badań dotyczy uczniów w przedziałach wiekowych: 10-15, 15-19, 19-24r.ż. zgodnie z etapami rozwojowymi wg Piageta. Część z tych prac zawiera wyniki dotyczące procesu uogólniania przy zastosowaniu kalkulatora graficznego umożliwiającego szybkie i sprawne wykonanie dużej liczby m.in. wykresów funkcji, co pozwala na dostrzeżenie pewnych prawidłowości ułatwiających zaobserwowanie pewnych regularności i uogólnień. Praca z kalkulatorem graficznym znacznie przyspiesza proces obserwowania regularności i uogólnienia, a jednocześnie jest urządzeniem o małych wymiarach. W pracach [D5, D10, D12] omówiłam analizę wyników badań dotyczących wpływu kalkulatora graficznego na uczenie się rachunku różniczkowego i całkowego. Prace [D7, D9] dotyczą rozważań uogólniania w algebrze, a w pracy [D8] omówiłam sposoby zastosowania kalkulatora graficznego w modelowaniu matematycznym. Prace te zostały opublikowane w latach 2013-2015, gdy technologie informacyjne nie były jeszcze tak zaawansowane i tak powszechnie dostępne jak obecnie. W pracy [D11] dokonałam analizy ankiet przeprowadzonej wśród uczniów, dotyczącej wpływu kalkulatora graficznego na proces uczenia się matematyki.

W pracach [D6, D13, D14, D15] dokonałam analizy procesu uogólniania matematycznego na różnych etapach edukacji. Wnioski z tych prac mogą posłużyć do analiz i modyfikacji metod oraz programów nauczania matematyki na poziomie szkoły podstawowej i średniej.

7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

7.1 Osiągnięcia dydaktyczne

1. **Współautorstwo podręcznika akademickiego**

   Jestem współautorem recenzowanego podręcznika akademickiego

   [K1] **J. Jureczko**, M. Turzański, Elementy matematyki wyższej. Teoria i zadania, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, 2011.

   Podręcznik przeznaczony jest dla studentów kierunków niematematycznych.

Z uwagi na liczne zastosowania omawianych działów matematyki w naukach ekonomicznych podręcznik ten jest szczególnie dedykowany studentom kierunków ekonomicznych.

2. **Prowadzone zajęcia dydaktyczne**.

   W trakcie pracy zawodowej wielokrotnie prowadziłam wykłady i ćwiczenia dla studentów kierunku Matematyka, jak i kierunków informatycznych, ekonomicznych, przyrodniczych oraz inżynieryjno-technicznych. W Tabeli 1 przedstawiam wykaz prowadzonych przedmiotów z podziałem na wykłady i ćwiczenia.

Lp.	Przedmiot	Wykład	Ćwiczenia
1.	Algebra liniowa	x	x
2.	Algebra liniowa z geometrią analityczną	x	x
3.	Analiza matematyczna	x	x
4.	Matematyka (studia II stopnia (PWr))	x	x
5.	Elementy logiki i teorii mnogości		x
6.	Elementy topologii z zastosowaniami w ekonomii		x
7.	Kurs przygotowawczy z matematyki dla kandydatów na studia		x
8.	Topologia		x
9.	Nauczanie łamigłówkowe		x
10.	Matematyka dla kierunków niematematycznych	x	x
11.	Ekonomia matematyczna		x
12.	Inżynieria finansowa		x
13.	Matematyka finansowa		x
14.	Podstawy finansów	x	x
15.	Metody pracy z uczniem zdolnym	x	x
16.	Praca z uczniem uzdolnionym matematycznie	x	x
17.	Seminarium dydaktyczne (dla specjalności Matematyka naucz.)		x

Tabela 1: Wykaz prowadzonych przedmiotów.

3. **Przygotowanie kart przedmiotów**.

   Przygotowałam karty przedmiotów dla kierunków studiów Matematyka, Informatyka (UKSW) oraz Cyberbezpieczeństwo, Informatyka Techniczna, Informatyczne Systemy Automatyki, Teleinformatyka, Telekomunikacja (PWr). W Tabeli 2 przedstawiam wykaz kart przedmiotów z podziałem na uczelnie.

Lp.	Przedmiot	PWr	UKSW
1.	Algebra liniowa z geometrią analityczną	x	
2.	Algebra liniowa 2	x	
3.	Analiza matematyczna 1	x	
4.	Analiza matematyczna 2.3A	x	
5.	Matematyka - studia drugiego stopnia	x	
6.	Podstawy finansów		x
7.	Praca z uczniem uzdolnionym matematycznie		x
8.	Seminarium dydaktyczne		x

Tabela 2: Wykaz przygotowanych kart przedmiotów.

4. **Przygotowanie materiałów dydaktycznych**

   Przygotowałam materiały dydaktyczne w formie slajdów do wykładów i zestawy zadań z przedmiotów matematycznych dla studentów Wydziału Informatyki i Telekomunikacji Politechniki Wrocławskiej (Wydział Elektroniki przed reorganizacją) na kierunkach: Cyberbezpieczeństwo, Informatyka Techniczna, Informatyczne Systemy Automatyki, Teleinformatyka oraz Telekomunikacja (opublikowane na platformie elearningowej Politechniki Wrocławsiej).

   Przygotowałam również materiały dydaktyczne do samodzielnego studiowania z przedmiotu Matematyka dla studentów studiów drugiego stopnia na kierukach Cyberbezpieczeństwo (w ramach projektu POWER), Informatyki Technicznej i Teleinformatyki. (Materiały zostały opublikowane na platformie elearningowej Politechniki Wrocławskiej). Materiały te w postaci slajdów i zestawów zadań z przykładowymi rozwiązaniami uwzględniają potrzeby studentów z niepełnosprawnościami, głównie z dysfunkcją wzroku i słuchu.

5. **Pełnienie funkcji promotora i recenzenta**

   Byłam promotorem 40 prac licencjackich i 12 prac magisterskich z tematyki: matematyka, dydaktyka matematyki i zastosowania matematyki m.in.

w finansach i muzyce. Ponadto, byłam recenzentem około 60 prac licencjackich i magisterskich z tematyki: matematyka i dydaktyka matematyki. Wszyscy studenci, których prace prowadziłam lub recenzowałam obronili prace i uzyskali na ich podstawie tytuły zawodowe.

7.2 Osiągnięcia organizacyjne

W ramach działalności organizacyjnej pełniłam następujące funkcje.

1. Brałam udział w komisjach egzaminacyjnych magisterskich i licencjackich (zamiennie w roli promotora, recenzenta i przewodniczącego komisji) na kierunkach Matematyka i Informatyka na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczego Szkoła Nauk Ścisłych Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie (2012-2017).

2. Byłam członkiem Rady Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie (2012-2017).

3. Pełniłam funkcję pełnomocnika Dziekana ds. praktyk studenckich na kierunku Matematyka Wydziału Matematyczno-Przyrodniczego Szkoła Nauk Ścisłych Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie (2012-2016).

4. Byłam członkiem komitetu organizacyjnego konferencji naukowych:

   a) 7 Forum Matematyków Polskich z Udziałem Matematyków Ukraińskich, Olsztyn (Polska), (oraz współprowadzenie sesji pt. „Sesja Dydaktyki Matematyki i Historii Matematyki”) (2016).

   b) XXVII Szkoła Dydaktyki Matematyki, Ostróda (Polska), (2015).

   c) „Matematyczne aspekty ekonomii: ryzyko, reasekuracja, równowaga", Chorzów (Polska), (2007).

5. Jestem członkiem zespołu ds. hospitacji nauczycieli akademickich na Wydziale Informatyki i Telekomunikacji Politechniki Wrocławskiej.

7.3 Osiągnięcia popularyzujące naukę

1. Współorganizowałam ogólnopolski konkurs dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych pt. "Internetowa Przygoda z Matematyką". Konkurs odbył się na Uniwersytecie Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie (2011-2012).

2. Przygotowałam i przeprowadziłam warsztaty dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych nt.: Łamigłówki matematyczne (2012-2013).

3. Przygotowywałam uczniów szkół ponadgimnazjalnych do konkursów matematycznych (2013-2014).

4. Popularyzowałam zastosowania kalkulatora graficznego w nauczaniu i uczeniu się matematyki w szkołach średnich (2010-2014).

5. Prowadziłam szkolenia dla naucycieli matematyki m.in. z zastosowania nowych metod i technologii informacyjnych w nauczaniu matematyki (2011-2013).

8 Inne informacje dotyczące kariery zawodowej

8.1 Pozostałe doświadczenie zawodowe

W latach 2010-2015 podjęłam dodatkowe zatrudnienie w Zespole Szkół Ogólnokształcących nr 10 w Gliwicach na stanowisku nauczyciela matematyki. Podjęcie zatrudnienia w szkole było poniekąd podyktowane kształceniem studentów na kierunku Matematyka o specjalności: nauczycielska na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie.

W trakcie zatrudnienia w tej szkole prowadziłam klasy przygotowujące do matury w programie matury międzynarodowej z wykładowym językiem angielskim. Praca ta przyczyniła się do szeregu publikacji z dydaktyki matematyki.

W trakcie zatrudnienia w tej szkole prowadziłam również szkolenia dla nauczycieli matematyki m.in. z zastosowania kalkulatora graficznego w nauczaniu matematyki oraz nauczania matematyki w programie matury międzynarodowej.

W latach 2012-2022 pełniłam rolę egzaminatora zewnętrznego (międzynarodowego) w programie matury międzynarodowej.

8.2 Nagrody i wyróżnienia

- 2022 Nagroda Rektora Politechniki Wrocławskiej w uznaniu wyróżniającego wkładu w działalność uczelni.

9 Wykaz prac autorskich i współautorskich

W tej części zebrane zostały wszystkie publikacje oraz prace będące w procesie recenzji, które występują w tekście. Numeracja prac została zachowana.

9.1 Publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego

9.1.1 Monografia naukowa

[M1] **J. Jureczko**, On nonmeasurable sets and unions. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2023. MNiSW: 80.

9.1.2 Publikacje i prace naukowe wchodzące w skład monografii naukowej

[C1] R. Frankiewicz, **J. Jureczko**, B. Węglorz, On Kuratowski partitions in the Marczewski and Laver structures and Ellentuck topology. Georgian Math. J. 26 (2019), no. 4, 591–598.

[C2] R. Frankiewicz, **J. Jureczko**, On the Gitik-Shelah theorem. Georgian Math. J. 26 (2019), no. 4, 555–559.

[C3] **J. Jureczko**, The new operations on complete ideals, Open Math. 17 (2019), no. 1, 415–422.

[C4] **J. Jureczko**, Special partitions of Baire spaces and precipitous ideals, Top. App. 322 (2022), 108304, 10pp.

[C5] **J. Jureczko**, Remarks on the existence of measurable cardinals, Bull. Sci. Math. 186 (2023), Paper No. 103283.

[N1] **J. Jureczko**, A note on Kuratowski partitions in metric spaces, https://arxiv.org/pdf/2303.16649.pdf.

[N2] **J. Jureczko**, On some generalizations of the Halpern-Läuchli theorem, https://arxiv.org/pdf/2303.17327.pdf.

[N3] **J. Jureczko**, Nonmeasurable sets in tree structures and Ellentuck topology, https://arxiv.org/pdf/2303.16650.pdf.

[N4] **J. Jureczko**, Partitions and point-finite covers of Baire spaces, https://arxiv.org/pdf/2303.16652.pdf.

9.2 Pozostałe publikacje i prace naukowe

9.2.1 Publikacje z teorii mnogości i topologii

[S1] **J. Jureczko** M. Turzański, From a Ramsey-type theorem to independence, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 49 (2008), no. 2, 47–55.

[S2] **J. Jureczko**, On inequalities among some invariants, Mathematica Aeterna. 6 (2016), no. 1, 87–98.

[S3] **J. Jureczko**, Strong sequences and independent sets, Mathematica Aeterna. 6 (2016), no. 2, 141–152.

[S4] **J. Jureczko**, κ-strong sequences and the existence of generalized independent families, Open Math. 15 (2017), no. 1, 1277–1282.

[S5] **J. Jureczko**, Strong sequences and partition relations, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math. 16 (2017) 51–59.

[S6] **J. Jureczko**, Some remarks on strong sequences, Scientific Issues of Jan Długosz University in Częstochowa. Mathematics. XXIII (2018), 25–34.

[S7] **J. Jureczko**, On Banach and Kuratowski theorem, K-Lusin sets and strong sequences, Open Math. 16 (2018), no. 1, 724–729.

[P1] **J. Jureczko**, On equivalences of polarized partition relations, https://arxiv.org/pdf/2305.02417.pdf.

[P2] **J. Jureczko**, Some remarks on polarized partition relations Bull. Iranian Math. Soc. 49 (2023), no. 3, Paper No. 38, 11 pp.

[R1] **J. Jureczko**, Ultrafilters without immediate predecessors in Rudin-Frolik order for regulars. Results Math. 77 (2022), no. 6, Paper No. 230, 11 pp.

[R2] **J. Jureczko**, A note on special subsets in Rudin-Frolik order for regulars, Math. Slovaca. 73 (2023) No. 4, 825–834..

[R3] **J. Jureczko**, Chains in Rudin-Frolik order for regulars. https://arxiv.org/pdf/2304.00097.pdf

[R4] **J. Jureczko**, Decreasing chains in Rudin-Frolik order for regulars. https://arxiv.org/pdf/2304.01398.pdf

9.2.2 Publikacje z zastosowań matematyki

[Z1] **J. Jureczko**, E. Mizerski, „Wycena opcji walutowych w Polsce metodą Garmana-Kohlhagena ”, W:„Matematyczne aspekty ekonomii: ryzyko, reasekuracja, równowaga" UKSW W-wa 2008 - materiały pokonferencyjne, 37–48.

[Z2] **J. Jureczko**, Strong sequences and their consequences in social choice, Silesian Journal of Pure and Applied Mathematics, 6 (2016), no. 1, 49–58.

[Z3] M. Andrzejewska, **J. Jureczko**, M. Wodecki, “O nauczaniu matematyki w procesie kształcenia współczesnego inżyniera”. W: Inżynieria zarządzania: cyfryzacja produkcji. Aktualności badawcze 2 / red. nauk. Ryszard Knosala. Warszawa : Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, cop. 2020, 895-905.

9.2.3 Publikacje z dydaktyki matematyki

[D1] **J. Jureczko**, Miejsce matematyki w programach: Matury Międzynarodowej i nowej matury polskiej cz 1. Nauczyciele i Matematyka + Technologia Informacyjna, 82 (2012), 26–30.

[D2] **J. Jureczko**, Miejsce matematyki w programach: Matury Międzynarodowej i nowej matury polskiej cz 2. Nauczyciele i Matematyka + Technologia Informacyjna, 83 (2012), 21–26.

[D3] **J. Jureczko**, Projekt edukacyjny w matematyce w monografii: Nowe metody nauczania w matematyce, red. Joanna Kandzia, W-wa 2012, 225–246.

[D4] **J. Jureczko**, Metody aktywizujące w monografii: Nowe metody nauczania w matematyce, red. Joanna Kandzia, W-wa 2012, 247–262.

[D5] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems concerning calculus, Acta Mathematica, 16 (2013), 93–98.

[D6] **J. Jureczko**, Proces uogólniania u uczniów w wieku 17-19 lat na podstawie zadań opartych o szablony wizualne, W: Współczesne Problemy Nauczania Matematyki red. H Kąkol, Bielsko-Biała, 2014, 203–231.

[D7] **J. Jureczko**, The role of The Graphic Display Calculator in forming conjectures on the basis of a special kind of systems of linear equations, Acta Mathematica, 17 (2014), 69–74.

[D8] **J. Jureczko**, The use of graphic display calculator and computer software in mathematical modeling W: Comunication in the mathematical classroom ed. M. Pytlak, 2014, 134–144.

[D9] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems with polynomials with complex numbers, Scientific Issues Jan Długosz University in Częstochowa, Mathematics XIX (2014), 83–93.

[D10] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems concerning differentiation, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th series: Didactica Mathematicae, 36 (2014), 5–31.

[D11] **J. Jureczko**, Rola kalkulatora graficznego w uczeniu się matematyki w: Współczesne problemy nauczania matematyki, red. H. Kąkol, 2015, 211–240.

[D12] **J. Jureczko**, Using graphic display calculator in solving some problems concerning limits of sequences and functions, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th series: Didactica Mathematicae, 37 (2015), 5–24.

[D13] **J. Jureczko**, Spatial modeling as motivation for studying mathematics, W: Inquiry based mathematical education, Editirs B. Maj-Tatsis, M. Pytlak, E. Swoboda, Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego, Rzeszów 2016, 245–254.

[D14] **J. Jureczko**, A task about a cube: or, on generalization in 3D, Annales of the Polish Mathematical Society, 5th series: Didactica Mathematicae, 38 (2016), 93–112.

[D15] **J. Jureczko**, The strategies of using a special kind of number patterns in different stages of education, Educational Research and Reviews, 12 (2017), 643–652.

9.2.4 Podręcznik akademicki

[K1] **J. Jureczko**, M. Turzański, Elementy matematyki wyższej. Teoria i zadania, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Bankowej, 2011.

Literatura

[1] B. Aniszczyk, R. Frankiewicz, S. Plewik, Remarks on (s)- and Ramsey-measurable functions. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987), no. 7-8, 479–485.

[2] S. Argyros, S. Todorcevic, Ramsey Methods in Analysis, advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, 2005.

[3] J. Baker, K. Kunen, Limits in the uniform ultrafilters. Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 10, 4083–4093.

[4] S. Banach, K. Kuratowski, Sur une généralisation du probléme de la mesure, Fund. Math. 14 (1929), 127–131.

[5] T. Bartoszyński, L. Halbeisen, On a theorem of Banach and Kuratowski and K-lusin sets, Rocky Mt. J. Math. 33 (2003), 1223–1231.

[6] J. E. Baumgartner, Iterated forcing, in: Surveys in se theory (Ed. A. R. D. Mathias), London Math. Soc. Lecture Notes Series, 87, Cambridge University Press 1983, 1–59.

[7] D. Booth, Ultrafilters on a countable set, Ann. Math. Logic. 2 (1970/71), no. 1, 1–24.

[8] J. Brzuchowski, J. Cichoń, E. Grzegorek, C Ryll-Nardzewski, On the existence of nonmeasurable unions, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 27 (1979), 447–448.

[9] L. Bukovský, Any partition into Lebesgue measure zero sets produces a nonmeasurable set, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 6, 431–435.

[10] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model Theory, North Holland, 1978.

[11] W. Comfort, S. A. Negrepontis, Chain conditions in topology, Vol. 79 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge-New York, University Press, 1982.

[12] N. Dobrinen, D. Hathway, The Halpern-Läuchli theorem at a measurable cardinal, J. Symbolic Logic. 82 (2017), no. 4, 1560–1575.

[13] N. Dobrinen, D. Hathway, Forcing and the Halpern-Läuchli theorem, J. Symbolic Logic. 85 (2020), no. 1, 87–102.

[14] B. A. Efimov, Dyadic bicompacta (in Russian) Trudy Mosk. Mat. Obšč. 14 (1965), 211–247.

[15] E. Ellentuck, A new proof that analytic sets are Ramsey, J. Symb. Log. 39 (1974), 163–165.

[16] A. Emeryk, R. Frankiewicz, W. Kulpa, Remarks on Kuratowski's Theorem on Meager Sets, Bull. Ac. Pol.: Math. 27 (1979), no. 6, 493–498.

[17] A. Emeryk, R. Frankiewicz, W. Kulpa, On functions having the Baire property, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 27 (1979), no. 6, 489–491.

[18] R. Engelking, General Topology (Revised and completed edition) Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[19] P. Erdös, R. Rado, A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 427–489.

[20] R. Frankiewicz, A. Gutek, Remarks on the decomposition of spaces on meager set, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), no. 1-2, 91–96.

[21] R. Frankiewicz, A. Gutek, Sz. Plewik, J. Roczniak, On the theorem on measurable selectors, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), no. 1-2, 33–40.

[22] R. Frankiewicz, K. Kunen, Solutions of Kuratowski's problem on functions having the Baire property, I, Fund. Math. 128 (1987), 171–180.

[23] D. H. Fremlin, R. W. Hansell, H. J. K. Junnila, Borel functions of bounded class, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), no. 2, 835–849.

[24] Z. Frolik, Sums of ultrafilters. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 87–91.

[25] M. Gitik, S. Shelah, Forcing with ideals and simple forcing notions, Israel J. Math. 68 (1989), no. 2, 129–160.

[26] E. Grzegorek, I. Labuda, Partitions into thin sets and forgotten theorems of Kunugi and Lusin-Novikov, Coll. Math. 155 (2019), 267–285.

[27] J. D. Halpern, H. Läuchli, A partition theorem, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 360–367.

[28] R. Hodel, K. Kunen et al. (Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984, R. Hodel,Cardinal Functions I, 2–61, Amsterdam, Elsevier Science Publishers.

[29] W. Hu, Generalized independent families and dense of Box-Product spaces, App. Gen. Top. 7 (2006), no. 2, 203–209.

[30] T. Jech, Multiple forcing, Cambridge Tracts in Mathematics, 88. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[31] T. Jech, Set theory, The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[32] J. Kaniewski, R. Pol, Borel-measurable Selectors for Compact-valued mappings in the Nonseparable Case, Bull. Ac. Pol.: Math. 23 (1975), no. 10, 1043–1050.

[33] A. Kharazishvili, Nonmeasurable sets and functions, North-Holland Mathematical Studies. 195, Amsterdam, 2004.

[34] K. Kunugi, Sur les fonctions jouissant de la propriété de Baire, Japanese J. Math. 13 (1936), 431–433.

[35] K. Kuratowski, Quelques problemés concernant les espaces métriques nonseparables, Fund. Math. 25 (1935), 534–545.

[36] K. Kuratowski, Topology, vol. 1, Academic Press, New York and London, 1966.

[37] K. Kuratowski, A. Mostowki, Set theory with an introduction to descriptive set theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford; PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1976.

[38] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, A general theorem on selectors, Bull. Ac. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.: Math. 13 (1965), 397–403.

[39] R. Laver, Products of infinitely many perfect trees. J. London Math. Soc. (2) 29 (1984), no. 3, 385–396.

[40] A. Louveau, S. G. Simpson, A separable image theorem for Ramsey mappings, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 30 (1982), 105–108.

[41] N. N. Lusin, Sur la décomposition des ensembles, C.R.. Acad. Sci. Paris. 198 (1934), 1671–1674.

[42] J. C. Oxtoby, Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 2. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.

[43] F. P. Ramsey, On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. 30 (1930), 264–284.

[44] M. E. Rudin, Types of ultrafilters in: Topology Seminar Wisconsin, 1965, Princeton Universiy Press, Princeton 1966.

[45] V. V. Sazonov, On perfect measures, Amer. Math Soc. Transl. 48 (1965), no. 2, 229–253.

[46] R. M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math. 92 (1970), 1–56.

[47] R. M. Solovay. Real-valued measurable cardinals. Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967), 397–428. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1971.