

**1. Imię i nazwisko**

Hesam Soltanpanahi Sarabi

**2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne – z podaniem podmiotu nadającego stopień, roku ich uzyskania oraz tytułu rozprawy doktorskiej**

- **Doktorat** z zakresu fizyki wysokich energii, Uniwersytet Isfahan  
Tytuł rozprawy: Pięciowymiarowe czarne dziury i czarne pierścienie, 2010 r.
- **Magisterium:** z zakresu fizyki wysokich energii, Politechnika Isfahan, Iran.  
Tytuł rozprawy: Struktura więzów i kwantowanie struny bozonowej, 2004 r.

**3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych**

- **2020-Obecnie** Assistant Professor (Adiunkt) na Uniwersytecie Jagiellońskim, Kraków, Polska
- **2019-2020** Starszy pracownik naukowy w Południowochińskim Uniwersytecie w Guangzhou, Chiny
- **2016-2019** Staż doktorski w Instytucie Badań Podstawowych (IPM), Tehran, Iran
- **2013-2016** Staż doktorski na Uniwersytecie Jagiellońskim, Kraków, Polska
- **2010-2013** Staż doktorski na Uniwersytecie Witwatersrand, Johannesburg, Południowa Afryka
- **2010-2011** Pracownik naukowy w Instytucie Badań Podstawowych (IPM), Tehran, Iran

**4. Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.)**

W swoim dorobku mam osiem publikacji poświęconych “*Nierównowagowej dynamice holograficznych silnie sprzężonych układów*”, wymienionych w kolejności chronologicznej (w dziedzinie fizyki wysokich energii autorzy są wymienieni w kolejności alfabetycznej proszę zapoznać się z załączonymi oświadczeniami moich współpracowników o moim wkładzie):

- [H1] R. A. Janik, G. Plewa, H. Soltanpanahi, M. Spalinski, *Linearized non-equilibrium dynamics in non-conformal plasma*, Phys. Rev. D **91** (2015) 12, 126013
- [H2] R. A. Janik, J. Jankowski, H. Soltanpanahi, *non-equilibrium dynamics and phase transitions*, Phys. Rev. Lett. **117** (2016) no.9, 091603
- [H3] R. A. Janik, J. Jankowski, H. Soltanpanahi, *Quasinormal modes and the phase structure of strongly coupled matter*, JHEP **06** (2016) 047
- [H4] M. Asadi, H. Soltanpanahi, F. Taghinavaz, *Critical behaviour of hydrodynamic series*, JHEP **05** (2021) 287
- [H5] G. Jafari, H. Soltanpanahi, *Instability of BTZ black holes in parity-even massive gravity*, JHEP **02** (2019) 195
- [H6] R. A. Janik, J. Jankowski, H. Soltanpanahi, *Real time dynamics and phase separation in a holographic first order phase transition*, Phys. Rev. Lett. **119** (2017) no.26, 261601
- [H7] L. Bellantuono, R. A. Janik, J. Jankowski, H. Soltanpanahi, *Dynamics near a first order phase transition*, JHEP **10** (2019) 146
- [H8] M. Baggioli, S. Griening, H. Soltanpanahi, *Nonlinear Oscillatory Shear Tests in Viscoelastic Holography*, Phys. Rev. Lett. **124** (2020) no.8, 08160

## Wprowadzenie

We współczesnej fizyce efekty silnego sprzężenia są wszechobecne: determinują one zachowanie układów od fizyki ciała stałego po fizykę cząstek elementarnych. Z tego powodu szczególnie ważne jest posiadanie wiarygodnych narzędzi teoretycznych do ich opisu. Jedną ze standardowych metod są wyprowadzone z zasad pierwszych symulacje sieciowe, które w przypadku chromodynamiki kwantowej (QCD) dostarczyły szczegółowych informacji na temat struktury fazowej w skończonej temperaturze i zerowej gęstości barionowej [1]. Pomimo niewątpliwych sukcesów, symulacje sieciowe nie pozwalają uchwycić procesów dynamicznych. W tym aspekcie okazało się, że możliwe jest użyteczne podejście oparte na zasadzie holograficznej [2], która pozwala na opracowanie teoretyczne *ab initio* (z pierwszych zasad).

Holografia lub korespondencja anty-de-sitter/konforemna teoria pola (AdS/CFT) jest jednym z najbardziej zdumiewających odkryć współczesnej fizyki teoretycznej, które dostarcza nam sposobu na zrozumienie dynamiki silnie sprzężonych/skorelowanych kwantowych teorii pola za pomocą metod ogólnej teorii względności. Ważnym obszarem badań wykorzystującym ten nowy związek między geometrią a fizyką jest studiowanie dynamiki takich silnie oddziałujących ośrodków w czasie rzeczywistym. Jest to aktywna dziedzina fizyki teoretycznej, która w ostatnich dwóch dekadach, znacząco poszerzyła horyzonty poznawcze. Jako taki, jest on częścią długich badań nad plazmą kwarkowo-gluonową (QGP) [3], silnie oddziałujących kwantowych układów wielu ciał [4].

Hydrodynamika relatywistyczna (RH) jest potężnym narzędziem do opisu własności fizycznych plazmy kwarkowo-gluonowej – nowej fazy materii w ekstremalnych warunkach – w i poza równowagą termodynamiczną [5]. Podejście RH odnosi wielkie sukcesy w wyjaśnieniu danych eksperymentalnych pochodzących z akceleratorów wysokich energii. Ponadto, fizyka materii skondensowanej również skorzystała z potencjału hydrodynamiki relatywistycznej [6]. Najbardziej znane przykłady osiągnięć holografii to: (i) sformułowanie uniwersalnego ograniczenia na stosunek lepkości do entropii [7], który jest jak dotąd respektowany przez wszystkie znane płyny; (ii) odkrycie nowych współczynników transportu w hydrodynamice anomalnej [8], obserwowanych doświadczalnie w półmetalach Weyl’a [9].

Większość badań holograficznych została przeprowadzona w kontekście konforemnej teorii  $\mathcal{N} = 4$  SYM, która z samej swojej definicji nie wykazuje żadnego rodzaju przejścia fazowego, czy efektu typu *crossover*. Bardzo interesujące jest zatem zbadanie, jakie modyfikacje znanego obrazu pojawiają się w teorii niekonformalnej. Istnieją różne sposoby modelowania teorii niekonforemnych w korespondencji AdS/CFT albo w podejściu top-down, poprzez powiązanie konkretnej teorii niekonforemnej ze znaną teorią strun, albo podejściu bottom-up, gdzie tło grawitacyjne jest fenomenologicznie ustalone tak, aby wykazywało specyficzne własności, np. znane z QCD na sieci. W naszych badaniach przyjmujemy jedno lub drugie podejście w zależności od konkretnych zagadnień, które chcemy podjąć.

Ogólny model holograficzny, którego używamy w naszych badaniach to  $(d + 1)$ -wymiarowa teoria Einsteina–Maxwella z dylatonem określona następującym działaniem <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}} &= S_{\text{bulk}} + S_{\text{bdry}} + S_{\text{ct}}, \\ S_{\text{bulk}} &= \frac{1}{16\pi G_{\text{N}}} \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \sqrt{-g} \left( R - \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi) - f(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \\ S_{\text{bdry}} &= \frac{1}{8\pi G_{\text{N}}} \int_{\partial\mathcal{M}} d^d x \sqrt{-\gamma} K, \end{aligned} \tag{1}$$

na które składają się: skalar Ricciego  $R$  geometrii objętościowej na rozmaitości  $M$  z brzegiem  $\partial M$  i metryką objętościową  $g_{\mu\nu}$ , potencjał dylatonu, sprzężenie pola Maxwella z dylatonem, natężenie pola  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ , ślad krzywizny zewnętrznej  $K$  geometrii brzegowej z metryką indukowaną  $\gamma_{ij}$  i przeciw-człon  $S_{\text{ct}}$ , który sprawia, że zasada wariacyjna jest dobrze określona (a także działanie na powłoce

<sup>1</sup>Układ grawitacyjny dualny do materiału lepko-sprężystego ma więcej pól skalarnych z nietypowym członem kinetycznym, który wprowadzimy w ostatnim rozdziale.

masy jest skończone). Przyjmujemy współrzędne  $(r, t, x^i)$ , gdzie  $r$  jest holograficzną współrzędną radialną,  $t$  jest czasem, a  $x^i$  są brzegowymi kierunkami przestrzennymi w  $d - 1$ -wymiarowej czasoprzestrzeni.

Potencjał samo-oddziałujący  $V(\phi)$ , sprzężenie Maxwell-dylaton  $f(\phi)$  są albo ustalone w podejściu odgórnym "top-down", albo skonstruowane tak, że dualna teoria pola modeluje równowagę interesującego nas równania stanu np. przejścia fazowego lub danych sieciowych. Gdy te funkcje są już znane, objętościowe równania ruchu przyjmują następującą postać,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) - f'(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - V'(\phi) &= 0, \\ \partial_\mu (\sqrt{-g} f(\phi) F^{\mu\nu}) &= 0, \\ R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{3} \left( V(\phi) - \frac{f(\phi)}{4} F^2 \right) - \frac{f(\phi)}{2} F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

i mogą być rozwiązane za pomocą niezależnego od czasu podstawienia, aby znaleźć równowagową strukturę fazową teorii dualnej, którą określa się za pomocą gęstością entropii lub gęstością energii (swobodnej) w funkcji temperatury i potencjału chemicznego. Ponieważ interesujemy się geometrią czasoprzestrzeni, która asymptotycznie ma być  $AdS$ , potencjał musi mieć następujące rozwinięcie małych  $\phi$

$$V(\phi) = -\frac{d(d-1)}{L^2} + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (3)$$

Tutaj  $L$  jest promieniem  $AdS$ , który przez swobodę wyboru jednostek ustawiamy na jeden,  $L = 1$ . Taki dualny opis grawitacyjny odpowiada deformacjom konforemnej brzegowej teorii pola o konforemnym wymiarze  $d$

$$\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_{\text{CFT}_d} + \Lambda^{d-\Delta} \mathcal{O}_\phi, \quad (4)$$

gdzie  $\lambda$  jest skalą energii, a  $\Delta$  jest wymiarem konforemnym dualnego operatora  $\mathcal{O}_\phi$  związanego z parametrem masy pola skalarnego zgodnie z holograficzną relacją,  $\Delta(\Delta - d) = m^2 L^2$ . Fizyczna skala, łamiąca konforemna niezmienniczość, jest ustalona przez źródło operatora i w naszych badaniach jest wybierana jako  $\Lambda = 1$ , z wyjątkiem jednego przykładu, w którym ustaliliśmy ją na zero ( $\Lambda = 0$ ), aby zachować symetrię konforemna teorii brzegowej. Podczas gdy w modelach "top-down" potencjał  $V(\phi)$  i sprzężenie Maxwell-dylaton  $f(\phi)$  są ustalone przez spójność redukcji i obcięcia, w podejściu oddolnym wybieramy pracę w objętościowej teorii grawitacji bez potencjału chemicznego i z następującą rodziną potencjałów pola skalarnego [10]

$$V(\phi) = -d(d-1)(1 + B_0 \phi^2)^{1/4} \cosh(\gamma \phi) + B_2 \phi^2 + B_4 \phi^4 + B_6 \phi^6, \quad (5)$$

gdzie parametry  $(\gamma, B_i)$  są indywidualnie dobrane do rozważanych przypadków.

Ostatecznym celem niniejszych badań jest zbadanie w pełni nieliniowej ewolucji czasowej układów holograficznych opisujących układy niekonforemne poprzez rozwiązanie zależnych od czasu objętościowych równań ruchu, przy czym skupiamy się na dwóch konkretnych przykładach:

- 1) układ z przejściem fazowym,
- 2) zależna od czasu reologiczna odpowiedź modelu lepkosprężystego.

Następnie, stosując holograficzną renormalizację [11] obliczamy wielkości fizyczne teorii brzegowej np. wartość oczekiwaną tensora energii-pędu, którą można odczytać z bliskiego brzegu rozwinięcia składowych metryki. Oczywiście, naturalne jest rozpoczęcie naszych badań od przyjrzenia się zlinearyzowanej dynamice nierównoważnej w każdym przypadku, a następnie rozszerzenie jej na poziom nieliniowy.

## Zlinearyzowana dynamika nierównowagowa

W pierwszej kolejności w studiach nad nierównowagową materią w reżimie silnego sprzężenia, zbadamy wzbudzenia kolektywne w pobliżu stanu równowagi. Liniowa odpowiedź układu jest analizowana poprzez zadanie perturbacji z pędem w ustalonym kierunku i obliczanie biegunów powstałych funkcji Greena. Zgodnie z korespondencją AdS/CFT bieguny retardowanej funkcji Greena są dualne do modów quasinormalnych (QNM) w teorii grawitacji. Dlatego do wszystkich pól dodajemy po prostu perturbacje w postaci fali płaskiej wzdłuż jednego z brzegowych kierunków przestrzennych  $z \equiv x^{d-1}$ , jako

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(r, t, x) &= g_{\mu\nu}^{(0)}(r) + h_{\mu\nu}(r)e^{-i\omega t + ikz}, \\ A_\mu(r, t, x) &= A_\mu^{(0)}(r) + a_\mu(r)e^{-i\omega t + ikz}, \\ \phi(r, t, x) &= \phi^{(0)}(r) + \psi(r)e^{-i\omega t + ikz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Fluktuacje można sklasyfikować zgodnie z ich właściwościami transformacji pod wpływem pozostałej grupy symetrii objętości świata  $O(d-2)$  działającej na  $x^1, \dots, x^{d-2}$  w sektorach Spin-0, Spin-1 i Spin-2, a mianowicie Wygodnie jest używać niezmienniczych ze względu na cechowanie (infinitesimalne dyfeomor-

Sektor	kanał perturbacji		
Spin-0	dźwięk: $h_{tt}, h_{tz}, h_{zz}, h_{rr}, h_{tr}, h_{zr}, h$	dyfuzja: $a_t, a_z, a_r$	$\psi$
Spin-1	ściananie: $h_{ti}, h_{zi}, h_{ri}$	poprzeczny: $a_i$	–
Spin-2	skalary: $h_{ij} - \delta_{ij}h/(d-2)$	–	–

Tablica 1: Oznaczenia:  $i, j = 1, \dots, d-2$ , oraz  $h \equiv \sum_i^{d-2} h_{ii}$ .

fizmy) kombinacji liniowych zaburzeń z różnych kanałów perturbacji. We wszystkich sektorach problem wyłaniający się z zlinearyzowanych równań jest uogólnionym równaniem na wartość własną, które dla danego  $k$  skutkuje dobrze zdefiniowanym nieskończonym zbiorem częstości  $\omega_i(k)$ . W sektorach Spin-0 i Spin-1 oprócz modów niehydrodynamicznych występują także mody hydrodynamiczne, zdefiniowane jako  $\lim_{k \rightarrow 0} \omega_H(k) = 0$ , natomiast w sektorze Spin-2 występują tylko częstości niehydrodynamiczne.

Hydrodynamiczne mody kwazynormalne są związane ze współczynnikami transportu w następujący sposób

$$\begin{aligned} \omega &\approx -i \frac{\eta}{\varepsilon + p} k^2 + \left[ \frac{\eta^2 \tau_\Pi}{(\varepsilon + p)^2} - \frac{1}{2} \frac{\theta_1}{\varepsilon + p} \right] k^4, \\ \omega &\approx \pm c_s k - i \Gamma_s k^2 \mp \frac{1}{2c_s} \left[ \Gamma_s^2 - 2c_s^2 \left( \frac{2}{3} \frac{\eta \tau_\Pi}{\varepsilon + p} + \frac{1}{2} \frac{\zeta \tau_\pi}{\varepsilon + p} \right) \right] k^3, \end{aligned} \quad (7)$$

Wzory te są przybliżone w tym sensie, że w ogólności współczynniki transportu wyższego rzędu powinny być uwzględnione [12]. Jednak dla małych pędów rozwinięcie drugiego rzędu jest wystarczające do odczytania najniższych współczynników transportowych modelu. Stała tłumienia dźwięku,  $\Gamma_s$ , jest związana z lepkością ścinającą  $\eta$  i lepkością masową  $\zeta$  przez

$$\Gamma_s = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\varepsilon + p} + \frac{1}{2} \frac{\zeta}{\varepsilon + p}. \quad (8)$$

Współczynnik transportu trzeciego rzędu  $\theta_1$  zostanie zdefiniowany później.

W naszej analizie wyrażamy pędy i częstości w jednostkach temperatury przyjmując

$$\mathfrak{q} \equiv \frac{k}{2\pi T}, \quad \mathfrak{w} \equiv \frac{\omega}{2\pi T}. \quad (9)$$

Te bezwymiarowe wielkości są wygodniejsze do porównywania wyników w teorii przy różnych skalach energii, a także do porównywania wyników w różnych teoriach i układach. Badania tych modów mówią nam o dynamice nierównowagowej np. czasie termalizacji, ultralokalności i promieniu zbieżności szeregu hydrodynamicznego.

Biorąc za przykład przypadek planarnej czarnej dziury, hydrodynamikę wszystkich rzędów można zidentyfikować, na poziomie zlinearyzowanym, z najniższym modem kwazinormalnym, tzw. modem hydrodynamicznym, i jego dokładną zależnością od pędu przestrzennego. Jednak oprócz tego najniższego wzbudzenia istnieje nieskończony zbiór wyższych wzbudzeń kwazinormalnych, które są tłumione wykładniczo (w kontekście AdS/CFT).

Ponieważ pełna dynamika nieliniowa w głęboko nierównowagowym reżimie jest bardzo skomplikowana, zasugerowano w [13, 14], że użyteczne może być włączenie tylko najniższych, najmniej tłumionych niehydrodynamicznych stopni swobody do powszechnie stosowanego nieliniowego opisu hydrodynamicznego. Po stronie dualnej grawitacji te stopnie swobody to niehydrodynamiczne QNM czarnej dziury o skończonej temperaturze. Ten rozdział jest poświęcony podsumowaniu naszych wyników dotyczących różnych aspektów QNM i ich znaczenia.

### Niehydrodynamiczne stopnie swobody

Po wyprodukowaniu w relatywistycznych zderzeniach ciężkich jonów, plazma kwarkowo-gluonowa przechodzi fazę nierównowagowej ekspansji, charakteryzowaną przez czas termalizacji. W Ref. [H1], badając zachowanie najniższych modów niehydrodynamicznych w klasie bardziej realistycznych (niekonformalnych) modeli holograficznych inspirowanych QCD na sieci, badamy ten reżim i stwierdzamy, że czas termalizacji wydaje się zależeć tylko od prędkości dźwięku. Wyniki te wskazują na możliwość zwiększenia roli niehydrodynamicznych stopni swobody w pobliżu przejścia typu crossover.

W tym rozdziale zaniebujemy potencjał chemiczny i koncentrujemy się na wyborze parametrów w potencjale dylatonu, które w przybliżeniu odtwarzają równanie stanu sieciowej QCD, wyznaczone przez grupę Grupę Budapeszt-Wuppertal w [15]

$$\gamma = 0.606, \quad B_0 = 0, \quad B_4 = -0.1, \quad B_6 = 0.0034, \quad (10)$$

a współczynnik  $B_2$ , który jest związany z masą pola skalarnego (i wymiarem konforemny operatora dualnego), jest dowolny, ale powinien spełniać nierówność Breitenlohnera-Freedmana,  $m^2 > -4$ .

Mając dane potencjały należy użyć technik numerycznych, aby rozwiązać równania ruchu (2) i znaleźć geometrie czarnych dziur. Do celów obliczania modów kwazinormalnych bardzo wygodne jest stosowanie parametryzacji Eddingtona-Finkelsteina (EF). W tak zwanym, radialnym cechowaniu Gubsera,  $\phi = r$ , składniki metryczne są oznaczone jako

$$ds^2 = e^{2A(r)} \left( -H(r)dt^2 + dx^2 \right) - 2e^{A(r)+B(r)} dt dr, \quad \phi = r. \quad (11)$$

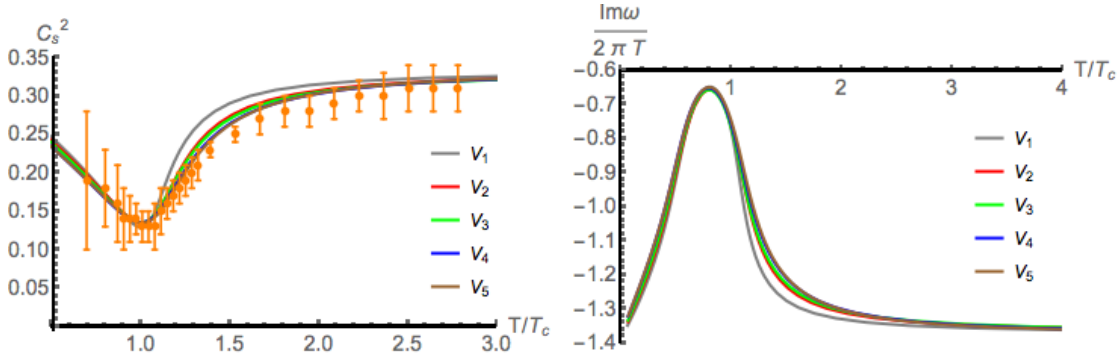
Interesują nas rozwiązania posiadające horyzont, co wymaga, aby funkcja zaciemniająca  $H(r)$  miała zero w pewnym punkcie  $r = r_H$ :

$$H(r_H) = 0, \quad (12)$$

i asymptotycznie wymagamy, aby nasza geometria była geometrią czasoprzestrzeni AdS.

Po określeniu geometrii możemy w standardowy sposób wyodrębnić wielkości termodynamiczne. Regularność czasoprzestrzeni euklidesowej na horyzoncie zdarzeń wraz z formułą Bekensteina-Hawkinga na entropię prowadzą do następujących wyrażeń na temperaturę Hawkinga i gęstość entropii

$$T = \frac{1}{4\pi} e^{A(r_H)+B(r_H)} |V'(r_H)|, \quad s = \frac{1}{4G_N} e^{A(r_H)}. \quad (13)$$



Rysunek 1: Lewy panel: Prędkość dźwięku  $c_s^2$  dla pięciu różnych potencjałów  $V_i$ , odpowiadających deformacjom teorii przez operatory o wymiarach konforemnych 3.93, 3.67, 3.55, 3.10, 3.00. Prawy panel: Części urojone najniższych modów kwazinormalnych dla  $q = 0$  dla tej samej rodziny potencjałów. Wykresy z pracy [H1].

Z kolei prędkość dźwięku układu można wyrazić jako

$$c_s^2 = \frac{d \log T}{d \log s} . \quad (14)$$

W lewym panelu Rys. pokazujemy prędkość dźwięku uzyskaną z konstrukcji numerycznej odpowiedniego rozwiązania czarnej dziury wraz z danymi z sieciowego QCD.

W granicy zerowego pędu,  $q = 0$ , zlinearyzowane równania we wszystkich sektorach redukują się do równania dla QNM zewnętrznego bezmasowego pola skalarowego, z wyjątkiem równania perturbacji pola skalarowego  $\psi$ , które nadal jest sprzężone z modem dźwiękowym. Dlatego w tej granicy cała informacja o modach kwazinormalnych teorii jest podsumowana w tym zbiorze modów kwazinormalnych. Równanie pola dla bezmasowego skalara jest po prostu równaniem falowym

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \left( \psi(r) e^{-i\omega t + ikz} \right) = 0 . \quad (15)$$

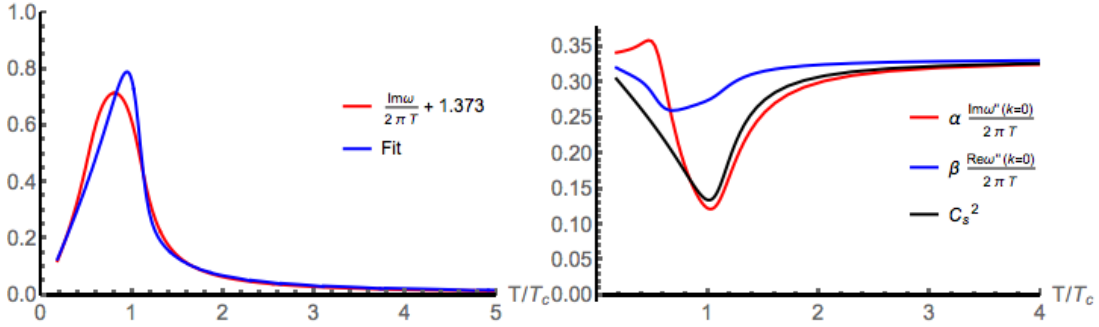
Ogólnie rzecz biorąc, są dwie główne zalety stosowania układu współrzędnych Eddingtona-Finkelsteina do znajdowania częstotliwości modów kwazinormalnych. Po pierwsze, wchodzący warunek brzegowy na horyzoncie zostaje przełożony na zwykłą regularność rozwiązania na horyzoncie. Po drugie, ze względu na specjalną postać czasowej części metryki Eddingtona-Finkelsteina, zależność od częstości modów odpowiedniego równania różniczkowego jest *liniowa*.<sup>2</sup> Stąd problem znalezienia częstotliwości quasinormalnych sprowadza się do do rozwiązania liniowego zwyczajnego równania różniczkowego w postaci

$$\hat{L}_1 \psi = \omega \hat{L}_2 \psi \quad (16)$$

$\hat{L}_1$  oraz  $\hat{L}_2$  są określonymi operatorami różniczkowymi, z  $\psi$  spełniającym zasadniczo warunki brzegowe Dirichleta na brzegu i jest regularnym na horyzoncie. Z wykorzystaniem reprezentacji spektralnej w kategoriach wielomianów Czebyszewa [18], operatory różniczkowe występujące w równaniu (16) są reprezentowane jako macierze, a ze względu na liniową zależność tego równania od  $\omega$  sprowadza się to do uogólnionego macierzowego problemu wartości własnych, który można bardzo wydajnie rozwiązać.

W prawym panelu Rys. 1 pokazujemy urojone części częstości QNM w jednostkach temperatury  $\omega$ . Obserwujemy, że tłumienie znacząco maleje (o czynnik 2) w pobliżu przejścia. Pokazuje to, że w przypadku niekonforemnym dynamika nierównowagowa staje się ważniejsza blisko  $T_c$ . Ponadto stwierdzamy, że wykresy

<sup>2</sup>Jest to prawdą we wszystkich sektorach, gdy tylko wprowadzimy formalizm równania głównego [16, 17].



Rysunek 2: Lewy panel: Część urojona potencjału  $V_2$  wraz z częścią fenomenologiczną zgodnie z równaniem (17). Prawy panel: Krzywizna częstotliwości tłumienia w  $k = 0$ , nałożona na  $\alpha = 1.114$  oraz  $\beta = 0.342$  dla potencjału  $V_2$ . Wyniki dla pozostałych potencjałów są zasadniczo takie same w obu panelach. Wykresy z pracy [H1].

w zasadzie leżą na sobie dla różnych wymiarów konforemnych. To wskazuje, że częstości QNM nie są wrażliwe na drobne szczegóły potencjałów, ale są w zasadzie zależne tylko od równania stanu (prędkość dźwięku  $c_s^2(T)$ ).

W celu sparametryzowania zależności tłumienia od odchylenia od konformalności, proponujemy fenomenologiczny wzór wyrażający to jako liniową kombinację z  $c_s^2 - 1/3$  i  $T \frac{d}{dT} c_s^2(T)$ . W szczególności, twierdzimy, że

$$\text{Im } \mathfrak{w} - \text{Im } \mathfrak{w}_{\text{conf}} = c_1 \left( c_s^2(T) - \frac{1}{3} \right) + c_2 T \frac{d}{dT} c_s^2(T), \quad (17)$$

gdzie  $c_i$  są parametrami fenomenologicznymi, a  $\text{Im } \mathfrak{w}_{\text{conf}} = -1.373$  jest konforemną wartością graniczną. Parametry te można być dopasowane do obliczonej numerycznie różnicy tłumienia w odniesieniu do przypadku konforemnego. Zależność

$$c_1 = -3.729, \quad c_2 = 0.452 \quad (18)$$

działa dobrze dla wszystkich potencjałów.

W lewym panelu na Rys. 2 prezentujemy wykres  $(\text{Im } \mathfrak{w} - \text{Im } \mathfrak{w}_{\text{conf}})$  wraz z dofitowaniem. Warto zauważyć, że podobnie jak dla części urojonej częstotliwości kwazynormalnych, części rzeczywiste częstotliwości odpowiadających różnym potencjałom są również bardzo zbliżone do siebie. Oznacza to, że częstości QNM są w zasadzie niewrażliwe na różnice w UV (ponieważ różne potencjały odpowiadają różnym  $\Delta$ ) i rządzą się fizyką w IR, czyli w zasadzie równaniem stanu.

Interesującą własnością relacji dyspersyjnej dla niehydrodynamicznych stopni swobody w konforemnym przypadku  $\mathcal{N} = 4$  teorii SYM jest bardzo łagodna zależność częstości  $\mathfrak{w}$  od pędu  $q$  w modach niehydrodynamicznych.

W prawym panelu na Rys. 2 pokazujemy, że dla teorii niekonforemnych ta własność trzyma się w jeszcze większym stopniu. Co ciekawe, krzywizna tłumienia tj.

$$\left. \frac{\partial^2 \text{Im } \mathfrak{w}}{\partial q^2} \right|_{q=0} \quad (19)$$

pokrywa się z zaskakującą dokładnością (przynajmniej do momentu, gdy  $T \sim T_c$ , potem zaczyna odbiegać) z prędkością dźwięku  $c_s^2$ , aż do ogólnego czynnika liczbowego określonego w konforemnej granicy wysokotemperaturowej (tj. równoważnie w  $\mathcal{N} = 4$  SYM).

## Hydrodynamiczne stopnie swobody

W referencjach [H2, H3] robimy kolejny krok w ilościowym określeniu odpowiedzi w czasie rzeczywistym silnie sprzężonej niekonforemnej teorii pola. Po pierwsze, analizujemy wszystkie dozwolone kanały perturbacji tensora energii-momentu i odpowiadające im dwupunktowe funkcje korelacyjne. Po drugie, koncentrujemy się na zjawiskach pojawiających się w pobliżu nietrywialnej struktury fazowej różnego typu: crossover (motywowany przez QCD), przejście fazowe drugiego rzędu oraz przejście fazowe pierwszego rzędu. Przypadki te są modelowane poprzez dobór odpowiednich potencjałów samo-interakcji pól skalarnych w pięcio wymiarowej holograficznej teorii Einsteina-dylatonu podanej w Równ. (5). Po trzecie, koncentrujemy się na najniższych niehydrodynamicznych QNM w stosunku do hydrodynamicznych, gdyż daje to wgląd w zakres stosowalności opisu hydrodynamicznego jako najdłużej żyjących modów w ośrodku. Wybrane potencjały zostały zestawione w Tab. 2.

potencjał	$B_0$	$\gamma$	$B_2$	$B_4$	$B_6$	$\Delta$
$V_{\text{QCD}}$	0	0.606	1.4	-0.1	0.0034	3.55
$V_{2\text{nd}}$	0	$1/\sqrt{2}$	1.958	0	0	3.38
$V_{1\text{st}}$	0	$\sqrt{7/12}$	2.5	0	0	3.41
$V_{\text{HQCD}}$	1	$\sqrt{2/3}$	6.25	0	0	3.58

Tablica 2: Potencjały wybrane do zbadania różnorodnych równań stanu wykazujących różną strukturę fazową oraz odpowiadające im wymiary konforemne pola skalarnego.

Parametry dla potencjału  $V_{\text{QCD}}$  zostały dobrane tak, aby odtworzyć dane z QCD na sieci z Ref. [15], oraz znany fakt, że układ posiada przejście typu *crossover* dla zerowej gęstości barionowej. Parametry potencjałów  $V_{1\text{st}}$  i  $V_{2\text{nd}}$  zostały dopasowane tak, że odpowiadające im równania stanu wykazują odpowiednio przejścia fazowe pierwszego i drugiego rzędu. W szczególności, dla przypadku rzędu pierwszego, w pewnym zakresie temperatur spodziewamy się niestabilności (spinodalnego) regionu. Konkretna postać ostatniego potencjału została zaprojektowana tak, aby naśladować niektóre dynamiczne aspekty QCD [19, 20] (np. asymptotyczną swobodę i uwięzienie koloru) i określamy ją jako potencjał Improved Holographic QCD (IHQCD).

Jest kilka nowych przewidywań, które możemy zrobić w oparciu o częstotliwości kwazinormalne. Pierwszym jest oszacowanie pędu, lub równoważnie długości, gdzie hydrodynamiczny opis układu ulega załamaniu. Dla przypadku CFT oszacowano to na  $q = 1.3$ , gdzie w kanale ścinającym pierwsz niehydrodynamiczny QNM zdominował dynamikę układu [21]. W tym samym czasie efekt ten nie pojawił się w kanale dźwiękowym CFT. Nowością, którą znajdujemy jest to, że widzimy to krzyżowanie<sup>3</sup> nie tylko w kanale ścinania, ale również w kanale dźwiękowym. To pokazuje, że nietrywialna struktura fazowa tła wpływa na stosowalność hydrodynamiki w sposób jakościowy. Innym aspektem jest to, że opis hydrodynamiczny obowiązuje w wystarczająco dużej skali długości (mniejszy moment krytyczny) co oznacza, że zastosowanie hydrodynamiki w pobliżu przejścia fazowego jest bardziej ograniczone niż w przypadku wysokotemperaturowym. W Tab. 3 podsumowujemy krytyczne momenty w dwóch kanałach i parametry hydrodynamiczne dla różnych potencjałów. Wszystkie wielkości są obliczone w odpowiednich temperaturach krytycznych.

W dalszej części tego rozdziału pokażemy wykresy QNM głównie dla kanału dźwiękowego, które przedstawiają charakterystyczną strukturę dla każdego potencjału. Ponieważ kanał ścinania we wszystkich przypadkach ma tę samą postać (z różnymi pędami krytycznymi) ograniczamy się do pokazania tylko jednego związanego z nim wykresu dla potencjału  $V_{\text{QCD}}$ .

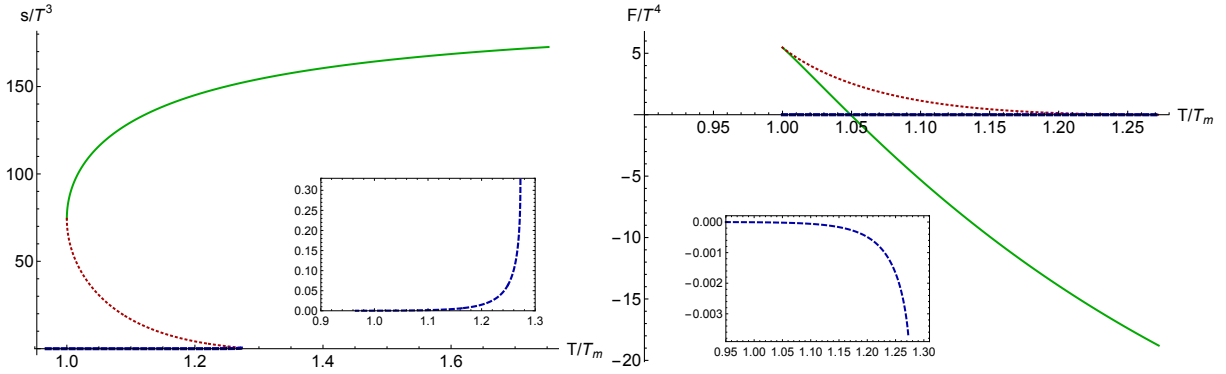
Należy zauważyć, że generalnie ultralokalność [H1] modu niehydrodynamicznego występuje jeszcze w krytycznym regionie diagramu fazowego. Jedynym obserwowanym wyjątkiem jest potencjał IHQCD,

<sup>3</sup>Tutaj przez krzyżowanie się modów rozumiemy krzyżowanie się w części urojonej modów hydrodynamicznych i najbardziej tłumionych modów niehydrodynamicznych.



potencjał	kanał dźwiękowy $q_c$	kanał ścinania $q_c$	$c_s^2$	$\zeta/s$
$V_{\text{QCD}}$	0.8	1.1	0.124	0.041
$V_{2\text{nd}}$	0.55	0.9	0.0	0.061
$V_{1\text{st}}$	0.8	1.15	0.0	0.060
$V_{\text{IHQCD}}$	0.14	1.25	0.0	0.512

Tablica 3: Pędy przy których pojawia się efekt krzyżowania modów w różnych kanałach oraz odpowiadające im wartości prędkości dźwięku oraz lepkości objętościowej odczytane z modu hydrodynamicznego. Wartości podane dla odpowiednich temperatur krytycznych ( $T_m$  dla  $V_{1\text{st}}$  dla  $V_{\text{IHQCD}}$ ).



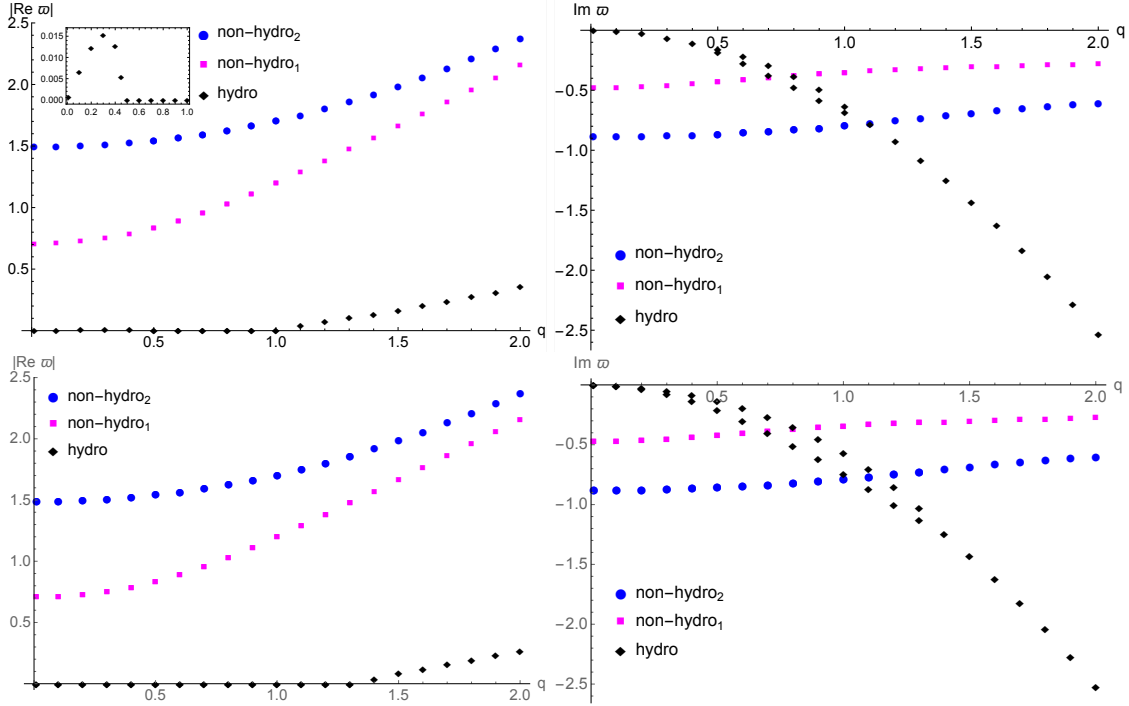
Rysunek 3: Lewy panel: Gęstość entropii dla potencjału  $V_{1\text{st}}$ . Zielona linia reprezentuje stabilny rejon, podczas gdy czerwona oznacza niestabilność. Prawy panel: Różnica energii swobodnej pomiędzy dwoma rozwiązaniami typu czarnej dziury w funkcji temperatury. Oszacowana temperatura krytyczna wynosi  $T_c \simeq 1.05T_m$ . Na obu wykresach  $8\pi G_N = 1$ . Wykresy z pracy [H2].

gdzie mody wykazują nietrywialne zachowanie. Większość interesującej dynamiki i obserwowanych efektów wynika z różnego zachowania modów hydrodynamicznych i tego, jak przecinają one najbardziej tłumione mody niehydrodynamiczne. Obejmuje to niestabilność i tworzenie się pęcherzyków w przypadku przejścia fazowego pierwszego rzędu.

W przypadku potencjału  $V_{1\text{st}}$  istnieją trzy charakterystyczne temperatury (por. Rys. 3). Pierwszą z nich jest minimalna temperatura  $T_m$ , poniżej której nie istnieje rozwiązanie niestabilne. Początek niestabilności obserwujemy w temperaturze  $T \gtrsim T_m$  (w gałęzi, w której  $c_s^2(T) < 0$ ), a generalnie spodziewamy się przejścia fazowego pierwszego rzędu, które pojawi się w temperaturze krytycznej  $T_c \geq T_m$ , która jest określona przez energię swobodną. Inną charakterystyczną temperaturę szacuje się na  $T_{\text{ch}} \simeq 1.0001T_m$ , co wynika z obserwacji, że dla pewnego zakresu pędów mody hydrodynamiczne stają się czysto urojone i nie propagują się w płazmie (por. górne panele na Rys. 4). Ten efekt pojawia się dla temperatur  $T_m \leq T \leq T_{\text{ch}}$ , w *stabilnym* rejonie równań stanu (zielona linia na Rys. 3). Zauważmy, że w tym modelu zachodzi nierówność  $T_m < T_{\text{ch}} < T_c$ .

Teraz przyjrzymy się strukturze modów kwazinormalnych w minimalnej temperaturze  $T_m$ , w której zielona i czerwona linia przerywana spotykają się na Rys. 3, a prędkość dźwięku znika. W dolnych panelach na Rys. 4 wykreślamy tylko mody kanału dźwiękowego. Można zauważyć w tym punkcie nowe zachowanie w porównaniu z przypadkami przejścia fazowego drugiego rzędu oraz przejścia typu *crossover*, tzn. mody hydrodynamiczne stają się czysto urojone (dyfuzyjne) dla  $q \leq 1$ .

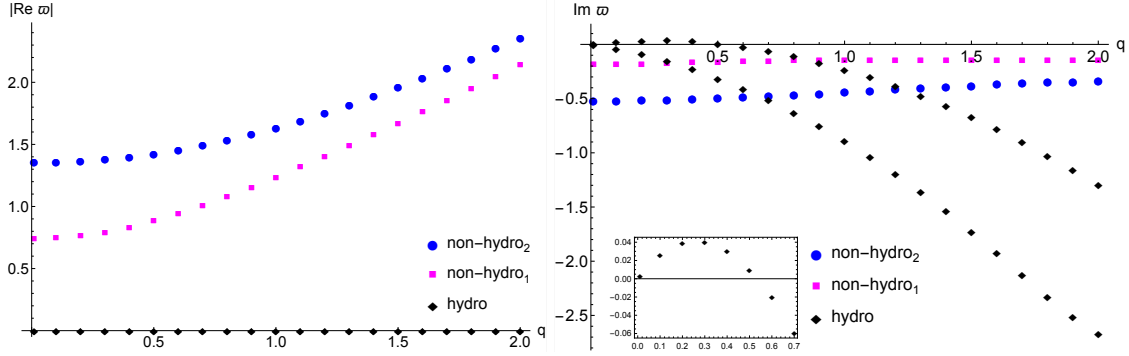
Najbardziej absorbująca fizyka jest odkrywana w regionie *spinodalnym* (czerwona przerywana linia Rys. 3), gdzie równanie stanu sugeruje niestabilność termodynamiczną, tzn.  $c_s^2 < 0$ . W literaturze przewi-



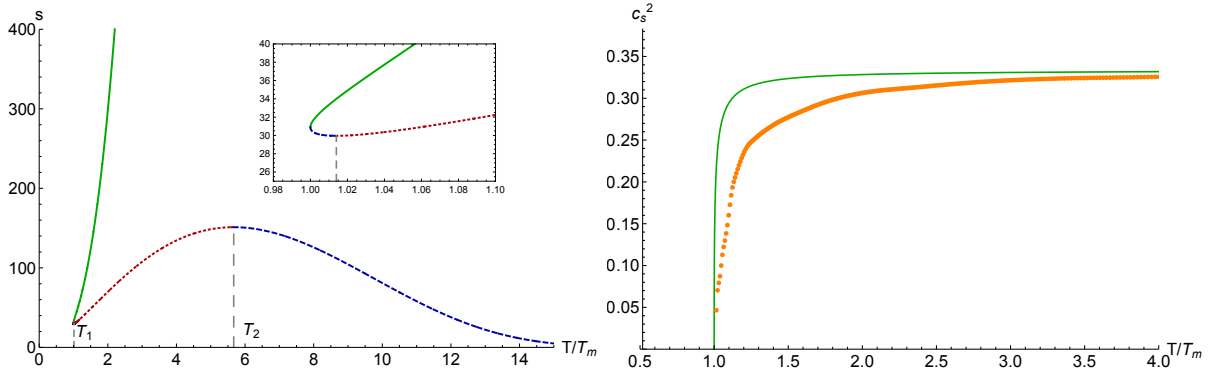
Rysunek 4: Na górnych panelach widzimy tryby kwazynormalne dla potencjału  $V_{1st}$  w  $T = 1.00004T_m$  a na dolnych dla  $T = T_m$ . Części rzeczywiste i urojone są odpowiednio w lewych i prawych panelach. Wykresy z pracy [H2].

dywano [22], że w tym zakresie temperatur powinna pojawić się odpowiednia niestabilność dynamiczna w najniższych modach kwazynormalnych. Zjawisko niestabilności badamy szczegółowo obserwując powstawanie bąbli w rejonie spinodalnym. Jest ono generalnie oczekiwane w przypadku przejścia fazowego pierwszego rzędu [23], a podobny efekt został zaobserwowany w kontekście grawitacyjnym przez Gregory'ego i Laflamme'a [24]. Tworzenie bąbli następuje, gdy  $c_s^2 < 0$ , co oznacza, że mod hydrodynamiczny jest czysto urojony  $\omega_H = \pm i|c_s|k - i\Gamma_s k^2$ . Dla wystarczająco małych  $k$  mod ze znakiem plus znajduje się w obszarze niestabilnym, tzn.  $\text{Im } \omega_H > 0$ . Dla większych pędów drugi człon zaczyna dominować, tak, że istnieje  $k_{\max} = |c_s|/\Gamma_s$ , dla którego mod hydrodynamiczny ponownie staje się stabilny. Skala bąbla to pęd, dla którego dodatnia część urojona modu hydrodynamicznego osiąga maksymalną wartość. Część ujemna niestabilnego modu hydrodynamicznego nazywana jest współczynnikiem wzrostu [23]. Warto zauważyć, że dla potencjału  $V_{1st}$  mod hydro jest czysto urojony aż do momentu  $q \approx 5$ , czyli w całym badanym zakresie. Interesującą obserwacją jest to, że wszystkie wyższe tryby pozostają w tym przypadku stabilne. Wykres ilustrujący ten efekt jest przedstawiony na Rys. 5.

Potencjał IHQCD określa unikalne równanie stanu, o bogatej strukturze pokazanej w lewym panelu na Rys. 6. Dwie gałęzie rozwiązań czarnych dziur są podzielone jak zwykle na konfiguracje duże (stabilne), i małe (niestabilne). Stabilne konfiguracje wykazują zachowanie o typowych cechach charakterystycznych dla układu z przejściem fazowym pierwszego rzędu, a odpowiadająca im prędkość dźwięku jest jakościowo podobna do układu składającego się z gluonów [25] (por. prawy panel Rys. 6). W odróżnieniu, niestabilna gałąź składa się z dwóch wyraźnych podgałęzi. Jedna z nich znajduje się w rozłącznym zakresie temperatur,  $T_m < T < T_1 = 1.014T_m$  i wykazuje niestabilność spinodalną sygnalizowaną przez urojona prędkość dźwięku. To z kolei implikuje powstawanie pęcherzyków. Druga podgałąź,  $T_1 < T < T_2$ , wykazuje anomalnie dużą



Rysunek 5: Kanał dźwiękowy modów kwazynormalnych potencjału  $V_{1st}$  w  $T \simeq 1.06T_m$ , gdzie  $c_s^2(T) \simeq -0.1$ . Pokazana jest niestabilność rejonu spinodalnego. Wykres z pracy [H2].



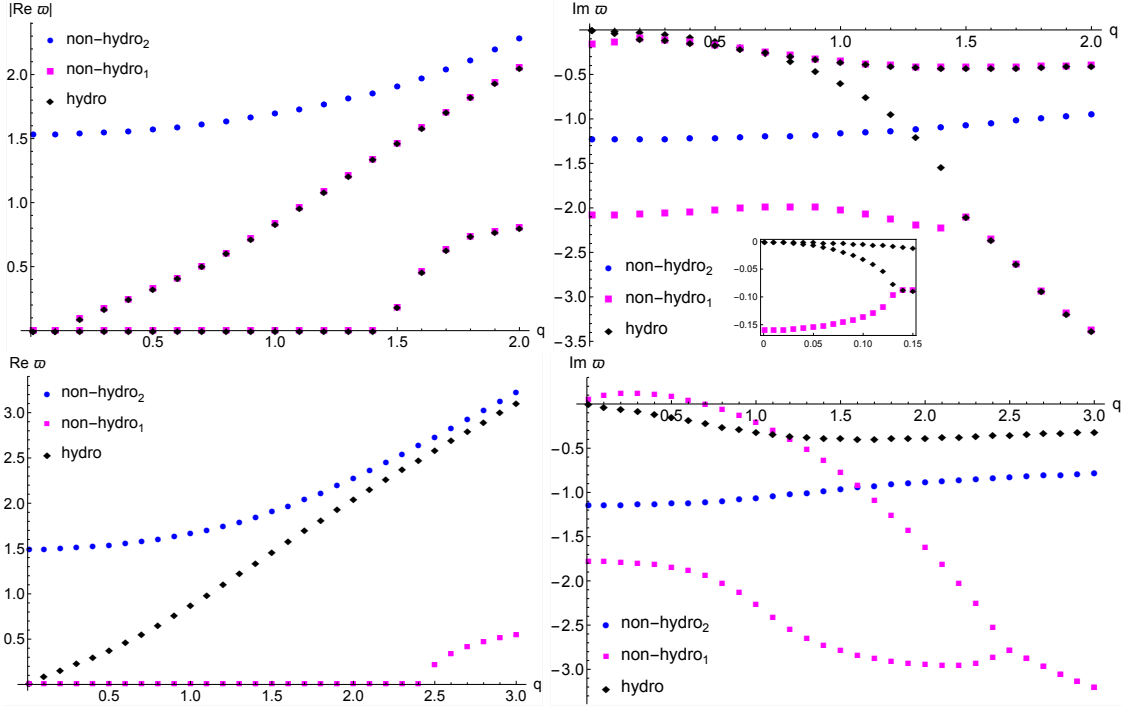
Rysunek 6: Lewy panel: Gęstość entropii w funkcji temperatury dla potencjału  $V_{HQCD}$  z  $\kappa_5 = 1$ . Prawy panel: Kwadrat prędkości dźwięku dla potencjału  $V_{HQCD}$  (zielona linia), oraz dane sieciowe dla gluonów  $SU(3)$  (pomarańczowe kropki) [25]. Czerwone oraz niebieskie linie przerywane w lewym panelu odpowiadają małym czarnym dziurom, które zawsze są niestabilne. Wykresy z pracy [H3].

prędkość dźwięku, ale nie wykazuje niestabilności na poziomie równań stanu. Jednak, jak zostanie pokazane poniżej, w tym zakresie temperatur istnieje niestabilny mod niehydrodynamiczny w widmie QNM.

Należy zauważyć, że w tym przypadku istnieje minimalna temperatura  $T_m$  poniżej której rozwiązanie w postaci czarnej dziury nie istnieje. Podobnie jak w przypadku  $V_{1st}$  początek niestabilności pojawia się przy  $T \gtrsim T_m$  (dla konfiguracji z  $c_s^2(T) < 0$ ). Oczekuje się, że w tym układzie nastąpi przejście fazowe rzędu pierwszego rzędu pomiędzy geometrią czarnej dziury z horyzontem zdarzeń, a geometrią ograniczającą próżnię w duchu przejścia fazowego Hawkinga-Page'a [26].

Odmierna struktura równań stanu znajduje odzwierciedlenie w zachowaniu częstotliwości modów kwazynormalnych, które wskazują na istnienie drugiej, charakterystycznej temperatury  $T_{ch} \simeq 1.102T_m$ . Nowatorskim efektem obserwowanym w tym układzie jest to, że dla temperatur bliskich minimalnej temperatury, ultralokalność pierwszego modu niehydrodynamicznego zostaje naruszona. Mod ten okazuje się być czysto urojony dla bardzo małych momentów i dla temperatur z przedziału  $T_m \leq T \leq T_{ch}$ . Istnieją dwa czysto urojone mody, które mają następującą postać

$$\omega_{\pm}(q) = i\chi(q) \pm i\xi(q). \quad (20)$$



Rysunek 7: Kanał dźwiękowy modów kwazynormalnych dla potencjału  $V_{\text{IHQCD}}$  przy  $T = T_m$  (górne panele) oraz przy  $T = 1.027T_m$  w gałęzi małych czarnych dziur (dolne panele). Wykresy z pracy [H3].

Na Rys. 7 pokazujemy mody kwazynormalne w kanale dźwiękowym obliczone dla  $V_{\text{IHQCD}}$  przy  $T = T_m$  (górne panele) i przy  $T = 1.027T_m$  (dolne panele). Struktura modów jest inna niż ta, która ogólnie występuje w innych przypadkach. Pierwszą rzeczą, którą widać jest to, że mody hydrodynamiczne są czysto urojone dla zakresu małych pędów. Ponadto istnieje niewielka różnica pomiędzy hydrodynamicznymi i niehydrodynamicznymi stopniami swobody przy dowolnie niskich pędach co z kolei implikuje, że przejście następuje przy bardzo małej wartości  $q_c \simeq 0.14$  (por. wstawkę na Rys. 7). W rzeczywistości, w tym przypadku w pobliżu  $T_m$  zawsze trzeba brać pod uwagę niehydrodynamiczne stopnie swobody w opisie dynamiki układu. Innym absolutnie fascynującym efektem obserwowanym dokładnie przy  $T_m$  jest to, że mody niehydrodynamiczne, które są czysto urojone dla niskich pędów, łączą się z hydrodynamicznymi przy pewnym skończonym pędzie  $q_J$  i podążają za nimi ze wzrostem  $q$ . Efekt ten jest zilustrowany w górnych panelach na Rys. 7), gdzie mod  $\text{non-hydro}_1$ , który ma dwie gałęzie łączy się z dwiema gałęziami modów hydrodynamicznych odpowiednio w punktach  $q_J \simeq 0.14$  i  $q_J \simeq 1.5$ . W tym samym czasie część rzeczywista rozwija się z oboma znakami, zgodnie z oczekiwaniami wynikającymi z ogólnych rozważań. Efekt ten implikuje naruszenie ultralokalności obserwowane ogólnie w innych modelach, a łączenie nie zachodzi dla temperatur wyższych niż minimalna. Ostatnią obserwacją z paneli pierwszego rzędu na Rys. jest to, że drugi mod niehydrodynamiczny, określane jako  $\text{non-hydro}_2$ , spełnia własność ultralokalności, a dla wysokich temperatur staje się modem wykrywającym w przypadku konforemnym [14].

Ostatnim punktem do omówienia jest widmo modów dla temperatur,  $T_1 < T < T_2$ , w gałęzi małej czarnej dziury która wykazuje anomalnie dużą prędkość dźwięku. Faktycznie  $c_s^2 > 1/3$ , a dla niektórych temperatur jest nawet superluminalna, co prowadzi do naruszenia przyczynowości. W tym zakresie temperatur układ nie wykazuje żadnych niestabilności w wielkościach termodynamicznych. Okazuje się jednak, że istnieje innowacyjna *dynamiczna* niestabilność, sygnalizowana przez dodatnią część urojoną

pierwszego modu niehydrodynamicznego (por. dolne panele Rys. 7) <sup>4</sup> Różnica w stosunku do zwykłego regionu spinoidalnego jest taka, że dla  $k = 0$  mod pozostaje dodatni na osi urojonej. Zachowanie podobne do tego, które występuje przy  $T = T_m$  występuje również tutaj: pierwszy mod niehydrodynamiczny pozostaje czysto urojony dla pewnego zakresu pędów i łączy się ze swoim partnerem, gdy rozwinie się część rzeczywista. Istotną różnicą w tym przypadku jest to, że łączenie następuje pomiędzy dwoma modami o tej samej naturze fizycznej.

### Zachowanie krytyczne szeregów hydrodynamicznych

Ref. [H4] jest poświęcona badaniu linearyzowanych, zależnych od czasu perturbacji silnie sprzężonej teorii  $\mathcal{N} = 4$  SYM w skończonej temperaturze i skończonym potencjale chemicznym z przejściem fazowym drugiego rzędu. Teoria ta jest modelowana przez odgórny opis Einsteina-Maxwella-dilatonu, który jest spójnym obcięciem redukcji wymiarowej teorii strun typu IIB na  $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ . Skupiamy się na sektorach Spin-1 i Spin-2 perturbacji, aby obliczyć zlinearyzowane współczynniki transportu hydrodynamicznego do trzeciego rzędu w rozszerzeniu gradientowym. Dodatkowo, obliczamy promień zbieżności modu hydrodynamicznego w sektorze Spin-1 oraz najniższych niehydrodynamicznych modów w sektorze Spin-2. Analitycznie pokazano, że wszystkie wielkości hydrodynamiczne mają ten sam wykładnik krytyczny w pobliżu punktu krytycznego  $\theta = 1/2$ . Ponadto, zaproponowano związek pomiędzy wzmocnieniem symetrii wyjściowej teorii a zanikiem jedyne hydrodynamicznego współczynnika transportu trzeciego rzędu  $\theta_1$ , który pojawia się w relacji dyspersji ścinania teorii konforemnej na płaskim tle.

Model odgórny (*ang.* top-down) definiowany jest przez samoodziałujący potencjał  $V(\phi)$  oraz sprzężenie Maxwella-dilatonu  $f(\phi)$  (por. równanie (1))

$$V(\phi) = -\frac{1}{L^2} (8e^{\frac{\phi}{\sqrt{6}}} + 4e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}), \quad f(\phi) = 4e^{-2\sqrt{\frac{2}{3}}\phi}, \quad (21)$$

a rozwiązania naładowanych statycznych stacjonarnych czarnych dziur, tzw. 1 – R charged black holes (1RCBH), są dane przez [27]

$$ds^2 = e^{2A(r)} \left( -H(r)dt^2 + d\vec{x}^2 \right) + \frac{e^{2B(r)}}{r^4 H(r)} dr^2, \quad (22)$$

$$A(r) = -\log r + \frac{1}{6} \log(1 + Q^2 r^2), \quad (23)$$

$$B(r) = \log r - \frac{1}{3} \log(1 + Q^2 r^2), \quad (24)$$

$$H(r) = 1 - \frac{M^2 r^4}{1 + Q^2 r^2}, \quad (25)$$

$$\phi(r) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \log(1 + Q^2 r^2), \quad (26)$$

$$\mathbf{A}(r) = MQ \left( \frac{r_H^2}{1 + Q^2 r_H^2} - \frac{r^2}{1 + Q^2 r^2} \right) dt, \quad (27)$$

gdzie  $r = 0$  to granica asymptotycznie  $\text{AdS}_5$  tła,  $r_H$  to horyzont  $H(r_H) = 0$ , a  $M$  i  $Q$  to odpowiednio masa i ładunek czarnej dziury. Temperatura Hawkinga  $T$  czarnej dziury i gęstość entropii Bekensteina są dane przez

$$T = \frac{2 + Q^2}{2\pi r_H \sqrt{1 + Q^2}}, \quad s = \frac{\pi^2 N_c^2 T^3}{16} (3 - y)^2 (1 + y), \quad (28)$$

<sup>4</sup>Nomenklatura ta została wybrana, ponieważ w wysokich temperaturach mod ten w sposób ciągły przekształca się w pierwszy mod niehydrodynamiczny.

gdzie, w kontekście korespondencji AdS/CFT [2], liczba kolorów w teorii brzegowej  $N_c$  i 5-wymiarowa stała grawitacyjna  $G_5$  są związane relacją  $\frac{L^3}{2G_5} = \frac{N_c^2}{\pi}$ . Dodatkowo, potencjał chemiczny teorii dualnej ma postać

$$\mu = \lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{A}_t(r) = \frac{Q}{\sqrt{1 + Q^2 r_H^2}}. \quad (29)$$

Łatwo zauważyć, że gdy parametr ładunku zniknie, odzyskamy geometrię tła AdS<sub>5</sub>-Schwarzschilda, jak można się spodziewać.

Łatwo pokazać, że  $\frac{\mu}{T} \in [0, \pi/\sqrt{2}]$  i dla danej wartości  $\frac{\mu}{T} \in [0, \pi/\sqrt{2}]$  istnieją dwa odrębne rozwiązania odpowiadające wartościom  $Q$ , natomiast  $\mu = \pi T/\sqrt{2}$  jest punktem łączenia się obu gałęzi. Stwierdzamy, że wielkości termodynamiczne tła 1RCBH rozbiegają się w punkcie łączenia, co pozwala stwierdzić, że jest to punkt krytyczny przejścia fazowego drugiego rzędu. W Pracy [28] pokazano, że rozwiązania w jednej gałęzi są stabilne, a w drugiej niestabilne. Podkreślimy, że punkt krytyczny jest końcem linii fazowej i nie istnieją rozwiązania czarnej dziury dla  $\frac{\mu}{T} > \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ . Tutaj interesują nas tylko stabilne geometrie i okazuje się, że wprowadzenie nowej zmiennej  $y$  jako

$$y \equiv \left(1 - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right)^{1/2}, \quad y \in [0, 1], \quad (30)$$

zarówno upraszcza nasze równania, jak i czyni bardziej zrozumiałymi badania w pobliżu punktu krytycznego. Łatwo zauważyć, że punktowi krytycznemu  $\mu/T = \pi/\sqrt{2}$  oraz tłu AdS<sub>5</sub>-Schwarzschilda,  $\mu = 0$ , odpowiadają odpowiednio  $y = 0$  i  $y = 1$ .

Aby rozszerzyć wcześniejsze badania hydrodynamiki dualnej do modelu 1RCBH [28] na wyższe rzędy rozwinięcia gradientowego zaczynamy od zbadania sektora Spin-2 z jedyną perturbacją metryczną  $h_{xy}$ , zgodnie z przepisem wyjaśnionym w [29]. W granicy hydrodynamicznej ( $\mathfrak{w} \rightarrow 0, \mathfrak{q} \rightarrow 0$ ) zlinearyzowane równanie może być rozwiązane rząd po rzędzie. Następnie obliczamy działanie na powłoce masy i zachowujemy wszystkie wyrazy kwadratowe w  $h_{xy}$ . W końcu, opóźnioną funkcję Greena, do trzeciego rzędu, można otrzymać biorąc drugą pochodną tego całkowitego działania względem źródła, co prowadzi do

$$G_{xy,xy}^R = \frac{N_c^2 \pi^2 T^4}{4} \left[ \frac{(3-y)^3(1+y)}{32} - \frac{2i\mathfrak{w}\alpha^4}{1+y} - \frac{4\alpha^4 q^2}{(1+y)(3-y)} \right. \\ \left. + \frac{4\mathfrak{w}^2 \alpha^4 (1 - 2 \log 2 + \log(1+y))}{(3-y)(1+y)} - \frac{i\mathfrak{w}^3}{8} \lambda_{17}^{(3)} + i\mathfrak{w}q^2 (\lambda_1^{(3)} - \lambda_{16}^{(3)} - \lambda_{17}^{(3)}) \right], \quad (31)$$

gdzie  $\alpha \equiv \frac{2\sqrt{1+r_H^2 Q^2}}{2+r_H^2 Q^2}$ , oraz  $\lambda_i^{(3)}$  są trzema współczynnikami transportu w trzecim rzędzie [12]. Teraz jesteśmy w stanie zastosować wzór Kubo [29] i obliczyć współczynniki transportu do trzeciego rzędu rozwinięcia gradientowego,

$$\eta = \frac{\pi N_c^2 T^3 (3-y)^2 (1+y)}{64}, \quad (32)$$

$$\kappa = \frac{N_c^2 T^2 (3-y)(1+y)}{32},$$

$$\tau_\pi = \frac{2 - 2 \log(2) + \log(1+y)}{\pi T (3-y)}, \quad (33)$$

$$\lambda_{17}^{(3)} = \frac{N_c^2 T (1+y)}{128\pi} \left( \log\left(\frac{4}{1+y}\right) \left( 8 + (1+y) \log\left(\frac{1+y}{4}\right) \right) + 2(3-y) \text{Li}_2\left(\frac{3-y}{4}\right) \right), \quad (34)$$

$$\lambda_1^{(3)} - \lambda_{16}^{(3)} = \frac{N_c^2 T (1+y)}{128\pi} \left( \log\left(\frac{4}{1+y}\right) \left( 16 + (1+y) \log\left(\frac{1+y}{4}\right) \right) + 2(3-y) \text{Li}_2\left(\frac{3-y}{4}\right) \right). \quad (35)$$

Łatwo sprawdzić, że lepkość ścinania spełnia uniwersalną zależność [30, 7]

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi}. \quad (36)$$

Jedną z charakterystycznych cech tych współczynników transportu jest ich zachowanie w pobliżu punktu krytycznego przejścia fazowego; wszystkie współczynniki transportu osiągają wartość krytyczną z tym samym wykładnikiem krytycznym  $\theta = \frac{1}{2}$ .

W sektorze Spin-1, poprzez zastosowanie formalizmu równań głównych [16, 17], sprzężone równania ruchu perturbacji niezmienników można zapisać w postaci rozłącznej. Główna zaleta tego podejścia jest dwójaka. Po pierwsze, pozwala ono na analityczne badania tego sektora. Po drugie, numeryczne obliczenia częstości modów kwazinormalnych będą mniej kosztowne. Zlinearyzowane równania mogą być uproszczone do równań rozłącznych jako

$$\begin{aligned} \square\Psi_{\pm} \pm W_{\pm}\Psi_{\pm} &= 0, \\ W_{\pm} &= \frac{r^2 (4Q^4 r^2 (M^2 r^4 + 1) + Q^2 (6M^2 r^4 + 7) + 5M^2 r^2) + 3}{(Q^2 r^2 + 1)^{7/3}} \pm \frac{4Mr^4 \sqrt{M^2 + \frac{q^2 Q^2}{\alpha^2}}}{(Q^2 r^2 + 1)^{4/3}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Okazuje się, że równanie ze znakiem ” + (−)” opisuje perturbację kanału ścinającego (poprzącną perturbację pola cechowania). Równanie (37) ze znakiem − nie posiada rozwiązań zgodnych z warunkiem hydrodynamicznym. Dlatego, aby znaleźć hydrodynamiczną relację dyspersyjną modu ścinającego zgodnie z receptą podaną w Pracy [29], rozwiązujemy równanie (37) ze znakiem ” + ” perturbacyjnie. Znajdujemy rozwiązania analitycznie do drugiego rzędu w  $\mathfrak{w}$ , a bezźródłowy warunek brzegowy prowadzi do następującej postaci krzywej spektralnej [31] w kanale ścinającym

$$\begin{aligned} F_{\text{shear}}(q^2, \mathfrak{w}) &= \mathfrak{w} + \frac{iq^2 (Q^2 + 2)}{4(Q^2 + 1)} - \frac{iq^4 (Q^2 + 2)^4}{64(Q^2 + 1)^3} \\ &- \frac{i\mathfrak{w}^2 \left[ Q^2 \log(4Q^2 + 4) + 2 \log(2Q^2 + 4) + 2\sqrt{Q^2 + 1} \cot^{-1}(\sqrt{Q^2 + 1}) - 2 \coth^{-1}(2Q^2 + 3) \right]}{2(Q^2 + 1)} \\ &+ \frac{\mathfrak{w}q^2 (Q^2 + 2) \left[ \sqrt{Q^2 + 1} \log\left(4\frac{Q^2 + 1}{Q^2 + 2}\right) + 2 \cot^{-1}(\sqrt{Q^2 + 1}) \right]}{8(Q^2 + 1)^{3/2}} + \mathcal{O}(\mathfrak{w}^3, \mathfrak{w}^2 q^2, \mathfrak{w}q^4, q^6) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Rozwiązując to równanie perturbacyjnie w  $q$ , można znaleźć relację dyspersji hydrodynamicznego modu ścinania

$$\mathfrak{w} = -i \frac{1}{3-y} q^2 - i \frac{4(y+1) \log(2) - 2(y+1) \log(y+1) - 4}{(y-3)^3 (y+1)} q^4 + \mathcal{O}(q^6). \quad (39)$$

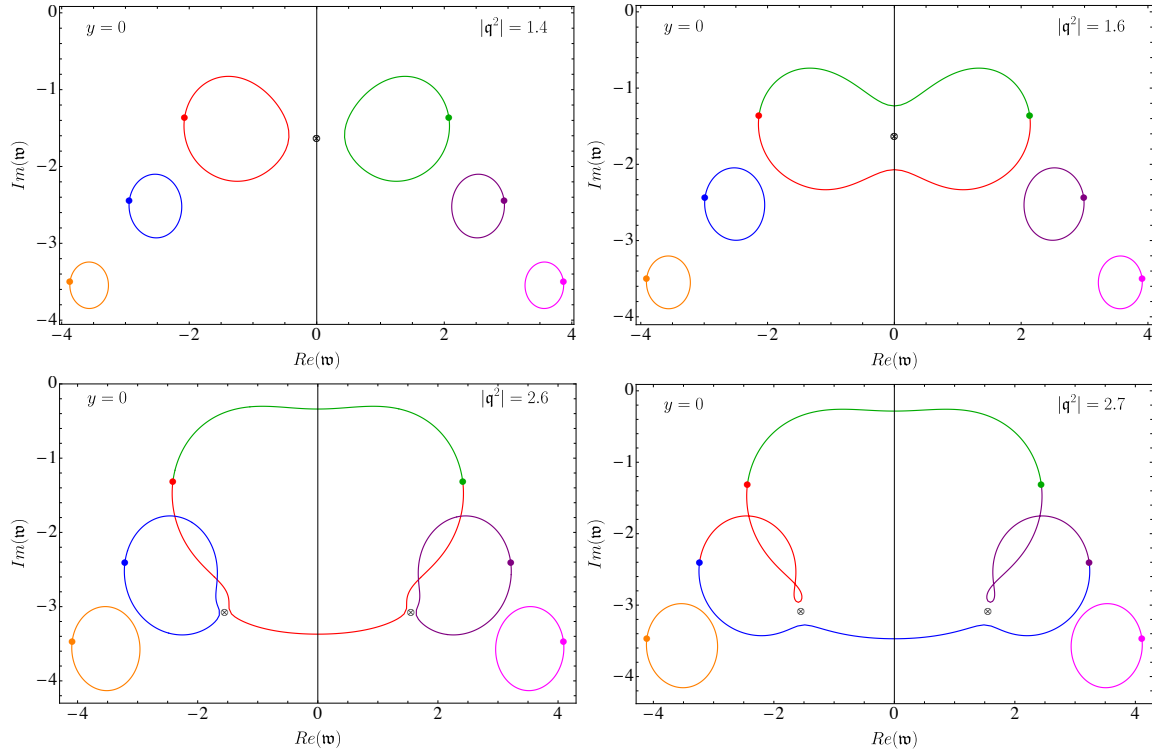
Porównując nasze wyniki z ogólną postacią relacji dyspersji w kanale ścinającym dla teorii konformalnych, (patrz równanie (7))

$$\omega = -i \frac{\eta}{\varepsilon + p} q^2 + \left( \frac{\eta^2 \tau_{\pi}}{(\varepsilon + p)^2} - \frac{1}{2} \frac{\theta_1}{\varepsilon + p} \right) q^4 + \mathcal{O}(q^6), \quad (40)$$

można znaleźć odpowiedni współczynnik transportu trzeciego rzędu  $\theta_1$

$$\theta_1 \equiv -(\lambda_1^{(3)} + \lambda_2^{(3)} + \lambda_4^{(3)}) = \frac{N_c^2 T}{32\pi} y. \quad (41)$$

Zwróćmy uwagę, że w punkcie krytycznym przejścia fazowego  $\theta_1$  znika. Może to być wskazówką na wzmocnienie symetrii teorii bazowej w punkcie krytycznym. Można to zjawisko porównać do zanikającej lepkości objętościowej dla teorii o symetrii konforemnej.



Rysunek 8: Trajektoria najniższych modów kwazinormalnych w sektorze Spin-2 w punkcie krytycznym ( $y = 0$ ). W pierwszym rzędzie pokazane są trajektore przed oraz po pierwszej kolizji pomiędzy najniższymi modami w  $|q_*^2| = 1.505$  oraz  $w_* = -1.637i$ . W drugim rzędzie pokazane są trajektorie przed i po drugim zderzeniu w  $|q_*^2| = 2.621$  oraz  $w_* = \pm 1.551 - 3.081i$ . Wykresy z pracy [H4].

Po analitycznym zbadaniu zlinearyzowanego równania, obliczamy częstości modów kwazinormalnych w sektorach Spin-2 i Spin-1 związane z biegunami odpowiadającej im opóźnionej funkcji Greena teorii brzegowej przy użyciu metod wyjaśnionych wcześniej. Tutaj rozważamy zespolony kwadrat pędu

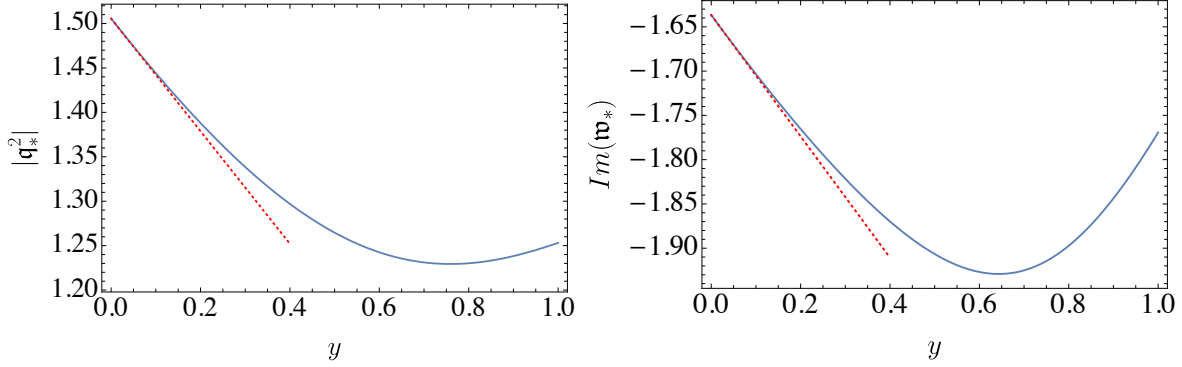
$$q^2 = |q^2|e^{i\varphi} \quad (42)$$

a następnie obliczamy częstości modów kwazinormalnych.

Znajdowanie promienia zbieżności dla szeregów jest ciekawym zagadnieniem w analizie zespolonej [32]. Załóżmy, że mamy krzywą analityczną (spektralną)  $\mathcal{T}(u, v) = 0$  zmiennych zespolonych  $(u, v)$  na płaszczyźnie zespolonej i chcemy znaleźć  $v_* = v(u)$ . Rozwiązania te są klasyfikowane jako punkty regularne i punkty krytyczne. Punkty regularne to zera krzywej, dla których  $\frac{\partial^i \mathcal{T}}{\partial v^i} |_{v=v_*(u)} \neq 0$  for  $i \geq 1$  natomiast punkty krytyczne rzędu  $j$  to miejsca zerowe, które spełniają warunek  $\frac{\partial^i \mathcal{T}}{\partial v^i} |_{v=v_*(u)} = 0$  dla  $1 \leq i \leq j$ . Z definicji, promień zbieżności dla  $v_*$  jest określony przez położenie najbliższego punktu krytycznego względem początku. W punkcie krytycznym istnieje zatem degeneracja rozwiązań, która określa promień zbieżności. Jak wyjaśniono szczegółowo w [33], zgodnie z twierdzeniem funkcji uwikłanej, mogą istnieć dwa źródła osobliwości krzywych spektralnych: nieanalityczność krzywych spektralnych i istnienie punktów krytycznych. W badanych przez nas przypadkach nie znaleźliśmy śladu nieanalityczności krzywych spektralnych dla pędów mniejszych lub równych pędowi krytycznemu.

Najpierw rozważymy perturbacje w sektorze Spin-2 i obliczymy numerycznie odpowiadające im mody kwazinormalne. Ponieważ w tym sektorze nie ma modu hydrodynamicznego, możemy jedynie znaleźć





Rysunek 9: Lewy panel: Obliczona numerycznie zależność od  $y$  promienia zbieżności najniższego, niehydrodynamicznego modu w sektorze Spin-2. Prawy panel: Częstotliwość dla której najniższe niehydrodynamiczne mody ulegają kolizji. Na obu panelach ciągłe niebieskie linie przedstawiają rezultaty obliczeń numerycznych, podczas gdy przerywane czerwone linie przedstawiają fitowanie bliskie punktu krytycznego dane równaniem (43). Wykresy z pracy [H4].

promień zbieżności modów niehydrodynamicznych i skupimy się tylko na najniższych modach. W małych wartościach  $|q^2|$  każdy z modów ma zamkniętą trajektorię dla  $\varphi$  z zakresu od 0 do  $2\pi$ , natomiast dla większych wartości mody mogą się zderzać i dzielić swoje trajektorie. Ze względu na symetrię zderzenie par modów przebiega zawsze na osiach urojonych w płaszczyźnie częstotliwości zespolonych z czysto urojonym pędem. Trajektorie modów kwazinormalnych są jakościowo takie same dla całego zakresu  $y$ . Na Rys. 8, jako przykład, ilustrujemy trajektorie modów przed i po pierwszej kolizji dla  $y = 0$ . Na Rys. 9 pokazujemy promień zbieżności najniższego modu w sektorze Spin-2, a także odpowiadającą mu częstość jako funkcje  $y$ . W pobliżu punktu krytycznego promień zbieżności i odpowiadająca mu częstość są funkcjami liniowymi w  $y$ , które mogą być dopasowane przez

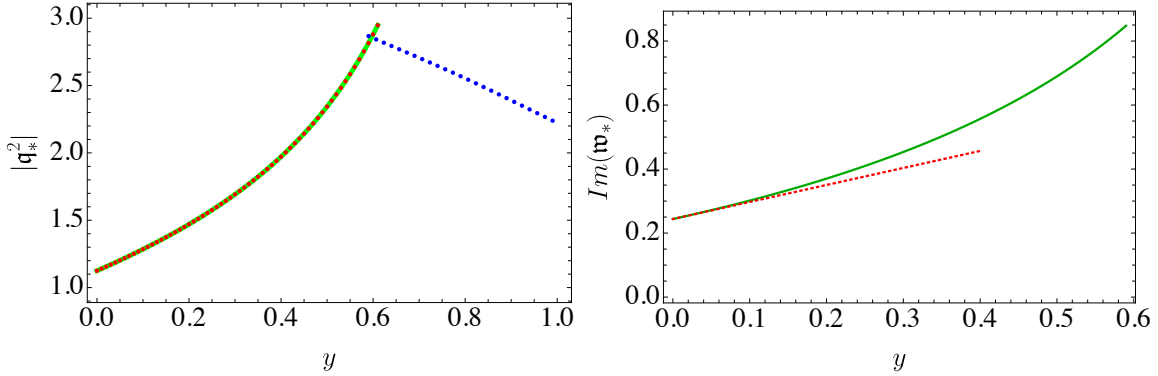
$$|q_*|^2 \simeq 1.505 - 0.634 y, \quad \text{Im}(w_*) \simeq 1.637 + 0.685 y. \quad (43)$$

O tych relacjach porozmawiamy później.

Teraz rozważmy sektor Spin-1, włączając w to kanały pola ścinającego i poprzecznego pola cechowania (por. tabela 1) i obliczymy najniższe mody kwazinormalne przy użyciu technik numerycznych. Ponownie, w małych wartościach  $|q^2|$  każdy tryb ma zamkniętą trajektorię dla  $\varphi$  od 0 do  $2\pi$ . Innymi słowy, w tym reżimie każdy mod może być znaleziony jednoznacznie na zespolonej płaszczyźnie pęd-kwadrat. Z drugiej strony, dla większych wartości  $|q^2|$  może to ulec zmianie ze względu na przecinanie się poziomów lub kolizję modów [34]. W istocie, w zależności od tego, jak daleko od punktu krytycznego znajduje się ośrodek, może wystąpić każde z tych zjawisk. Tutaj przedstawiamy kilka wykresów trajektorii częstości modów kwazinormalnych dla zespolonego kwadratu pędu i omawiamy główne cechy w różnych reżimach. Jednym z celów jest zbadanie promienia zbieżności szeregu hydrodynamicznego w całym zakresie naszego modelu, a w szczególności w pobliżu przejścia fazowego drugiego rzędu.

Aby obliczyć mody kwazinormalne układu w zespolonym kwadracie pędu, stosujemy formalizm równań głównych. Rozsprężone zlinearyzowane równania są dane wzorem (37) oraz, jak zauważono w [35, 36] występuje kolizja modów ze względu na pojawienie się pierwiastka kwadratowego w ostatnim członie potencjałów  $W_{\pm}$ . Jeśli najniższa kolizja modów hydrodynamicznych występuje w tym  $|q^2|$ , to promień zbieżności może być związany z tym zjawiskiem,

$$|q_*|^2 = -\frac{\alpha^2 M^2}{Q^2} = \frac{(3-y)^2(y+1)}{8(y-1)}. \quad (44)$$



Rysunek 10: Lewy panel: zależność od  $y$  promienia zbieżności modu ścinającego Czerwone oraz niebieskie przerywane linie stanowią wynik obliczeń numerycznych podczas gdy zielone ciągłe linie są wynikiem analitycznym danym równaniem (44). Prawy panel: Częstotliwości dla wartości  $0 \leq y \leq 0.596$  (ciągła zielona linia) oraz liniowe dofitowanie w pobliżu punktu krytycznego zadane równaniem (46). Wykresy z pracy [H4].

Można łatwo pokazać, że pęd krytyczny podany w równaniu (44) ma prosty wyraz w postaci zmiennych termodynamicznych

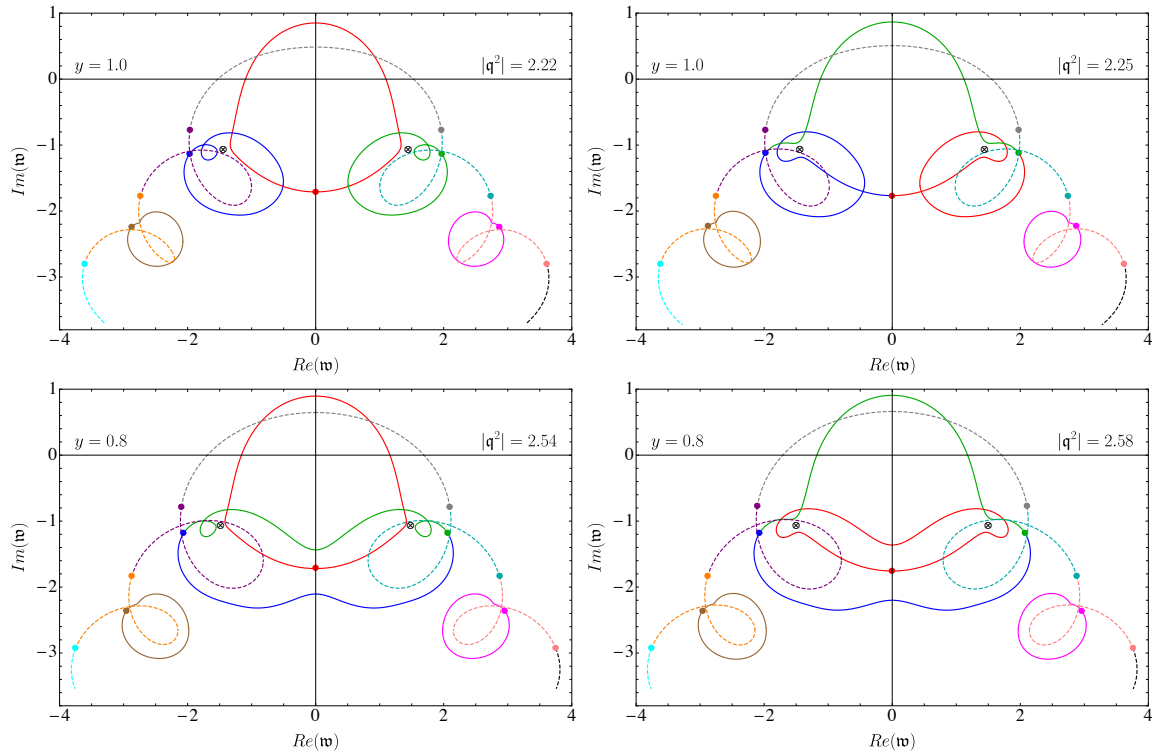
$$q_* = i \frac{\varepsilon + p}{\pi \rho}. \quad (45)$$

Ten punkt rozgałęzienia jest typu kwadratowego i przy tej wartości pędu mody ścinania i poprzeczne mody cechowania spełniają te same równania ruchu. Dlatego dla każdego modu w pierwszym z nich istnieje kuzyn w drugim, z którym spotykają się one przy krytycznym pędzie. Innymi słowy, promień zbieżności hydrodynamiki jest ograniczony przez skrzyżowanie modu hydrodynamicznego z jednym z modów w poprzecznym kanale cechowania.

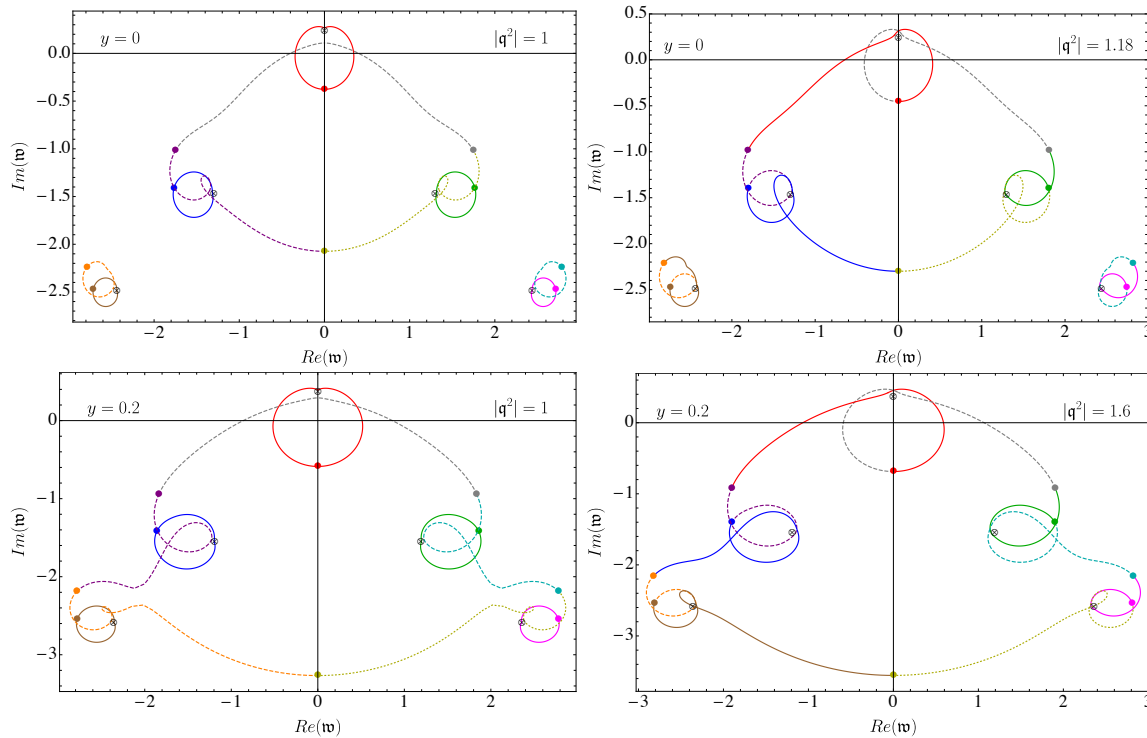
Nasze główne wyniki można podsumować na Rys. 10 na którym pokazana jest zależność promienia zbieżności od  $y$ , gdzie wskazuje się, że istnieją co najmniej dwie różne struktury dla zderzenia pierwszego modu hydrodynamicznego modu kwazinormalnego. W lewym panelu, czerwone i niebieskie przerywane linie są tym, co obliczyliśmy numerycznie, podczas gdy ciągła zielona linia jest analitycznym wzorem na promień zbieżności (44) znalezionym poprzez zastosowanie formalizmu równań głównych [37]. W prawym panelu pokazujemy odpowiednią częstość dla  $0 \leq y \leq 0.596$  (zielona linia ciągła) oraz liniowe dopasowanie w pobliżu punktu krytycznego podane przez

$$-i\omega = 0.244 + 0.531 y. \quad (46)$$

Istnieje kilka intrygujących reżimów parametru  $y$ , które badamy osobno w dalszej części rozprawy. Zaczniemy od ponownego obliczenia modów dla czarnej brany AdS-Schwarzschilda odpowiadającej  $y = 1$ . W tym przypadku możemy porównać nasze wyniki z tym, który jest już znany [31]. Wprowadzamy również nasze konwencje prezentacji trajektorii modów. W pierwszym rzędzie Rys. 11 pokazujemy trajektorie najniższych modów w sektorze Spin-1 jako funkcje złożonych momentów przy  $y = 1$ . W tym przypadku, dla rzeczywistych pędów częstości modów kwazinormalnych są dwiema choinkami: jedna dla modów ścinających, a druga dla poprzecznych modów cechowania [14]. Co ciekawe, pierwsze przecięcie poziomów (*level-crossing*) zachodzi pomiędzy poprzecznymi modami cechowania przy  $|q^2| = 2.224$  co jest zgodne z [31]. Zatem z definicji promień zbieżności hydrodynamiki wynosi  $|q_*^2| = 2.224$ . Zauważmy również, że dla rzeczywistych pędów niehydrodynamiczne mody z dwóch kanałów są zawsze w parze i w interesującym nas reżimie są one takie, że ten z perturbacji ścinania jest mniej tłumiony niż ten z perturbacji poprzecznego pola



Rysunek 11: Trajektoria najniższego modu kwazinormalnego w kanale ścierania (ciągłe linie) oraz w kanale poprzecznym pół cechowania (linie przerywane) w  $y = 1$  (czarna brana AdS-Schwarzschild) w pierwszym rzędzie wykresów, oraz dla  $y = 0.8$  w rzędzie drugim. Panel lewy (prawy) przedstawiają trajektorie najniższych modów przed (po) kolizji, która pojawia się dla  $|q_*^2| = 2.224$  oraz  $|q_*^2| = 2.553$  odpowiednio w  $y = 1, 0.8$ . Kolizja modów hydrodynamicznych oraz najniższych niehydrodynamicznych modów ścierania prowadzi do wymiany ich trajektorii a nie do złączenia w jedną wspólną trajektorię. To jest tak zwany *level-crossing* [31]. Wykresy z pracy [H4].



Rysunek 12: Trajektorie najniższych modów kwazynormalnych w kanale ścinania dla różnych wartości amplitudy zespolonego kwadratu pędu  $|q^2|$  dla  $y = 0, 0.2$ . Kolory są takie same jak na Rys. 11 aby śledzić mody ścinania oraz poprzeczne pola cechowania w sprzężonym układzie. Łączenie modów ma miejsce odpowiednio w  $w = 0.244i$  oraz  $w = 0.370i$ . Wykres z pracy [H4].

cechowania. Będzie tak przez całą drogę. Taka sytuacja będzie miała miejsce aż do  $y = 0$ . W innych wykresach przedstawionych w tym rozdziale używamy tych samych kolorów dla modów i ich trajektorii. Odpowiednie mody, dla rzeczywistych momentów pędu są pokazane przez kropki, a pozycje zderzeń trybów są pokazane przez skrzyżowane koła.

O ile w pobliżu  $y = 1$  promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego wynika z przecięcia poziomu między modem hydrodynamicznym a najniższym niehydrodynamicznym modem ścinającym, to dla  $0.596 < y < 0.89$  już tak nie jest. *Level-crossing* zostanie zastąpiony kolizją, a częstość hydrodynamiczna nadal będzie miała zamkniętą trajektorię.<sup>5</sup> Widać to w drugim rzędzie Rys. 11 dla  $y = 0.8$ . Dla tego tła promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego wynosi  $|q_*^2| = 2.553$  co wiąże się z kolizją modów przy  $q_*^2 = 2.10475 \pm 1.44493i$  oraz  $w = \pm 1.48974 - 1.06122i$ .

Jak pokazujemy na Rys. 10 promień zbieżności ma maksymalną wartość przy  $y = 0.596$  i dlatego można się spodziewać, że wokół tego punktu może się coś ciekawego wydarzyć. Przy  $y = 0.596$  promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego wynosi  $|q_*^2| = 2.854$ , gdzie krzyżują się dwa reżimy. Związane z tym punktem jest zderzenie hydrodynamicznego modu z niehydrodynamicznym modem ścinania przy  $q_*^2 = 2.28767 \pm 1.70642i$  oraz  $w = \pm 1.5247 - 1.0434i$  jak również przecięcie poziomu z niehydrodynamicznym poprzecznym modem pola cechowania przy  $q_*^2 = -2.854$  and  $w = 0.86i$ . Najważniejszym elementem jest tutaj fakt, że promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego wynika z wielu efektów jednocześnie: przecięcia poziomów i zderzenie modów kwazynormalnych jednocześnie.

<sup>5</sup>Przez kolizję modów rozumiemy, że zamieniają one część swoich trajektorii w taki sposób, że nadal mają rozłączne trajektorie.

Wreszcie na Rys. 12 pokazujemy trajektorię najmniej tłumionych modów w sektorze Spin-1 jako funkcje zespolonych pędów w punkcie krytycznym przejścia fazowego drugiego rzędu  $y = 0$  w pierwszym rzędzie wykresów i  $y = 0.2$  w drugim rzędzie wykresów. Ponownie, pierwsze przecięcie poziomów następuje pomiędzy najniższymi niehydrodynamicznymi modami poprzecznego pola cechowania. Jest to zawsze prawdziwe dla każdej wartości  $0 \leq y \leq 1$ . Promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego wynosi  $|q_*^2| = \frac{9}{8}$  dla  $y = 0$  oraz  $|q_*^2| = 1.47$  dla  $y = 0.2$ . Zauważmy, że w tym reżimie zawsze występuje nieskończona liczba skrzyżowań poziomów pomiędzy modami pola ścinającego i cechowania przy  $|q_*^2|$  ponieważ zlinearyzowane równania są takie same przy tej krytycznej wartości momentu pędu, patrz Eq. (37). Promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego w punkcie krytycznym,  $y = 0$ , jest prawie o połowę mniejszy niż jego odpowiednik  $\mathcal{N} = 4$  SYM,  $y = 1$  ze znikającym potencjałem chemicznym.

Podsumowując nasze wyniki, dla promienia zbieżności szeregu hydrodynamicznego w kanale ścinającym chcielibyśmy zwrócić uwagę, że istnieje konkurencja pomiędzy najniższymi modami niehydrodynamicznymi w kanale ścinającym i tymi w kanale poprzecznym o przyłączenie się do modu hydrodynamicznego. W zakresie  $0 \leq y < 0.596$ , który kończy się w punkcie przejścia fazowego, te drugie są odpowiedzialne, natomiast w zakresie  $0.596 < y \leq 1$  te pierwsze przejmują główną rolę w określaniu promienia zbieżności szeregu hydrodynamicznego.

Jak już wspomniano, teoria, którą badamy w tej pracy, cieszy się punktem krytycznym przy  $\mu/T = \pi/\sqrt{2}$ . Zbadano zachowanie różnych obserwabli w pobliżu tego punktu krytycznego i pokazano, że mają one ten sam wykładnik krytyczny,  $\theta = \frac{1}{2}$ . Wszystkie wielkości pozostają skończone (z wyjątkiem stałej dyfuzji, która znika), natomiast ich nachylenia rozbiegają się w punkcie krytycznym. Rozszerzając nasze wyniki dla współczynników transportu jak również promień zbieżności szeregu hydrodynamicznego  $|q_*^2|$  w pobliżu punktu krytycznego, (Równ. (32), (41), (43), (44), (46)) łatwo pokazać, że wszystkie one są liniowe w  $y$ , gdy  $y \rightarrow 0$ . Jest to typowy wykładnik krytyczny dla teorii pola średniego [38], związany z granicą dużego  $N_c$  [39]. Intrygujące jest oczekiwanie, że inne wielkości dynamiczne, takie jak wyższe współczynniki transportu, mogą mieć to samo zachowanie krytyczne w pobliżu punktu przejścia.

## Poprawki skończonego sprzężenia

Metody dualnej grawitacji mogą być wykorzystane do wyznaczenia zależności od stałej sprzężenia wielu wielkości fizycznych, a ostatecznym celem jest interpolacja pomiędzy wynikami słabego i silnego sprzężenia oraz opisanie, przynajmniej jakościowo, zachowania pośredniego sprzężenia w teoriach o znaczeniu fenomenologicznym. W ref. [H5] zrobiliśmy krok naprzód w tym kierunku i badamy zlinearyzowane równania ruchu w trójwymiarowej teorii grawitacji Born-Infelda (BI). Motywowani tym modelem, obliczamy za pomocą metod numerycznych kwazinormalne mody statyczno-stacjonarnych rozwiązań czarnych dziur w parzystych teoriach grawitacji w trzech wymiarach. Wyniki są sklasyfikowane w trzech rodzinach i są na tyle dokładne, że pozwalają nam zaproponować analityczną formę dla częstości kwazinormalnych. Znajdujemy nowe mody kwazinormalne, których brakowało w literaturze dotyczącej analitycznych badań trójwymiarowych masywnych grawitonów. Te nowe mody nie mają znanej struktury wieżowej i są niepropagujące dla dowolnej wartości pędu. Rozważając zupełny zbiór modów kwazinormalnych pokazujemy, że rozwiązania dla czarnych dziur są niestabilne dla dowolnych wartości parametrów teorii. Potwierdzamy nasze wyniki numeryczne obliczając analitycznie nowe funkcje własne przy zerowym pędzie.

Teoria grawitacji BI jest interesująca z różnych powodów. Można ją traktować jako resumację nieskończonej liczby poprawek wyższego rzędu w pochodnych do działania Einsteina-Hilberta, natomiast rozszerzając działanie BI w jego parametrze,  $1/m^2$ , można otrzymać teorię Nowej Masywnej Grawitacji (NMG) [40] i jej rozszerzone wersje [41] do dowolnego rzędu. Dlatego może ona stanowić odpowiedni układ do badania wpływu poprawek wyższych pochodnych na ciekawe własności fizyczne.

Z holograficznego punktu widzenia, korespondencja  $\text{AdS}_3/\text{CFT}_2$  została gruntownie przestudiowana w ostatnich trzech dekadach, w ramach badań zapoczątkowanych przez Browna i Henneauxa [42]. Z drugiej strony wiadomo, że dodanie wyższych pochodnych członów krzywizny w klasycznej teorii masywnej

gravitacji jest dualne do odejścia od silnie sprzężonego reżimu brzegowej teorii z cechowaniem. Dlatego działanie BI jest wygodną strukturą do badania efektów wyższych pochodnych w teorii masywnej i być może do badania skończonych wartości stałej sprzężenia, aż do słabo sprzężonego reżimu w dualnej teorii granicznej.

Rozszerzenie BI w NMG wprowadzone w pracy [43] ma postać

$$S_{\text{BI}} = -\frac{m^2}{4\pi G_{\text{N}}} \int d^3x \sqrt{-\det g} \left[ \sqrt{\det(\mathbf{1} + \frac{\sigma}{m^2} g^{-1} G)} - \lambda \right], \quad (47)$$

gdzie  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$  jest tensorem Einsteina  $m^2 > 0$  jest wymiarowym parametrem teorii,  $\sigma = \pm 1$  jest znakiem, oraz  $\lambda$  jest parametrem związanym ze stałą kosmologiczną. Rozwijając to działanie w potęgach parametru  $1/m^2$ , co jest w zasadzie rozwinięciem gradientowym, otrzymujemy ciekawy wynik

$$S_{\text{NMG}} = -\frac{m^2}{4\pi G_{\text{N}}} \int d^3x \sqrt{-\det g} \left[ (1 - \lambda) - \frac{\sigma}{4m^2} R - \frac{1}{32m^4} (8R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - 3R^2) + \mathcal{O}(R^3) \right]. \quad (48)$$

Wyraz zerowego rzędu daje działanie Einsteina-Hilberta ze stałą kosmologiczną  $\Lambda = \frac{2m^2(1-\lambda)}{\sigma}$ , a wyraz pierwszego rzędu odtwarza teorię NMG [40], która jest minimalną zachowującą parzystość masywną teorią gravitacją w trzech wymiarach.

Ponadto, można łatwo pokazać, że rozwinięcie działania BI do drugiego rzędu odtwarza rozszerzenie teorii NMG zaproponowane w pracy [41] wymagające istnienia holograficznego twierdzenia–*c*. Jest to fascynujące połączenie dwóch niezależnych podejść do badania poprawek wyższych pochodnych do działania Einsteina-Hilberta w trójwymiarowej gravitacji.

O ile bezpośrednio rozszerzenie NMG do wyższego rzędu wydaje się być niezwykle trudnym zadaniem, o tyle można rozwinąć działanie BI (47) do dowolnego rzędu pochodnych niezmienników krzywizny. Jedną istotną różnicą pomiędzy teorią BI, a jej dowolnie obcięta wersją pojawia się w ich rozwiązaniach próżniowych. O ile BI ma jedno rozwiązanie próżniowe, to modele okrojone mogą mieć kilka rozwiązań próżniowych.

Pokazujemy, że w poprzecznej bezśladowym cechowaniu (TT), zlinearyzowane równanie ruchu ulegają następującej faktoryzacji

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma}{L^2 m^2}}} \left( \square + \sigma m^2 + \frac{3}{L^2} \right) \left( \square + \frac{2}{L^2} \right) h_{\mu\nu} = 0. \quad (49)$$

Drugi nawias w równaniu (49) dotyczy bezmasowego grawitonu w geometrii BTZ, natomiast pierwszy odpowiada grawitonowi o masie

$$\mathbf{m}^2 = -\sigma m^2 \left( 1 + \frac{\sigma}{m^2 L^2} \right) = -\sigma m^2 \lambda^2. \quad (50)$$

Dlatego zlinearyzowane równanie dla masywnego modu, które chcemy rozwiązać, pasuje do ogólniejszego równania dla dowolnej parzystej teorii mianowicie,

$$(\square + a) h_{\mu\nu} = 0, \quad (51)$$

gdzie parametr  $a$  zależy od szczegółów teorii poprzez geometrię tła.

Rozważmy statyczną czarną dziurę BTZ we współrzędnych Eddingtona-Finkelsteina

$$ds^2 = \frac{L^2}{r^2} \left[ -\left(1 - \frac{r^2}{r_H^2}\right) dt^2 - 2dt dr + dx^2 \right], \quad (52)$$

gdzie  $L$  jest promieniem czasoprzestrzeni  $AdS_3$ .

Wykorzystując warunek cechowania TT można pokazać, że zlinearyzowane równanie (51) zredukuje się do dwóch sprzężonych równań dla perturbacji metrycznych  $h_{rr}$  i  $h_{xx}$  w taki sposób, że przy zerowym pędzie stają się one rozłączne. Dzięki zastosowaniu bezwymiarowych częstości i pędów  $(\mathbf{w}, \mathbf{q})$  jedynym wolnym parametrem w równaniach jest  $M \equiv \sqrt{3 - aL^2}$  i nie ma jawnej zależności od temperatury. Nasze wyniki numeryczne są na tyle dokładne, że można zaproponować następujące formy analityczne częstości, które są sklasyfikowane w trzech zbiorach

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n^{(1)} &= -i (M - 1 + 2n) \pm \mathbf{q}, & \mathbf{w}_n^{(2)} &= -i (M + 3 + 2n) \pm \mathbf{q}, & n &= 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{w}^{(3)} &= -i (1 - M^2 + (\pm \mathbf{q})^2). \end{aligned} \quad (53)$$

Trzeci zbiór ma zupełnie inne zależności nie tylko w parametrze  $M$ , ale także w pędzie  $\mathbf{q}$  takie, że są one czysto urojone dla dowolnej wartości parametrów w interesującej nas dziedzinie. Zauważmy, że dla każdej wartości pędu  $\mathbf{q}$  występuje degeneracja i według naszej wiedzy jest to pierwszy przykład w asymptotycznie AdS czarnych dziurach, istnienia unikalnych modów, które nie należą do żadnej wieży modów kwazinormalnych.

Z drugiej strony dla dowolnej wartości parametru  $M$  i skończonego pędu  $\mathbf{q}$  istnieją dwa niestabilne mody albo w pierwszym zbiorze, albo w trzecim zbiorze częstości podanych w równaniu (53). W tym przypadku wszystkie fluktuacje metryczne są sprzężone, co oznacza statyczną czarną dziurę BTZ dla dowolnej teorii, która ma masywny mod spełniający ogólne równanie (51), jest dynamicznie niestabilna w odniesieniu do wszelkich perturbacji o niezerowym momencie pędu.

## Dynamika czasu rzeczywistego

Najciekawsze pytania dotyczące dynamiki w czasie rzeczywistym teorii o nietrywialnej strukturze fazowej pozostają w sferze ewolucji nieliniowej. Podobnie jak w wielu innych badaniach z zakresu holografii numerycznej [44], tak i w tym przypadku, wygodnie jest posługiwać się współrzędnymi Eddingtona-Finkelsteina, które już wcześniej wykorzystaliśmy. W tej parametryzacji równanie ewolucji staje się równaniami pierwszego rzędu [44], z kolei pozwala na efektywne zastosowanie metod numerycznych. Z otrzymanej w ten sposób geometrii odczytujemy odpowiednie obserwable, jak np. funkcje  $n$ -punktowe, stosując holograficzną renormalizację [11].

W tym rozdziale wybraliśmy pracę w  $(3 + 1)$  wymiarowej czasoprzestrzeni objętościowej, która jest dualna do  $(2 + 1)$  wymiarowej teorii pola, ze względu na brak anomalii konforemnej w nieparzystych wymiarach. To z kolei sprawia, że rozwinięcia w pobliżu brzegu konforemnego są wolne od logarytmów, co pozwala na zastosowanie metod spektralnych Czebyszewa do całkowania numerycznego.

Nasza konkretna parametryzacja metryki jest dana przez

$$ds^2 = -A dt^2 - \frac{2 dt dr}{r^2} - 2 B dt dx + S^2 (G_1 dx^2 + G_2 dy^2 + 2\sqrt{G_1 G_2 - 1} dx dy) \quad (54)$$

gdzie  $t$  jest czasem Eddingtona-Finkelsteina, a  $r$  jest współrzędną holograficzną, a w ogólności  $A, B, S, G_i$  i pola materii są funkcjami  $(r, t, x, y)$ . Na brzegu  $r = 0$ , czas Eddingtona-Finkelsteina  $t$  pokrywa się z konwencjonalnym czasem Minkowskiego (lub w przypadku niezmiennika boostu rozważanym później, z podłużnym czasem własnym  $\tau$ ). Stąd na wszystkich naszych wykresach będziemy używać konwencjonalnej notacji Minkowskiego  $t$ .

Szczegóły dotyczące naszej procedury numerycznej przyjętej do przeprowadzenia ewolucji czasowej układu można znaleźć w pracy [H7], oraz w dodatku A w pracy [H8]. Przeprowadzając holograficzną renormalizację wyodrębniamy interesujące nas obserwable fizyczne - składowe tensora energii-pędu jak również wartość oczekiwaną operatora dualnego do masywnego pola skalarnego. Obserwable te są dane dzięki bliskiemu brzegu rozwinięciu współczynników metryki i pola skalarnego poprzez zastosowanie holograficznej renormalizacji [11].

## Dynamika w pobliżu przejścia fazowego pierwszego rzędu

W pracach [H6, H7] badamy w pełni nieliniową ewolucję czasową układu holograficznego posiadającego przejście fazowe pierwszego rzędu w różnych warunkach. W Ref. [H6] stan początkowy jest wybrany w rejonie spinodalnym diagramu fazowego i zawiera on niejednorodną perturbację w jednym z kierunków teorii pola,  $x$ . Stan końcowy w ewolucji czasowej wykazuje wyraźną separację fazową w postaci formowania się domen. Wyniki wskazują na istnienie bardzo bogatej klasy rozwiązań niejednorodnych czarnych dziur.

Naturalnym pytaniem, które się nasuwa jest to, czy stan końcowy będzie wykazywał domeny dwóch współistniejących faz o tych samych wartościach energii swobodnej. Naszym głównym wynikiem w pracy [H6] jest wykazanie po raz pierwszy że w przypadku układu niekonformalnego z holograficznym opisem dualnym taka separacja faz pojawi się dynamicznie poprzez ewolucję w czasie rzeczywistym od perturbacji w obszarze spinoidalnym. Odpowiednie gęstości energii dwóch składników stanu końcowego są bardzo zbliżone do odpowiednich gęstości energii wyznaczonych w temperaturze krytycznej. Sugeruje to, że układ posiada dynamiczne przejście, podczas którego różne obszary przestrzeni zostają zajęte przez różne fazy materii.

Model holograficzny, którego używamy, jest konstrukcją typu "bottom-up" (1) zawierająca grawitację Einsteina sprzężoną z rzeczywistym, samooddziałującym polem skalarnym o następujących parametrach potencjału oddziaływania:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad B_4 = -0.2. \quad (55)$$

Ten wybór parametrów jest dualny do odpowiedniej deformacji brzegowej konformalnej teorii pola z operatorem o wymiarze konforemny  $\Delta = 2$ . Gdy  $B_4 = 0$  potencjał jest taki jak w 4-wymiarowej  $\mathcal{N} = 2$  supergrawitacji po redukcji wymiaru z 11-wymiarowej supergrawitacji [45]. Struktura równowagowa tego modelu jest opisana w kategoriach dualnych geometrii czarnych dziur, charakteryzowanych poprzez określenie wartości pola skalarnego na horyzoncie zdarzeń, czyli  $\phi_H$ . Jak zwykle entropia i energia swobodna układu są z kolei dane wzorem Bekensteina-Hawkinga, oraz odpowiednio wartością działania na powłoce masy. Związana z tym termodynamika ujawnia pojawienie się przejścia fazowego pierwszego rzędu pomiędzy różnymi gałęziami geometrii czarnych dziur, co jest określone przez różnicę energii swobodnych. Rząd przejścia jest ustalony przez nieciągłość pierwszej pochodnej energii swobodnej układu. Ten efekt jest zilustrowany w lewym panelu Rys. 13. Wartość temperatury krytycznej wynosi  $T_c \simeq 0.246$  w jednostkach  $\Lambda = 1$  (patrz równ. (4)). Równanie stanu (EOS) jest pokazane w prawym panelu Rys. 13 jako temperaturowa zależność gęstości energii. Ten EOS jest podobny do pięciowymiarowego przypadku, który badamy w ref. [H2, H3], a szczegółowa analiza zlinearyzowanej dynamiki ujawniła, zgodnie z wiedzą ogólną, istnienie spinodalnego rejonu oddzielającego stabilne konfiguracje.

Do badania ewolucji czasowej układu przyjmujemy współrzędne EF (54) z następującym wyborem

$$G_1 = 1/G_2 = G, \quad (56)$$

gdzie wszystkie funkcje zależą od zmiennych  $(r, t, x)$ . Możemy przyjąć, że stan początkowy leży w rejonie spinodalnym diagramu fazowego i dodać do funkcji  $S$  perturbację zależną od  $x$ . Przez odpowiedni wybór funkcji perturbacyjnej

$$\delta S(r, t, x) = S_0 r^2 (1 - r)^3 \cos(kx), \quad (57)$$

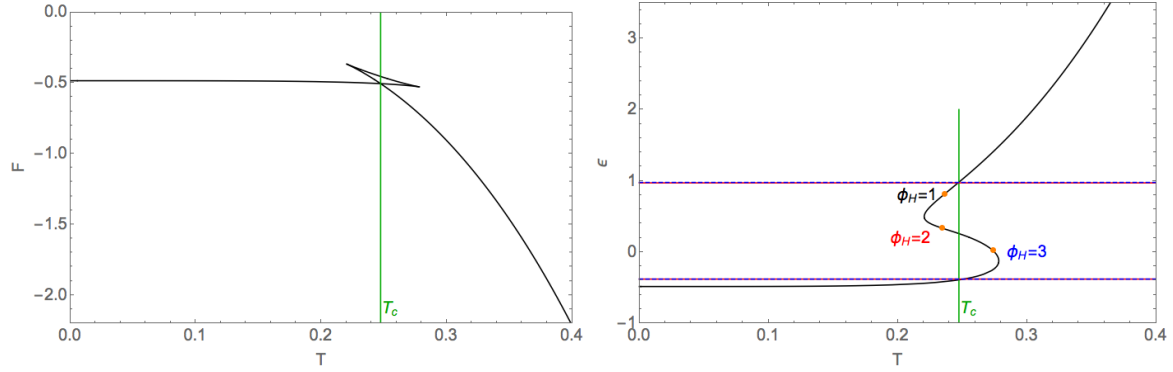
możemy wzbudzić konkretny mod niestabilny lub dodać mieszaną wszystkich modów

$$\delta S(r, t, x) = S_0 r^2 (1 - r)^3 \exp \left[ -w_0 \cos \left( \tilde{k}x \right)^2 \right], \quad (58)$$

zmieniając parametr  $w_0$ . Rozwiązując zależne od czasu równania Einsteina z dylatonem odpowiednimi warunkami brzegowymi AdS w  $r = 0$ ,<sup>6</sup> wyznaczamy nieliniową ewolucję układu. Używając procedury

<sup>6</sup>We współrzędnych EF  $A \sim 1/r^2 + \mathcal{O}(1)$ ,  $S \sim 1/r + \mathcal{O}(1)$ ,  $G \sim \mathcal{O}(r)$ ,  $B \sim \mathcal{O}(r)$  for  $r \rightarrow 0$ .





Rysunek 13: Lewy panel: Energia swobodna w funkcji temperatury. Prawy panel: Holograficzna gęstość energii w funkcji temperatury. Pionowa zielona linia reprezentuje temperaturę krytyczną. Pomarańczowe punkty reprezentują przykładowe konfiguracje początkowe dla nieliniowej ewolucji. Horyzontalne linie pokazują energię domen w stanie końcowym ewolucji (ciągłe linie - perturbacje z kosinusem, przerywane - perturbacje gaussowskie). Wykres z pracy [H6].

holograficznej renormalizacji odczytujemy następnie odpowiednie obserwable, takie jak tensor energii-pędu w teorii brzegowej z wyrazów podwiadających w rozwinięciu bliskim brzegu [11].

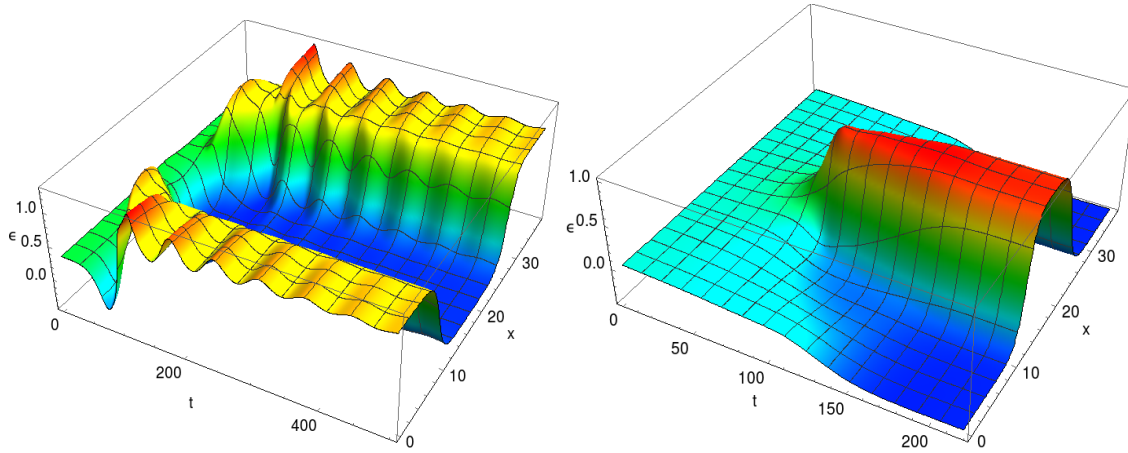
Układ jest zasadniczo badany w zespole mikrokanonicznym, gdyż całkowita gęstość energii układu jest stała w całej ewolucji. Grawitacyjne sformułowanie problemu jest teraz podane przez sprzężony zestaw nieliniowych cząstkowych równań różniczkowych. Rozwiązujemy ten problem numerycznie używając charakterystycznego sformułowania Ogólnej Teorii Względności [44] wraz z metodami spektralnymi [18]. W odpowiednim kierunku przestrzennym stosujemy okresowe warunki brzegowe z spektralną dyskretyzacją Fouriera. Pozostały kierunek przestrzenny jest nieskompaktowany.

Ponieważ dla tego układu gęstość energii w stanie równowagi jednoznacznie określa temperaturę, możemy wywnioskować, że końcowy stan ewolucji rozpoczynający się od niestabilnej gałęzi spinoidalnej z konieczności musi być niejednorodny. Fizyczne oczekiwanie, że stan końcowy będzie składał się z dobrze rozdzielonych faz w temperaturze przejścia fazowego  $T = T_c$  przejawiałoby się w istnieniu przestrzennych domen charakteryzujących się bardzo płaską gęstością energii, których wartości powinny pokrywać się z gęstościami energii dwóch stabilnych faz w temperaturze  $T = T_c$ . Fakt, że taka konfiguracja jest osiągnięta dynamicznie nawet przy inicjalizacji z punktów na gałęzi spinoidalnej o temperaturach różnych od  $T_c$  jest daleki od trywialnego. Jest to nasz główny wynik w ref. [H6].

Aby zilustrować efekt pojawiania się różnych faz w trakcie ewolucji czasowej przeprowadzamy symulacje dla kilku początkowych konfiguracji, obejmujących reprezentatywny obszar zainteresowania. Niektóre z tych konfiguracji są zaznaczone pomarańczowymi kropkami na Rys. 13. Jak zostało to wyjaśnione, używamy dwóch różnych kształtów funkcji perturbacyjnej podanej w równaniu (57) oraz (58) przy różnych wartościach parametrów. Szczególnie przejrzyste wyniki pojawiają się dla wartości pędu równej  $k = 1/6$  i  $\tilde{k} = 1/12$ , przy  $w_0 = 10$ , i te postanowiliśmy przedstawić. Amplitudy perturbacji znajdują się w przedziale  $S_0 = 0.1 - 0.5$ .

Pierwszym punktem zainteresowania jest konfiguracja dużej czarnej dziury o temperaturze poniżej  $T_c$ , ale nadal na stabilnej gałęzi np. z  $\phi_H = 1$ . Analiza liniowa nie wykazuje niestabilności takiej konfiguracji. Jednak można by się spodziewać nieliniowej niestabilności spowodowanej przechłodzeniem. W naszych symulacjach nie znaleźliśmy dowodów na to w ramach rozważanych modeli.

Drugi rozważany punkt, z  $\phi_H = 2$ , jest umieszczony głęboko w niestabilnym regionie. Zależność gęstości energii od czasu i przestrzeni jest pokazana na Rys. 14. Początkowo małe gaussowskie perturbacje rosną



Rysunek 14: Gęstość energii jako w funkcji czasu dla konfiguracji początkowej w niestabilnym rejonie spinodalnym:  $\phi_H = 2$  z perturbacją gaussowską (górny panel),  $\phi_H = 3$  perturbacja kosinusa (dolny panel). Wykresy z pracy [H6].

z czasem, a po około 400 jednostkach czasu symulacji zaczynają osiadać niejednorodny stan końcowy. Maksymalna i minimalna energia tego stanu, zaznaczone jako poziome linie ciągłe na Rys. 13, zbliżają się w zakresie mniejszym niż 1% do gęstości energii gęstości energii wyznaczonej przez temperaturę przejścia. Wyraźne płaskie obszary o stałej gęstości energii są widoczne na późnych etapach ewolucji. Widać wyraźnie, że w stanie końcowym różne części układu są zajęte przez różne fazy, połączone ścianą domenową.

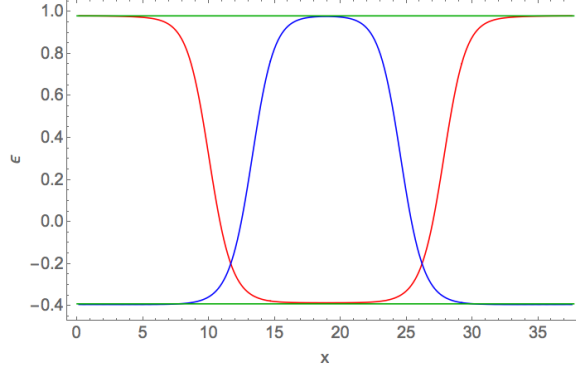
Trzecia rozpatrywana konfiguracja, o wartości  $\phi_H = 3$ , leży blisko końca regionu spinodalnego. Zależność czasowa gęstości energii w tym przypadku pokazana jest w dolnym panelu Rys. 14. Dodana perturbacja jest pojedynczym modem kosinusowym. W tym przypadku, po około 150 jednostkach czasu symulacji, konfiguracja osiada do niejednorodnego stanu końcowego. Maksymalna i minimalne gęstości energii tego stanu końcowego są oznaczone poziomymi, przerywanymi liniami na Rys. 13. Podobnie jak w poprzedniej konfiguracji ekstrema gęstości energii osiągają związane z nimi gęstości wyznaczone w temperaturze przejścia  $T = T_c$ . Jednak ze względu na fakt, że początkowa gęstość energii jest mniejsza od gęstości energii konfiguracji z  $\phi_H = 2$ , obserwujemy mniejszy obszar wysokoenergetycznej fazy w stanie końcowym.

Aby podsumować powyższe wyniki wyświetlamy gęstość energii końcowej stanu jako funkcję  $x$  na Rys. 15 dla obu niestabilnych konfiguracji początkowych. Temperatura Hawkinga dla geometrii stanu końcowego są stałe i równe temperaturze krytycznej  $T_c$ . Z punktu widzenia teorii pola jest to wyraźna demonstracja zjawiska koegzystencji, gdzie niejednorodny stan ma stałą temperaturę. Różne regiony przestrzeni są zajęte przez różne fazy połączone uniwersalnymi ścianami domenowymi. Innymi słowy, ściany domenowe pomiędzy różnymi regionami są unikalne i niezależne od szczegółów konfiguracji początkowej i ewolucji czasowej.

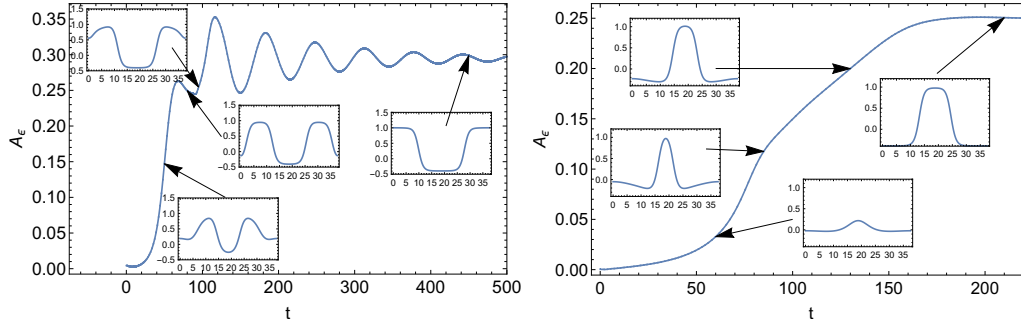
Pomimo tego, że w obu przedstawionych tu przypadkach stan końcowy jest raczej uniwersalny, to ewolucja czasowa jest znacząco różna. Wielką nowością naszego podejścia jest to, że szczegóły dynamicznego formowania się domen o różnych fazach mogą być ilościowo. W tym celu wygodnie jest wprowadzić następującą obserwację

$$A_\epsilon = \frac{1}{12\pi} \int_{\epsilon > \epsilon_0} \epsilon(t, x) dx, \quad (59)$$

gdzie  $\epsilon_0$  to średnia energia układu. Powyższa wielkość zasadniczo mierzy ilość energii *powyżej* średniej energii zgromadzonej w układzie w chwili  $t = t_0$ . Jak wyraźnie widać na Rys. 16 w każdym z rozważanych



Rysunek 15: Kończąca gęstość energii dla różnych stanów początkowych:  $\phi_H = 2$  (czerwony) oraz  $\phi_H = 3$  (niebieski). Horyzontalne zielone linie przedstawiają gęstość energii w temperaturze krytycznej w izotopowych rozwiązaniach. Wykresy z pracy [H6].



Rysunek 16: Zależność od czasu obserwabli  $A_\epsilon$  zdefiniowanej w Równ. (59). Lewy panel: Konfiguracje z warunkiem początkowym  $\phi_H = 2$ . prawy panel: Konfiguracje z warunkiem początkowym  $\phi_H = 3$ . Wstawki pokazują profile gęstości energii w wybranych chwilach czasu Wykresy z pracy [H6].

przypadków szczegóły dynamiki są inne.<sup>7</sup> Dla konfiguracji z  $\phi_H = 2$  początkowa perturbacja rozwija się w dwa pęcherzyki, które następnie oddalają się od centrum, a następnie gwałtownie łączą się w jedną domenę końcową. Z tego powodu do stanu końcowego zbliżamy się z dużymi, tłumionymi oscylacjami. Dla odmiany konfiguracja z  $\phi_H = 3$  wykazuje mniej gwałtowną ewolucję. Możemy zidentyfikować trzy etapy ewolucji w tym przypadku. Pierwszy to wykładniczy wzrost niestabilności, który ma miejsce mniej więcej aż maksymalna energia osiągnie gęstość energii równowagi. W drugim etapie następuje liniowy wzrost szerokości pęcherzyków przy stałej wysokości, tworząc rozszerzony region. Układ ostatecznie nasycy się w trzecim etapie z niewielkimi oscylacjami dla późnych czasów. W obu przypadkach skomplikowana dynamika jest konsekwencją nieliniowej natury dualnych równań Einsteina-dylatonu i byłaby niezwykle trudna do zbadania przy użyciu konwencjonalnych technik teorii pola.

W Ref. [H7] analizujemy bardziej szczegółowo oba te zjawiska: zderzenia w pełni uformowanych domen faz równowagowych, jak również szczegóły dynamiki wzrostu pęcherzyków. Ponadto rozszerzamy naszą analizę na różne klasy holograficznych przejść fazowych pierwszego rzędu. Poniżej przedstawiamy kluczowe pytania, które zamierzamy podjąć oraz podsumowanie naszych wyników:

<sup>7</sup>Różnice te wynikają z różnych form perturbacji zastosowanej przez nas dla  $\phi_H = 2$  i  $\phi_H = 3$ .

### Jaki jest ogólny stan końcowy wychodzący z gałęzi spinodalnej? Czy możemy opisać zderzenia i koalescencję domen fazowych?

Znajdujemy krajobraz stanów końcowych, z których niektóre są metastabilne z wykładniczo długim czasem życia. Aby określić czas życia domen w funkcji ich szerokości, skonstruowaliśmy zestaw warunków początkowych, w których możemy dostroić szerokość jednej z niskoenergetycznych domen, mając jednocześnie statyczną konfigurację początkową. Stwierdzamy wykładniczą zależność  $t_{\text{merge}}$  od szerokości:

$$\log(t_{\text{merge}}) = 0.870 + 0.597 \text{ width} \quad (60)$$

co dobrze pasuje do wyników numerycznych. Wykładniczo długi czas życia nawet umiarkowanie szerokich domen oznacza, że termodynamicznie preferowana konfiguracja z najmniejszą możliwą liczbą dwóch ścian domenowych (i tylko pojedynczą domeną każdej fazy) może w niektórych przypadkach nigdy nie zostać zrealizowana w praktyce. Dominującym mechanizmem łączenia się domen jest raczej ich względny ruch i następujące po nim zderzenia. Przeprowadziliśmy również symulację ruchu i zderzenia dwóch w pełni uformowanych domen fazowych.

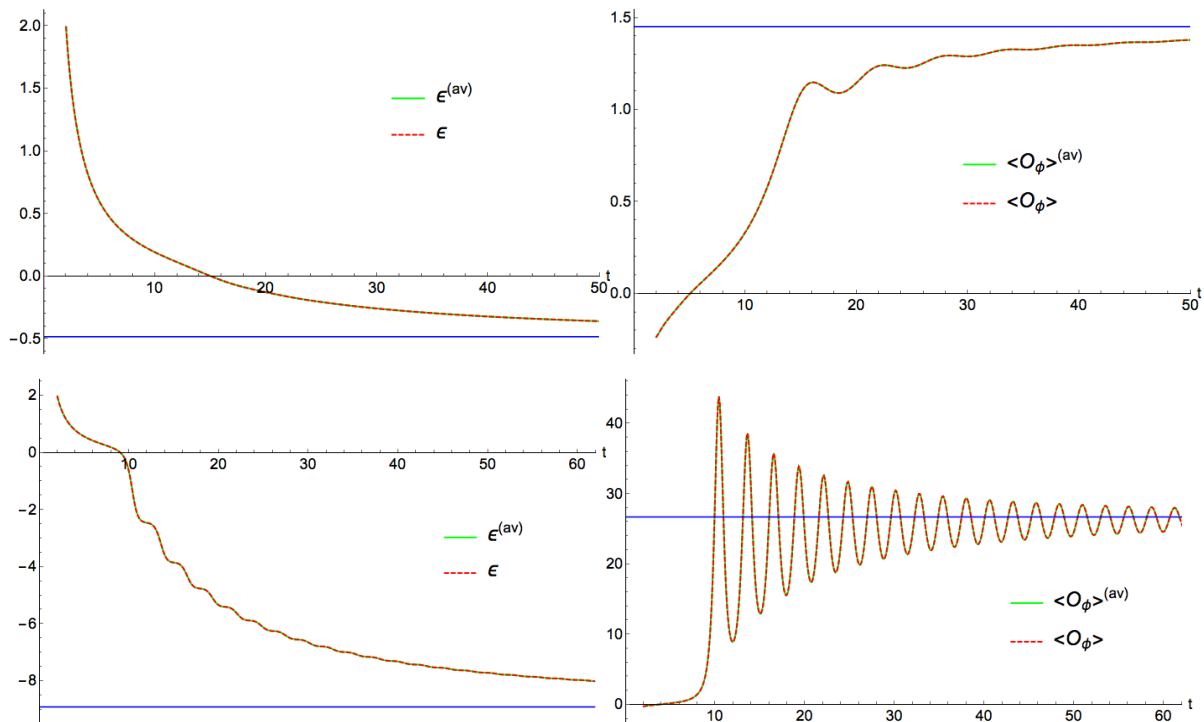
### Jaki jest wpływ przejścia fazowego i niestabilności dynamicznej na ekspansję boost-niezmienniczą?

Fizycznie bardzo interesującym scenariuszem, motywowanym przez realistyczne zderzenia ciężkich jonów, jest ekspansja boost-niezmiennicza. Tutaj plazma zaczyna się w fazie wysokiej temperatury, rozszerza się i ochładza i w końcu temperatura spada poniżej temperatury przejścia fazowego. Interesujące jest więc badanie dynamiki takiego układu w czasie rzeczywistym. W ref. [H7] używamy tego schematu również do badania układów, w których pojawiają się nowe efekty: tj. układów z nową niestabilnością dynamiczną oraz układów, które wykazują przejście fazowe confinement-deconfinement.

W przypadku niejednorodnym ewolucja czasowa funkcji jednopunktowych uśrednionych w jednym okresie przestrzennym jest ściśle zgodna z ewolucją odpowiadających im jednorodnych funkcji jednopunktowych. Na Rys. 17 wykreślamy gęstość energii teorii brzegowej *varepsilon* i wartość oczekiwaną gęstości pola skalarnego dla potencjałów z niestabilnością hydrodynamiczną (górny rząd) i z niestabilnością dynamiczną (dolny rząd). W przypadku niejednorodnym ewolucja czasowa funkcji jednopunktowych uśrednionych w jednym okresie przestrzennym jest ściśle zgodna z ewolucją odpowiadających im jednorodnych funkcji jednopunktowych. przestrzennej jest ściśle zgodna z ewolucją związanych z nią jednorodnych funkcji jednopunktowych. Na rys. wykreślamy gęstość energii teorii brzegowej *varepsilon* i wartość oczekiwaną gęstości pola skalarnego dla potencjałów z niestabilnością hydrodynamiczną (górny rząd) i z niestabilnością dynamiczną (dolny rząd). Co zaskakujące, w przypadku niejednorodnym, średnie wartości oczekiwane w jednym okresie wzdłuż kierunku  $x$  podążają za jednorodną ewolucją czasową co pokazuje, że niejednorodna perturbacja rozmywa się w czasie a niestabilności hydrodynamiczne nie wzmacniają niejednorodności. Niemniej jednak, interesujące jest zobaczenie efektu dynamicznych modów niestabilnych w ewolucji czasowej wartości oczekiwanej pola skalarnego w prawym dolnym panelu Rys. 17.

### Czy możemy zaobserwować przejście fazowe confinement-deconfinement w czasie rzeczywistym (holograficznej) ewolucji?

Jak pokazano na Rys. 6, dla przypadków z przejściem fazowym confinement-deconfinement istnieją dwie gałęzie rozwiązań jednorodnej czarnej dziury dla temperatury wyższej niż  $T > T_{\text{min}}$ . Natomiast dla niższej temperatury jedynym rozwiązaniem równań ruchu Einsteina-dylatonu jest gaz termiczny w danej temperaturze o zerowej energii swobodnej. Przejście pomiędzy gazem termicznym (faza uwieszenia) a jednorodnymi czarnymi dziurami (faza deconfinement) następuje w krytycznej temperaturze  $T_c > T_{\text{min}}$ . Jest to więc odpowiedni układ do badania przejścia fazowego confinement-deconfinement, które jest przejściem



Rysunek 17: Porównanie średniej wartości jednopunktowej funkcji w niejednorodnej ewolucji z przypadkiem jednorodnej ewolucji dla obu potencjałów z hydrodynamiczną niestabilnością (górny rząd) oraz z dynamiczną niestabilnością (dolny rząd). Niebieska, horyzontalna linia przedstawia najmniejszą czarną dziurę, która jest oczekiwanym stanem końcowym boost-niezmienniczej ewolucji. Wykresy z pracy [H7].

między dwoma różnymi fazami materii. Jednak z punktu widzenia grawitacji jest to raczej trudne zadanie, ponieważ topologia czarnych dziur (z horyzontem) jest zupełnie inna niż gazu termicznego (bez horyzontu).

Mimo, że nie byliśmy w stanie zbadać formowania się domen fazowych w tym układzie, badamy niezmienniczość plazmy rozszerzającej się w pewnych przypadkach. Nałożyliśmy warunek brzegowy pozornego horyzontu podczas ewolucji czasowej, który zmusza plazmę do prawie podążania za równaniem stanu rozwiązań statycznych, aż do momentu, gdy plazma wejdzie w numerycznie niestabilny reżim kodu. Nasze rozwiązanie w późnym czasie nie jest w lokalnie stabilnym stanie przechłodzonym, ale raczej jest w gałęzi małej czarnej dziury, która jest niestabilna w odniesieniu do wzbudzeń hydrodynamicznych o skończonym pędzie. Jednak, podobnie jak w poprzednich symulacjach boost-niezmienniczych, tempo ekspansji jest zbyt szybkie, aby miało to jakiś zauważalny efekt.

W szczególności nie widzimy żadnego załamania spójności (jak tworzenie się regionów o wysokiej krzywiznie itp.), które wskazywałyby na przejście w kierunku stabilnego tła gazu termicznego w ramach ewolucji klasycznej. Jednym z celów tego badania było sprawdzenie, czy rzeczywiście tak jest. Wniosek jest więc taki, że trzeba modelować nukleację pęcherzyków niezależnie od klasycznej ewolucji badanej w ref. [H7].

## Oscylacyjne testy ścinania w materiale lepkosprężystym

W artykule [H8] przedstawiamy pierwszą charakterystykę nieliniowej i zależnej od czasu odpowiedzi reologicznej lepkosprężystych modeli holograficznych typu bottom-up. Dokładniej, przeprowadzamy testy oscylacyjnego ścinania w holograficznych teoriach masywnej grawitacji ze skończoną odpowiedzią sprężystą, skupiając się na reżimie dużego amplitudowego ścinania oscylacyjnego (LAOS). Charakteryzacja tych układów odbywa się przy użyciu kilku technik, o czym jeszcze wspomnimy. Znajdujemy istotne dowody na istnienie silnego mechanizmu usztywnienia odkształceniowego, typowego dla materiałów hipersprężystych, takich jak gumy i złożone polimery. Wskazuje to, że rozważane modele holograficzne nie są dobrym opisem dla sztywnych metali, gdzie usztywnienie odkształcenia nie jest powszechnie obserwowane. Dodatkowo, obserwuje się przejście pomiędzy reżimem cieczy fizycznej przy małej masie grawitonów (w stosunku do skali temperatury), a reżimem ciała stałego fizycznego przy dużych wartościach. Na koniec omawiamy znaczenie naszych wyników dla miękkiej materii oraz dla zrozumienia szeroko stosowanych jednorodnych modeli holograficznych z łamaną translacją.

W sprężystych ciałach stałych naprężenie mechaniczne jest proporcjonalne do przyłożonego zewnętrznego odkształcenia ścinającego [46]. Natomiast w cieczach hydrodynamicznych naprężenie jest proporcjonalne do szybkości ścinania [47]. Oczywiście oba te przypadki są abstrakcyjnymi idealizacjami, obowiązującymi tylko w pewnych warunkach. Ogólnie rzecz biorąc, wszystkie materiały są fiskalne – prezentują wzajemne zależności między efektami sprężystymi i dyssypatywnymi lepkimi; miód jest najczęstszym przykładem.

Idea, że *”wszystko płynie, jeśli wystarczająco długo czekasz”* leży u podstaw nowej dziedziny badań znanej jako *reologia* [48]. Podstawowe trudności są dwojakie: (i) koncepcyjnie trudno jest włączyć dyssypację do opisu materiałów stałych w teorii pola efektywnego ze względu na nieunikniony wymóg unitarności; (ii) teoria sprężystości może być sformułowana w języku standardowej teorii pola efektywnego zgodnie z dobrze zdefiniowaną zasadą działania. Hydrodynamika, przeciwnie, jest zwykle opisywana przez zestaw równań zachowawczych i relacji konstytutywnych [49] i nie nadaje się do opisu w kategoriach lokalnego i hermitowskiego działania.

Problem staje się jeszcze bardziej dotkliwy, gdy amplituda przyłożonego zewnętrznego odkształcenia nie jest mała i liniowe przybliżenie przestaje być pomocne – początek nieliniowej lepkosprężystości. Dla uproszczenia i jako pierwszy krok, skupiamy się na oscylacyjnych próbach ścinania, w których zewnętrzne odkształcenie ścinające przyjmuje prostą formę sinusoidalną

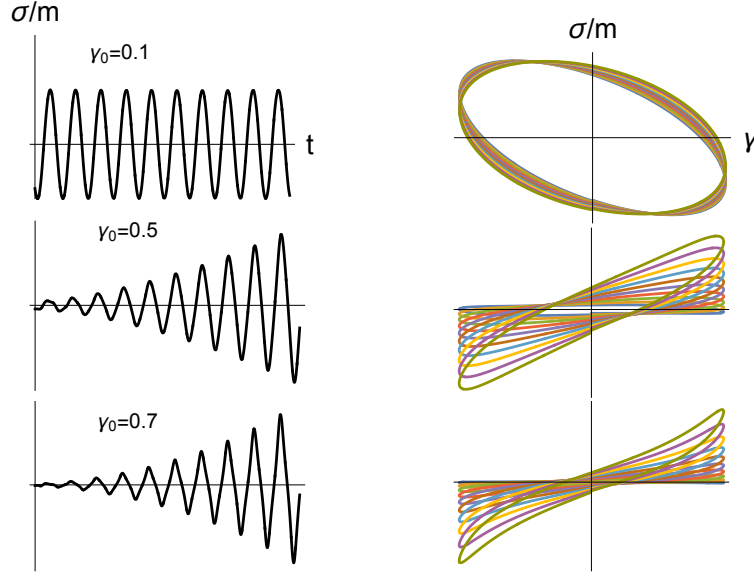
$$\gamma(t) = \gamma_0 \sin(2\pi\omega t) \quad (61)$$

gdzie  $\gamma_0$  to amplituda odkształcenia, a  $\omega$  to częstotliwość charakterystyczna.

Ogólnie rzecz biorąc, możemy narysować tzw. diagram Pipkina [50], obrazujący przestrzeń fazową układu w funkcji wartości  $\gamma_0$  i  $\omega$ . W największym regionie tego wykresu amplitudy odkształceń są duże, a częstotliwości nie są ani wysokie, ani niskie; eksperymenty sondujące ten region nazywane są *testami LAOS* [51, 52] i są przedmiotem naszych badań. W reżimie LAOS liniowa lepkosprężystość nie ma już zastosowania; odpowiedź jest w pełni nieliniowa, moduły magazynowania i strat stają się nietrywialnymi funkcjami amplitudy odkształcenia  $\gamma_0$ . W tym reżimie wiadomo bardzo niewiele, cytując samego Pipkina: *”Tu są smoki”* [50].

W ref. [H8], kładziemy szczególny nacisk na reżim LAOS przy użyciu technik holograficznych. Znaczenie naszych wyników jest różnorodne i wysoce interdyscyplinarne: (i) rzucenie światła na wyzwania związane z LAOS, a w szczególności na fizykę płynów złożonych (uzyskując rozrzedzenie ścinania, przekroczenie naprężenia, niestabilności dynamiczne) [52] (ii) osiągnąć pełną charakterystykę i zrozumienie homogenicznych modeli holograficznych z łamaną translacją [53, 54] i ich możliwych związków ze szkłami, płynami złożonymi i układami amorficznymi [55]; (iii) zbadać procesy poza równowagą w silnie sprzężonych teoriach pola i możliwą uniwersalną ewolucję po dynamicznych wygaszeniach (ang. quenches).

Rozpatrujemy (3 + 1)-wymiarowy holograficzny model [54] masywnej grawitacji, zdefiniowany przez



Rysunek 18: Początek nieliniowej sprężystości poprzez zwiększenie amplitudy odkształcenia. Amplituda odkształcenia jest zadana przez  $\gamma(t) = \gamma_0 \sin(2\pi\omega t)$  i gładko rośnie w czasie. Każdy kolor w krzywej Lissajous odpowiada i-temu periodowi. Wybieramy  $m/T_{in} = 1.81$ ,  $\omega/m = 0.32$ . Wykresy z pracy [H8].

następujące działanie:

$$S = M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{2} + \frac{3}{\ell^2} - m^2 V(X) \right] \quad (62)$$

gdzie  $X \equiv \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i$ . Pola Stückelberga przyjmują radialnie stały profil  $\phi^i = x^i$ , który łamie translacyjną niezmienniczość dualnej teorii pola. Tutaj skupiamy się na szczególnym potencjale  $V(X) = X^3$ , który realizuje spontaniczne łamanie symetrii translacji i daje początek skończonej odpowiedzi sprężystej w dualnej teorii pola oraz obecności propagujących się modów fononowych – związanych z nimi bozonów Goldstone’a [54].

W reżimie liniowym wykorzystujemy teorię odpowiedzi liniowej, aby uzyskać korelator ścinania z teorii objętościowej przy użyciu słownika holograficznego. W granicy zerowego pędu korelator tensora energii-pędu ma postać

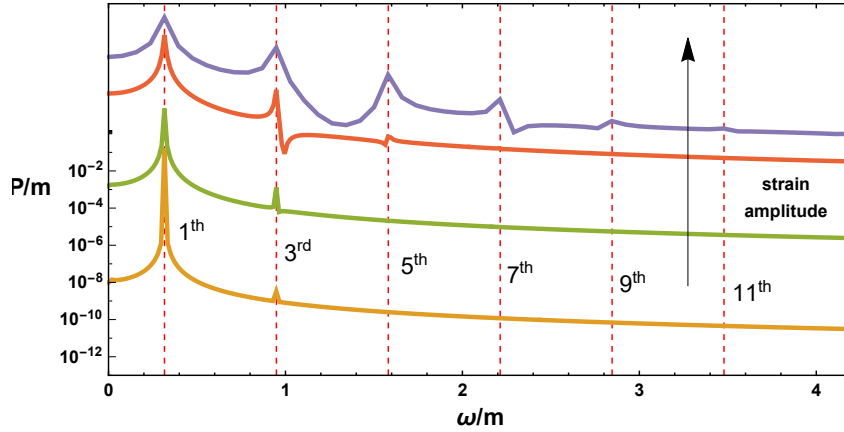
$$\mathcal{G}_{T_{xy}T_{xy}}^R(\omega, k=0) \equiv G'(\omega) + i G''(\omega) \quad (63)$$

i określa dla nas moduł magazynowania  $G'(\omega)$  i moduł strat  $G''(\omega)$ , wraz z kątem strat (przesunięciem fazowym)  $\tan \delta(\omega) \equiv \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)}$ . Przy niskiej częstotliwości mamy:

$$\mathcal{G}_{T_{xy}T_{xy}}^R(\omega, k=0) = G_0 - i\eta\omega + \mathcal{O}(\omega^2), \quad (64)$$

gdzie  $G_0$  oraz  $\eta$  to odpowiednio statyczny moduł ścinania i lepkość ścinania. W doskonale sprężystym ciele stałym mamy  $G'' = 0$  i  $\delta = 0$ , natomiast w czysto dysypatywnym płynie  $G' = 0$  i  $\delta = \pi/2$ . Wszystkie materiały o wartościach  $0 < \delta < \pi/2$  są z definicji lepkosprężyste.

W rozważanym modelu holograficznym, przy  $m = 0$  statyczny moduł sprężystości jest zerowy,  $G_0 = 0$ , a układ jest dyypatywnym płynem lepkiem (wysycającym granicę KSS,  $\eta/s = 1/4\pi$  [7]). W pośrednich i skończonych wartościach  $m/T$  układ ma zarówno skończony moduł statyczny jak i skończoną lepkość i wykazuje właściwości lepkosprężyste takie, że przy zwiększaniu parametru  $m$ , czyli masy grawitonu, silniejsza staje się składowa sprężysta.



Rysunek 19: Widmo Fouriera  $\mathcal{P}$  naprężenia zależnego od czasu dla rosnącej amplitudy odkształcenia  $\gamma_0 = \{0.01, 0.1, 0.4, 0.75\}$  (od linii pomarańczowej do niebieskiej). Zwiększając amplitudę odkształcenia pojawiają się wyższe (nieparzyste) harmoniki. Widmo mocy jest zdefiniowane jako  $\mathcal{P}(\omega) \equiv \mathcal{F}[\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t + \tau)\sigma(t)dt]$ . Wykresy z pracy [H8].

Gdy amplituda przyłożonego odkształcenia jest duża, pojawiają się nieliniowości i liniowe przybliżenie lepkoścprężyste zawodzi. Z punktu widzenia grawitacji, problem ten wymaga bardziej skomplikowanego jednorodnego i zależnego od czasu układu (54). Co ważne, poza równowagą temperatura nie jest pojęciem dobrze zdefiniowanym. Z tego powodu będziemy ją wszędzie oznaczać symbolem  $T_{in}$ , aby określić, że taki parametr jest temperaturą stanu początkowego ( $t = 0$ ). W tym reżimie wytworzone naprężenie nie jest już liniowo proporcjonalne do przyłożonego odkształcenia, ale przedstawia zmodyfikowany kształt, który można rozumieć jako superpozycję różnych składowych Fouriera. Dokładniej, w reżimie nieliniowym, odkształcenie  $\gamma$  i naprężenie  $\sigma$  można przedstawić jako <sup>8</sup>

$$\gamma(t) = \gamma_0 \sin(2\pi\omega t), \quad \dot{\gamma}(t) = 2\pi\omega \gamma_0 \cos(2\pi\omega t) \quad (65)$$

$$\sigma(t) = \sum_{p, \text{odd}} \sum_{q, \text{odd}} \gamma_0^q (a_{pq} \sin(2\pi q\omega t) + b_{pq} \cos(2\pi q\omega t)) \quad (66)$$

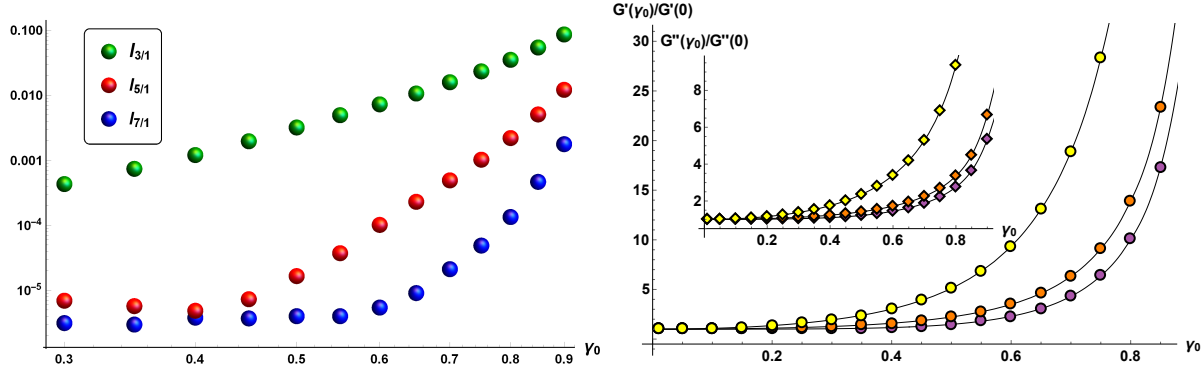
gdzie  $a_{11}, b_{11}$  związane są z modułami zespolonymi  $G'(\omega), G''(\omega)$  w reżimie liniowym, a pierwsze nieliniowe poprawki wchodzące w rzędzie  $\mathcal{O}(\gamma_0^3)$ .

Badamy tutaj różne metody reprezentowania i charakteryzowania nieliniowej odpowiedzi przy dużych amplitudach: (i) analizę widma Fouriera odpowiedzi naprężeniowej zależnej od czasu, (ii) figury Lissajousa – krzywe parametryczne naprężenie-odkształcenie  $\{\gamma(t), \sigma(t)\}$ , (iii) definicję nieliniowych modułów złożonych i ich zależności od amplitudy odkształcenia. W naszych wykresach wszystkie wielkości są przedstawione w jednostkach parametru masy  $m$ , a siła przyłożonego zewnętrznego odkształcenia leży w przedziale  $\gamma_0 \in [0, 1]$ .

Po pierwsze, obserwujemy na Rys. 18, że poprzez zwiększenie amplitudy przyłożonego odkształcenia kształt reakcji naprężeniowej ulega zniekształceniu i odbiega od prostej funkcji oscylacyjnej. Zachowanie to jest również widoczne w odpowiadających mu figurach Lissajous, które nie są już prostym owalem, jak można się spodziewać w reżimie liniowym. Zauważamy, że kształt krzywej po każdym cyklu wydaje się być nieco zmieniony; zjawisko to podkreśla złożoność naszego układu lepkoścprężystego.

<sup>8</sup>Powodem, dla którego w rozwinięciu pojawiają się tylko nieparzyste potęgi jest to, że reakcja na naprężenia jest zwykle przyjmowana niezależnie od kierunku ścinania.





Rysunek 20: Lewy Panel: Znormalizowana intensywność  $I_{n/1} \equiv P(\omega_n)/P(\omega_1)$  pierwszych trzech wyższych harmonicznnych w funkcji amplitudy odkształcenia  $\gamma_0$ . Prawy panel: Pierwszy zespolony moduł  $G'_1(\omega, \gamma_0), G''_1(\omega, \gamma_0)$  przy ustalonej częstotliwości w funkcji amplitudy odkształcenia. Znormalizowaliśmy je przez ich wartość liniową  $G(0) \equiv G(\gamma_0 \ll 1)$ . Kolory odpowiednio  $m/T_{in} = 0.01, 1.81, 30$  (od żółtego do fioletowego). Początek nieliniowości jest w przybliżeniu niezależny od wartości  $m/T_{in}$  i pojawia się w okolicy  $\gamma_0 \sim 0.3$ . Wykresy z pracy [H8].

Na Rys. 19 badamy widmo Fouriera tego sygnału. Przy małej amplitudzie (krzywa pomarańczowa) widmo jest zlokalizowane na pierwszej i jedynej harmonicznnej, która jest ustalona przez częstotliwość przyłożonego sygnału odkształcenia. Oznacza to, że system nadal znajduje się w reżimie odpowiedzi liniowej, gdzie naprężenie jest liniowo proporcjonalne do zastosowanego odkształcenia. Zwiększając amplitudę, w widmie pojawiają się wyższe (nieparzyste) harmoniczne potwierdzające strukturę funkcyjną przedstawioną w Równ. (66). Znormalizowana moc wyższych harmonicznnych  $I_{n/1}$ , jest pokazana na Rys. 20. Znajdujemy wstępne dowody na występowanie zależności potęgowej  $\sim \gamma_0^n$ , która została wcześniej zasugerowana przez argumenty teoretyczne w [56].

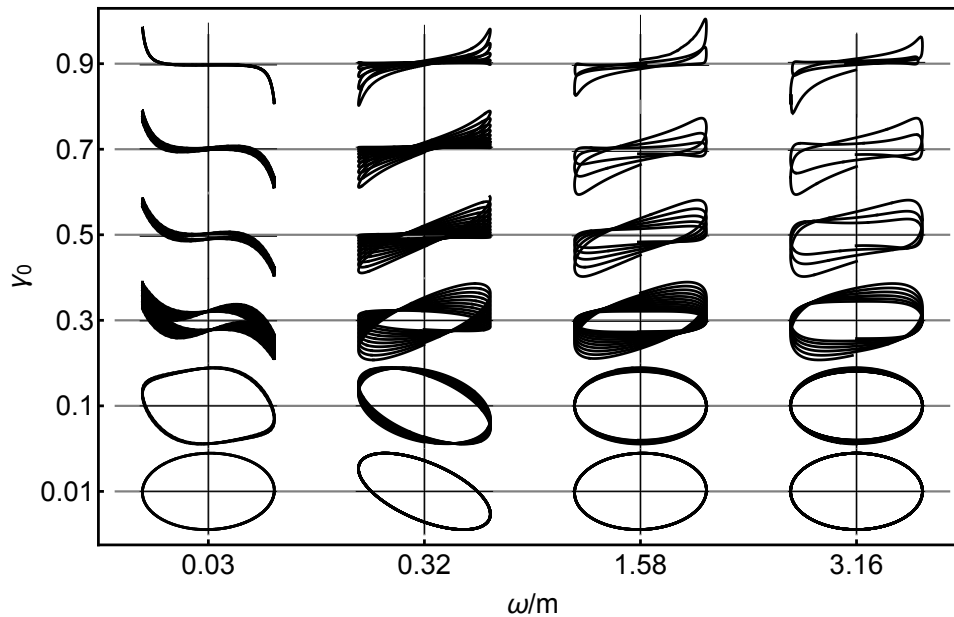
Kontynuując zgodnie z linią Równ. (66), możemy przepisać reakcję na naprężenie jako:

$$\sigma(t) = \sum_{n, \text{odd}} \sum_{m, \text{odd}} \gamma_0^n (G'_{nm} \sin(2\pi m\omega t) + G''_{nm} \cos(2\pi m\omega t)). \quad (67)$$

Zespolone moduły są rygorystycznie zdefiniowane tylko w reżimie liniowym; jednak pomiary  $G'(\gamma_0)$  and  $G''(\gamma_0)$  przy stałej częstotliwości mogą dostarczyć znaczących informacji. Najczęściej spotykana opcja obliczania modułów z niesinusoidalnej odpowiedzi polega na spojrzeniu na wielkości  $G'_1(\omega, \gamma_0), G''_1(\omega, \gamma_0)$ , definiowane jako wkład pierwszych harmonicznnych  $\sin(2\pi\omega t), \cos(2\pi\omega t)$  do rozwinięcia w Równ. (67). Dodatkowo, wartości  $G'_1, G''_1$  są dokładnie takie, jakie podają w eksperymentach komercyjne reometry. Korzystając z prostego rozwinięcia, otrzymujemy pierwszy człon w sumie (67):

$$\begin{aligned} \sigma(t)^{\text{pierwszy czlon}} &= \left[ G'_{11} \gamma_0 + G'_{31} \gamma_0^3 + \mathcal{O}(\gamma_0^5) \right] \sin(2\pi\omega t) + \left[ G''_{11} \gamma_0 + G''_{31} \gamma_0^3 + \mathcal{O}(\gamma_0^5) \right] \cos(2\pi\omega t) \\ &= G'_1(\omega, \gamma_0) \gamma_0 \sin(2\pi\omega t) + G''_1(\omega, \gamma_0) \gamma_0 \cos(2\pi\omega t) \end{aligned} \quad (68)$$

gdzie zaniedbujemy poprawki wyższych harmonicznnych, które w naturalny sposób pojawiają się w Równ. (67). Biorąc pod uwagę te zapisy, wartości  $G'_1, G''_1$  przy zerowym odkształceniu odpowiadają granicy odpowiedzi liniowej w Równ. (63). Zależność pierwszych nieliniowych modułów zespolonych  $G'_1(\omega, \gamma_0), G''_1(\omega, \gamma_0)$  przy ustalonej częstotliwości wykreślamy w prawym panelu na Rys. 20. Obserwujemy, że dla małych amplitud moduły są niezależne od amplitudy odkształcenia. Nie jest to już prawdą przy dużych amplitudach, gdzie efekty nieliniowe stają się istotne. Stwierdzamy, że początek nieliniowości jest w przybliżeniu niezależny od



Rysunek 21: Diagram Pipkina: figury Lissajous w funkcji amplitudy i częstotliwości źródła odkształcenia oscylacyjnego. Dla tego wykresu ustalamy  $m/T_{in} = 1.81$ . Wybór ten odnosi się do reżimu, w którym nasz układ jest konkretnie lepkosprężysty. Wykresy z pracy [H8].

wartości  $m/T_{in}$  i zależy wyłącznie od amplitudy przyłożonego odkształcenia  $\gamma_0$ . Zauważmy, że w reżimie nieliniowym oba moduły rosną w sposób szybszy niż liniowy. Z operacyjnego punktu widzenia definiuje to obecność usztywnienia naprężeniowego. Zachowanie to jest typowe dla materiałów hiperelastycznych, takich jak układy gumopodobne lub złożone polimery, i stanowi przeciwieństwo tak zwanego ertektu (utwardzania naprężeniowego), który jest natomiast wspólną cechą sztywnych metali.

Zauważmy też, że przy małych odkształceniach, dla małych wartości masy  $m$ ,  $G_1'' > G_1'$ , co wskazuje, że nasza dualna teoria pola jest *lepkosprężystą cieczą*. Sytuacja ulega odwróceniu przy dużych wartościach  $m/T_{in}$ , gdzie układ staje się *lepkoelastycznym ciałem stałym* z  $G_1'' < G_1'$  [57]. Jest to całkowicie zgodne z faktem, że masa grawitonu  $m$  określa "wielkość solidności" układu – jego sztywność.

Aby uzupełnić naszą analizę, konstruujemy diagram Pipkina naszego modelu na Rys. 21 poprzez wykreślenie figur Lissajous przy różnych częstotliwościach odkształcenia i amplitudach. Obserwujemy zgrabne przejście pomiędzy liniowym reżimem lepkosprężystym przy niskich amplitudach i częstotliwościach do bardziej skomplikowanych dużych regionów, gdzie odpowiedź staje się wysoce nieliniowa. Ten ostatni wynik potwierdza, że badany przez nas reżim nie może być opisany przez liniową odpowiedź i wykazuje wszystkie główne właściwości fizyczne systemów LAOS.

## Podsumowanie

Przedstawione tu osiągnięcia opierają się na serii publikacji dotyczących układów o nierównowagowej dynamice i bez symetrii konforemnej w silnie sprzężonym reżimie. Nasze osiągnięcia wpisują się w następujące długofalowe cele badawcze

- Skonstruowanie hydrodynamicznego opisu zagadnień kwantowych z pierwszych zasad i określenie zakresu jego stosowalności.

- Odkrycie dynamicznych szczegółów przejść fazowych typu confinement/deconfinement.
- Wykorzystanie koncepcji fizyki wysokich energii i holografii w materiałach lepkosprężystych.

W ramach programu badawczego i we współpracy z różnymi wybitnymi naukowcami w różnych instytucjach zainicjowaliśmy i nieprzerwanie prowadzimy prace nad dynamiką w czasie rzeczywistym zagadnień kwantowych o nietrywialnej strukturze fazowej.

Najpierw zbadałem własności niehydrodynamicznych modów kolektywnych układu holograficznego ściśle naśladującego sieciowe równanie stanu QCD [H1]. Następnie pokazałem, że różne przejścia fazowe mogą być scharakteryzowane na podstawie ich modów kolektywnych [H2]. W szczególności, jednoznacznie określiłem niestabilność w gałęzi spinoidalnej struktury fazowej pierwszego rzędu i oszacowałem skalę długości dla tworzenia się pęcherzyków. Znalazłem również termodynamicznie stabilną fazę materii z dynamiczną niestabilnością [H3]. Rozszerzyłem zrozumienie promienia zbieżności szeregu hydrodynamicznego w pobliżu przejścia fazowego w [H4], badając mody kolektywne o zespolonych pędach. Wreszcie, na poziomie zlinearyzowanym, badałem efekty wyższych pochodnych w teorii masowej, związane z pośrednim reżimem sprężenia teorii brzegowej, w konkretnym modelu [H5].

Ponadto opracowałem strukturę do badania ewolucji systemów z przejściami fazowymi w pełnym, nieliniowym wymiarze czasu. W pracy [H6] badałem dynamikę niestabilności spinodalnych i separacji faz w holograficznym przejściu fazowym pierwszego rzędu. Został on również rozszerzony na różne stany początkowe, w tym ruchome domeny fazowe i rozszerzającą się niezmienniczą plazmę w pracy [H7]. Wreszcie, przedstawiłem pierwszą charakterystykę nieliniowej i zależnej od czasu odpowiedzi reologicznej lepkosprężystych modeli holograficznych typu "bottom-up" w pracy [H8], wykonując testy oscylacyjnego ścinania ze skończoną odpowiedzią sprężystą i skupiając się na reżimie oscylacyjnego ścinania o dużej amplitudzie.

Na koniec chciałbym wspomnieć, że w chwili obecnej prowadzonych jest kilka projektów, w ramach których różne międzynarodowe grupy zajmują się układami nierównowagowymi.

## 5. Prezentacja znaczącej działalności naukowej lub artystycznej prowadzonej w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub kulturalnej, w szczególności w instytucjach zagranicznych

Mam szerokie zainteresowania naukowe w zakresie fizyki teoretycznej od wysokich energii do fizyki materii skondensowanej. Tutaj podsumowuję kierunki, które nie są przedmiotem sekcji 4.

### Przed uzyskaniem stopnia doktora

Swój doktorat rozpocząłem od badania topologicznej teorii strun. W pracy [58], we współpracy z F. Loranem, pokazałem, jak naturalny abelowski dualności 2- i 3-formowych teorii grawitacji na siedmiowymiarowej rozmaitości  $CY_3$  prowadzi do S-dualności między 2- i 3-formowymi teoriami na prosto połączonej  $CY_3$ . Bezmasowy sektor 2-formowej teorii pola na  $CY_3$  odpowiada strunowej teorii pola modelu A. Przedyskutowałem niezależność struktury zespolonej teorii 2-formowej dla ogólnej rozmaitości kahlerowskiej i wyprowadziłem holomorfiniczne równania anomalii dla jednospójnego  $CY_3$ .

W trakcie studiów doktoranckich zajmowałem się głównie różnymi aspektami 5-wymiarowych czarnych dziur i czarnych pierścieni. We współpracy z F. Loranem badałem wzmocnienie supersymetrii i zidentyfikowałem globalną supergrupę geometrii bliskiego horyzontu 5-cio wymiarowych  $\mathcal{N} = 2$  czarnych pierścieni [59]. Pokazałem, że globalną częścią tej supergrupy jest  $OSp(4^*|2)$ , która jest podobna do małego czarnej struny. Wykazałem, że wyniki uzyskane przez zastosowanie formalizmu funkcji entropii, podejścia c-ekstremalizacji oraz korespondencji Kerr/CFT do rozwiązania czarnego pierścienia są zgodne z mikroskopowymi obliczeniami entropii. Ponownie we współpracy z F. Loranem analiza korespondencji Kerr/CFT została rozszerzona na 5-wymiarowe rotujące czarne dziury. W pracy

[60] badając przestrzeń modularną metryki bliskiego horyzontu 5-cio wymiarowych ekstremalnych czarnych dziur, które są asymptotycznie płaskie lub AdS, zrealizowałem grupę modularną  $SL(2, \mathbb{Z})$  która jest symetrią geometrii bliskiego horyzontu. Pokazałem, że istnieje siatka chiralnych duali CFT odpowiadających punktom modularnym identyfikowanym pod działaniem grupy modularnej. Entropia mikroskopowa odpowiadająca wszystkim takim CFT jest równoważna i jest zgodna z entropią Bekensteina-Hawkinga.

### Po otrzymaniu stopnia doktora

Moja pierwsza praca naukowa po ukończeniu studiów doktoranckich poświęcona była badaniu różnych aspektów trójwymiarowej grawitacji Borna–Infelda, jak również grawitacji Borna–Infelda–Cherna–Simonsa [61]. We współpracy z M. Alishahiha i A. Naseh pokazałem, że modele te mają rozwiązania próżni falowej anti-de Sittera i anty-de Sittera. Co więcej, zauważyliśmy, że chociaż grawitacja Born–Infeld–Chern–Simons ma rozwiązanie logarytmiczne, to grawitacja Born–Infeld nie ma, choć ma graniczne rozwiązanie logarytmiczne w miarę zbliżania się do punktu krytycznego.

Dodatkowo kontynuowałem pracę nad 5-wymiarowymi czarnymi pierścieniami. We współpracy z K. Goldsteinem badałem możliwe dualne CFT supersymetrycznych pięciowymiarowych czarnych pierścieni w obecności supersymetrycznych poprawek wyższych pochodnych do działania supergrawitacji  $\mathcal{N} = 2$ . Algebra Virasoro związana z asymptotyczną grupą symetrii rozwiązań jest zdefiniowana przy użyciu podejścia Kerr/CFT. Znaleźliśmy ładunek centralny i obliczyliśmy entropię mikroskopową, która jest w dokładnej zgodzie z entropią makroskopową. Chociaż pozornie dotyczy to innego aspektu geometrii bliskiego horyzontu i innej algebry Virasoro, stwierdziliśmy, że metoda ekstremencacji  $c$  prowadzi do tego samego ładunku centralnego i entropii mikroskopowej obliczonej w podejściu Kerra/CFT. Związek pomiędzy tymi dwoma punktami widzenia został wyjaśniony poprzez odniesienie geometrii do samondualnego orbifoldu  $AdS_3$ .

W innym kierunku badań, we współpracy z R. de Mello Koch i P. Diaz, obliczyłem nieplanarny, jednopętlowy anomalny wymiar ograniczonych wielomianów Schura, które należą do sektora  $sl(2)$  teorii  $\mathcal{N} = 4$  super-Yanga-Millsa (SYM) i mają goły wymiar rzędu  $N$ . Chociaż szczegóły były raczej inne, ostatecznie problem diagonalizacji operatora dylatacji w sektorze  $sl(2)$  można sprowadzić do problemu sektora  $su(2)$ . W ten sposób ustaliliśmy oczekiwaną dynamiczną emergencję prawa Gaussa dla gigantycznych grawitonów i dalej pokazaliśmy, że operator dylatacji redukuje się do zbioru rozłącznych oscylatorów harmoniczych.

Następnie, we współpracy z D. Giataganasem i K. Fadafanem, badaliśmy różne aspekty silnie sprzężonej plazmy anizotropowej w serii prac [62, 63, 64, 65]. W pracy [62], badaliśmy straty energii przez rotujący, nieskończenie masywny kwark poruszający się ze stałą prędkością przez anizotropową silnie sprzężoną plazmę teorii  $\mathcal{N} = 4$  SYM z wykorzystaniem holografii. Wykazano, że podobnie jak w przypadku plazmy izotropowej, straty energii wirującego kwarka są spowodowane albo siłą oporu albo promieniowaniem z ciągłym przejściem od reżimu zdominowanego przez opór do reżimu zdominowanego przez promieniowanie. Stwierdziliśmy, że anizotropia ma znaczący wpływ na utratę energii ciężkiego kwarka, szczególnie w reżimie przejściowym. Stwierdziliśmy, że straty energii spowodowane promieniowaniem w ośrodkach anizotropowych są mniejsze niż w przypadku izotropowym. Co ciekawe było to podobne do analogicznych obliczeń dla strat energii w słabo sprzężonej plazmie anizotropowej. Następnie w [63], wykorzystując dualność cechowanie/grawitacja zbadaliśmy urojona część potencjału statycznego związanego z szerokością termiczną w skończonej temperaturze silnie sprzężonej plazmy anizotropowej. Najpierw wyprowadziliśmy potencjał dla ogólnego anizotropowego tła. Następnie zastosowaliśmy te wzory do teorii, w której anizotropia została wygenerowana przez zależny od przestrzeni człon aksjonowy. Stwierdziliśmy, że przy zastosowaniu naszej metody istnieje osobliwy punkt zwrotny w części urojonej potencjału, podobny do tego, który pojawia się w części rzeczywistej. Obecność

anizotropii prowadzi do spadku potencjału urojonego, przy czym większy spadek następuje wzdłuż kierunku anizotropowego przy stałej temperaturze. Gdy gęstość entropii jest stała, wzrost następuje wzdłuż kierunku równoległego, natomiast wzdłuż płaszczyzny poprzecznej obserwujemy spadek. Do oszacowania szerokości termicznej użyłem przybliżonej ekstrapolacji poza punkt zwrotny i znajdujemy spadek w obecności anizotropii, niezależnie od użytego schematu porównawczego. Wreszcie w pracy [64] pokazaliśmy, że w ogólnych izotropowych teoriach holograficznych podłużny współczynnik dyfuzji Langevina wzdłuż ruchu struny jest większy niż w kierunku poprzecznym. Twierdziliśmy, że jest to uniwersalna relacja i wyprowadziłem ogólne warunki przy których jest spełniona. Sposobem na naruszenie tej relacji jest rozważenie anizotropowych dualności grawitacja/cechowanie. Podałem wyraźny przykład takiego naruszenia, gdzie szum wzdłuż kierunku poprzecznego jest większy niż szum występujący wzdłuż ruchu kwarka. Ponadto obliczyliśmy efektywną temperaturę arkusza świata dla dowolnej ogólnej teorii, a następnie warunki na ujemny nadmiar szumu. Twierdziliśmy, że teorie izotropowe nie mogą mieć ujemnego nadmiaru szumu, a dodatkowo zauważyliśmy, że warunki te są trudne do spełnienia, wskazując na dodatni nadmiar szumu nawet w dużej klasie anizotropowych teorii holograficznych, co sugeruje silną uniwersalną własność. Wyniki te zostały wykorzystane w pracy [65] W obu anizotropowych tłach znaleźliśmy przypadki, gdy poprzeczny współczynnik dyfuzji jest większy niż podłużny, ale nie znaleźliśmy ujemnego nadmiaru szumu.

Oprócz tych badań kontynuowałem pracę nad korespondencją Kerr/CFT. W pracy [66], badałem CFT dualną do pięciowymiarowych ekstremalnych rotujących czarnych dziur, poprzez badanie dwuwymiarowej perspektywy ich geometrii w pobliżu horyzontu. Z tego punktu widzenia pokazałem, że oba pola cechowania, związane z dwoma rotacjami, pojawiają się w ten sam sposób w asymptotycznej strukturze symetrii i w związanym z nią ładunku centralnym. Stwierdziłem, że wyniki te doskonale zgadzają się z uogólnieniem podejścia Kerra/CFT do  $f$ -wymiarowych ekstremalnie rotujących czarnych dziur eksplorowanych w [60].

Ponadto, w [67] we współpracy z P. Caputą i V. Jejjalą, wykorzystałem entropię splątania jako narzędzie do badania uniwersalnych własności konforemnych teorii pola (CFT) dualnych do ekstremalnych czarnych dziur BTZ. Wykazaliśmy, że entropia splątania obliczona w CFT na brzegu ekstremalnej BTZ i granicy bliskiego horyzontu ekstremalnej BTZ doskonale się zgadzają i mają postać właściwą dla dwuwymiarowej CFT ze wzbudzoną częścią chiralną i antychiralną w stanie podstawowym. Ponadto, przeanalizowaliśmy uniwersalne granice entropii splątania i odzyskaliśmy poprawną wartość entropii termicznej dla dużych przedziałów splątania oraz relację typu pierwszej zasady termodynamiki dla małych przedziałów.

Ostatnio, we współpracy z C. Ecker, D. Grumiller i P. Stanzer, Używam kwantowego warunku zerowej energii w silnie sprzężonych dwuwymiarowych teoriach pola (QNEC<sub>2</sub>) jako narzędzia diagnostycznego do badania różnych struktur fazowych, w tym przejść typu *crossover*, przejść fazowych drugiego i pierwszego rzędu [68]. Znajdujemy uniwersalne ograniczenie QNEC<sub>2</sub> dla przejść fazowych pierwszego rzędu z załamaną entropią splątania i omawiamy ogólnie związek pomiędzy nierównością QNEC<sub>2</sub> a monotonicznością funkcji Casini–Huerta  $c$ . Następnie skupiamy się na konkretnym przykładzie, którego holograficzny dual jest modelowany przez trójwymiarową grawitację Einsteina plus masywne pole skalarne z jednym wolnym parametrem w potencjale samo-interakcji. Badamy niezmiennicze translacyjnie stany stacjonarne dualne do ścian domenowych i czarnych bran. W zależności od wartości parametru swobodnego znajdujemy przejścia fazowe drugiego i pierwszego rzędu pomiędzy takimi stanami, a funkcja  $c$  płynie do zera lub do skończonej wartości w podczerwieni. Przedstawiamy dowody, że ocena QNEC<sub>2</sub> dla rozwiązań w stanie podstawowym pozwala przewidzieć istnienie przejść fazowych w skończonej temperaturze. Jako wynik uboczny obliczyliśmy wykładnik krytyczny równania stanu teorii Einsteina-dylaton dla różnych wartości konforemnego wymiaru skalowania, dla różnych form potencjału i dla różnych liczb wymiarów czasoprzestrzeni z przejściem fazowym drugiego rzędu i zawsze znajdujemy wartości zgodne z  $\theta = 2/3$  odkrytymi w pracach [10, H2, H3] dla (4+1)-wymiarowej

teorii bulk.

W najnowszej pracy, we współpracy z R. A. Janikiem, M. Jarvinenem i J. Sonnenscheinem pokazałem, że dla szeregu silnie sprzężonych teorii z przejściem fazowym pierwszego rzędu, prędkość ściany domeny lub pęcherzyka może być wyrażona w prosty sposób za pomocą wzoru hydrodynamiki płynu doskonałego, a tym samym za pomocą równania stanu [69]. Przewidywania dotyczące prędkości ścian domeny zostały przetestowane przy użyciu dualizmu teorie z cechowaniem/grawitacja, który został skonstruowany i zbadany w pracach [H6, H7].

### **Bibliometria**

- Liczba publikacji: 15 października 2023: 22 (22) zgodnie z Web of Science (INSPIRE).
- Licza cytowań na dzień 15 października 2023: 447 (610) zgodnie z Web of Science (INSPIRE).
- h-indeks na dzień 15 października 2023: 14 (15) zgodnie z Web of Science (INSPIRE).

## Literatura

- [1] A. Bazavov *et al.*, “Equation of state and QCD transition at finite temperature,” *Phys. Rev. D* **80** (2009) 014504, 0903.4379.
- [2] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113–1133, hep-th/9711200.
- [3] W. Busza, K. Rajagopal, and W. van der Schee, “Heavy Ion Collisions: The Big Picture, and the Big Questions,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **68** (2018) 339–376, 1802.04801.
- [4] M. Franz and M. Rozali, “Mimicking black hole event horizons in atomic and solid-state systems,” *Nature Rev. Mater.* **3** (2018) 491–501, 1808.00541.
- [5] W. Florkowski, M. P. Heller, and M. Spalinski, “New theories of relativistic hydrodynamics in the LHC era,” *Rept. Prog. Phys.* **81** (2018), no. 4, 046001, 1707.02282.
- [6] J. Gooth *et al.*, “Experimental signatures of the mixed axial-gravitational anomaly in the Weyl semimetal NbP,” *Nature* **547** (2017) 324–327, 1703.10682.
- [7] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Holography and hydrodynamics: Diffusion on stretched horizons,” *JHEP* **10** (2003) 064, hep-th/0309213.
- [8] K. Landsteiner, E. Megias, and F. Pena-Benitez, “Gravitational Anomaly and Transport,” *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 021601, 1103.5006.
- [9] J. Gooth, A. C. Niemann, T. Meng, A. G. Grushin, K. Landsteiner, B. Gotsmann, F. Menges, M. Schmidt, C. Shekhar, V. Süß, and *et al.*, “Experimental signatures of the mixed axial-gravitational anomaly in the weyl semimetal nbp,” *Nature* **547** (Jul, 2017) 324–327.
- [10] S. S. Gubser and A. Nellore, “Mimicking the QCD equation of state with a dual black hole,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 086007, 0804.0434.
- [11] S. de Haro, S. N. Solodukhin, and K. Skenderis, “Holographic reconstruction of space-time and renormalization in the AdS / CFT correspondence,” *Commun. Math. Phys.* **217** (2001) 595–622, hep-th/0002230.
- [12] S. Grozdanov and N. Kaplis, “Constructing higher-order hydrodynamics: The third order,” *Phys. Rev. D* **93** (2016), no. 6, 066012, 1507.02461.
- [13] D. T. Son and A. O. Starinets, “Minkowski space correlators in AdS / CFT correspondence: Recipe and applications,” *JHEP* **09** (2002) 042, hep-th/0205051.
- [14] P. K. Kovtun and A. O. Starinets, “Quasinormal modes and holography,” *Phys. Rev. D* **72** (2005) 086009, hep-th/0506184.
- [15] S. Borsanyi, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti, and K. K. Szabo, “QCD equation of state at nonzero chemical potential: continuum results with physical quark masses at order  $mu^2$ ,” *JHEP* **08** (2012) 053, 1204.6710.
- [16] H. Kodama and A. Ishibashi, “A Master equation for gravitational perturbations of maximally symmetric black holes in higher dimensions,” *Prog. Theor. Phys.* **110** (2003) 701–722, hep-th/0305147.
- [17] H. Kodama and A. Ishibashi, “Master equations for perturbations of generalized static black holes with charge in higher dimensions,” *Prog. Theor. Phys.* **111** (2004) 29–73, hep-th/0308128.
- [18] P. Grandclement and J. Novak, “Spectral methods for numerical relativity,” *Living Rev. Rel.* **12** (2009) 1, 0706.2286.

- [19] U. Gursoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti, and F. Nitti, “Deconfinement and Gluon Plasma Dynamics in Improved Holographic QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 181601, 0804.0899.
- [20] U. Gursoy, E. Kiritsis, L. Mazzanti, and F. Nitti, “Holography and Thermodynamics of 5D Dilaton-gravity,” *JHEP* **05** (2009) 033, 0812.0792.
- [21] I. Amado, C. Hoyos-Badajoz, K. Landsteiner, and S. Montero, “Hydrodynamics and beyond in the strongly coupled N=4 plasma,” *JHEP* **07** (2008) 133, 0805.2570.
- [22] S. S. Gubser and I. Mitra, “Instability of charged black holes in Anti-de Sitter space,” *Clay Math. Proc.* **1** (2002) 221, hep-th/0009126.
- [23] P. Chomaz, M. Colonna, and J. Randrup, “Nuclear spinodal fragmentation,” *Phys. Rept.* **389** (2004) 263–440.
- [24] R. Gregory and R. Laflamme, “Black strings and p-branes are unstable,” *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 2837–2840, hep-th/9301052.
- [25] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier, and B. Petersson, “Thermodynamics of SU(3) lattice gauge theory,” *Nucl. Phys. B* **469** (1996) 419–444, hep-lat/9602007.
- [26] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space,” *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 577.
- [27] M. Cvetič and S. S. Gubser, “Phases of R charged black holes, spinning branes and strongly coupled gauge theories,” *JHEP* **04** (1999) 024, hep-th/9902195.
- [28] O. DeWolfe, S. S. Gubser, and C. Rosen, “Dynamic critical phenomena at a holographic critical point,” *Phys. Rev. D* **84** (2011) 126014, 1108.2029.
- [29] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets, “From AdS / CFT correspondence to hydrodynamics,” *JHEP* **09** (2002) 043, hep-th/0205052.
- [30] P. Kovtun, D. T. Son, and A. O. Starinets, “Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics,” *Phys. Rev. Lett.* **94** (2005) 111601, hep-th/0405231.
- [31] S. Grozdanov, P. K. Kovtun, A. O. Starinets, and P. Tadić, “The complex life of hydrodynamic modes,” *JHEP* **11** (2019) 097, 1904.12862.
- [32] C. T. C. Wall, *Singular Points of Plane Curves*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2004.
- [33] M. P. Heller, A. Serantes, M. Spaliński, V. Svensson, and B. Withers, “Convergence of hydrodynamic modes: insights from kinetic theory and holography,” 2012.15393.
- [34] S. Grozdanov, P. K. Kovtun, A. O. Starinets, and P. Tadić, “Convergence of the Gradient Expansion in Hydrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **122** (2019), no. 25, 251601, 1904.01018.
- [35] B. Withers, “Short-lived modes from hydrodynamic dispersion relations,” *JHEP* **06** (2018) 059, 1803.08058.
- [36] A. Jansen and C. Pantelidou, “Quasinormal modes in charged fluids at complex momentum,” *JHEP* **10** (2020) 121, 2007.14418.
- [37] A. Jansen, A. Rostworowski, and M. Rutkowski, “Master equations and stability of Einstein-Maxwell-scalar black holes,” *JHEP* **12** (2019) 036, 1909.04049.
- [38] A. Buchel, “Critical phenomena in N=4 SYM plasma,” *Nucl. Phys. B* **841** (2010) 59–99, 1005.0819.
- [39] M. Natsuume and T. Okamura, “Dynamic universality class of large-N gauge theories,” *Phys. Rev. D* **83** (2011) 046008, 1012.0575.



- [40] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend, “Massive Gravity in Three Dimensions,” *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 201301, 0901.1766.
- [41] A. Sinha, “On the new massive gravity and AdS/CFT,” *JHEP* **06** (2010) 061, 1003.0683.
- [42] J. D. Brown and M. Henneaux, “Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity,” *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207–226.
- [43] I. Gullu, T. C. Sisman, and B. Tekin, “Born-Infeld extension of new massive gravity,” *Class. Quant. Grav.* **27** (2010) 162001, 1003.3935.
- [44] P. M. Chesler and L. G. Yaffe, “Numerical solution of gravitational dynamics in asymptotically anti-de Sitter spacetimes,” *JHEP* **07** (2014) 086, 1309.1439.
- [45] M. J. Duff and J. T. Liu, “Anti-de Sitter black holes in gauged  $N = 8$  supergravity,” *Nucl. Phys. B* **554** (1999) 237–253, hep-th/9901149.
- [46] L. Landau, E. Lifshitz, A. Kosevich, J. Sykes, L. Pitaevskii, and W. Reid, *Theory of Elasticity*. Course of theoretical physics. Elsevier Science, 1986.
- [47] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. No. v. 6 in Course of Theoretical Physics. Elsevier Science, 2013.
- [48] A. Malkin, A. Malkin, and A. Isayev, *Rheology: Concepts, Methods, and Applications*. ChemTec Pub., 2006.
- [49] P. Kovtun, “Lectures on hydrodynamic fluctuations in relativistic theories,” *J. Phys. A* **45** (2012) 473001, 1205.5040.
- [50] A. Pipkin, *Lectures on viscoelasticity theory*. No. v. 7, pt. 1 in Applied mathematical sciences. Springer-Verlag, 1986.
- [51] K. Hyun, M. Wilhelm, C. O. Klein, K. S. Cho, J. G. Nam, K. H. Ahn, S. J. Lee, R. H. Ewoldt, and G. H. McKinley, “A review of nonlinear oscillatory shear tests: Analysis and application of large amplitude oscillatory shear (laos),” *Progress in Polymer Science* **36** (2011), no. 12, 1697 – 1753.
- [52] S. Rogers, “Large amplitude oscillatory shear: Simple to describe, hard to interpret,” 7, 2018.
- [53] T. Andrade and B. Withers, “A simple holographic model of momentum relaxation,” *JHEP* **05** (2014) 101, 1311.5157.
- [54] M. Baggioli and O. Pujolas, “Electron-Phonon Interactions, Metal-Insulator Transitions, and Holographic Massive Gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015), no. 25, 251602, 1411.1003.
- [55] D. Facoetti, G. Biroli, J. Kurchan, and D. R. Reichman, “Classical Glasses, Black Holes, and Strange Quantum Liquids,” *Phys. Rev. B* **100** (2019), no. 20, 205108, 1906.09228.
- [56] R. B. Bird and J. M. Wiest, “Constitutive equations for polymeric liquids,” *Annual Review of Fluid Mechanics* **27** (1995), no. 1, 169–193, <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.27.010195.001125>.
- [57] M. Laurati, P. Maßhoff, K. J. Mutch, S. U. Egelhaaf, and A. Zaccone, “Long-lived neighbors determine the rheological response of glasses,” *Phys. Rev. Lett.* **118** (Jan, 2017) 018002.
- [58] F. Loran and H. Soltanpanahi, “Form field theory on Calabi-Yau threefold,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **13** (2009), no. 3, 637–666, hep-th/0611230.
- [59] F. Loran and H. Soltanpanahi, “Near the horizon of 5D black rings,” *JHEP* **03** (2009) 035, 0810.2620.
- [60] F. Loran and H. Soltanpanahi, “5D Extremal Rotating Black Holes and CFT duals,” *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 155019, 0901.1595.

- [61] M. Alishahiha, A. Naseh, and H. Soltanpanahi, “On Born-Infeld Gravity in Three Dimensions,” *Phys. Rev. D* **82** (2010) 024042, 1006.1757.
- [62] K. B. Fadafan and H. Soltanpanahi, “Energy loss in a strongly coupled anisotropic plasma,” *JHEP* **10** (2012) 085, 1206.2271.
- [63] K. Bitaghsir Fadafan, D. Giataganas, and H. Soltanpanahi, “The Imaginary Part of the Static Potential in Strongly Coupled Anisotropic Plasma,” *JHEP* **11** (2013) 107, 1306.2929.
- [64] D. Giataganas and H. Soltanpanahi, “Universal Properties of the Langevin Diffusion Coefficients,” *Phys. Rev. D* **89** (2014), no. 2, 026011, 1310.6725.
- [65] D. Giataganas and H. Soltanpanahi, “Heavy Quark Diffusion in Strongly Coupled Anisotropic Plasmas,” *JHEP* **06** (2014) 047, 1312.7474.
- [66] H. Soltanpanahi, “Near Horizon of 5D Rotating Black Holes from 2D Perspective,” *Eur. Phys. J. C* **74** (2014), no. 3, 2817, 0911.0148.
- [67] P. Caputa, V. Jejjala, and H. Soltanpanahi, “Entanglement entropy of extremal BTZ black holes,” *Phys. Rev. D* **89** (2014), no. 4, 046006, 1309.7852.
- [68] C. Ecker, D. Grumiller, H. Soltanpanahi, and P. Stanzer, “QNEC2 in deformed holographic CFTs,” 2007.10367.
- [69] R. A. Janik, M. Jarvinen, H. Soltanpanahi, and J. Sonnenschein, “Perfect Fluid Hydrodynamic Picture of Domain Wall Velocities at Strong Coupling,” *Phys. Rev. Lett.* **129** (2022), no. 8, 081601, 2205.06274.

## 6. Prezentacja osiągnięć dydaktycznych i organizacyjnych oraz osiągnięć w zakresie popularyzacji nauki lub sztuki

### Granty

- Regularny staż w ICTP, Trieste, Italy (2019-2025).
- Stypendium TUBITAK dla naukowców wizytujących w Mimar Sinan Fine Arts University, Istanbul, Turkey (2019).
- The National Research Foundation (NRF) Postdoctoral Fellowship, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa (2011-2013).
- Kluczowy projekt National Natural Science Foundation of China, 2020, Grant No.12035007 (co-Investigator).
- The URC Postdoctoral Fellowship University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2010-2011 (co-Investigator).

### Aktywność w zawodzie

- Recenzent w czasopismach (Physics Letter B, European Physical Journal C, Modern Physics Letters A, Annual Physics Conference of Iran).
- Recenzent prac magisterskich i doktorskich w Iranie i Południowej Afryce.
- członek komitetu organizacyjnego warsztatów "Recent Trends in String Theory and Related Topics", IPM, Tehran, Iran (2019).
- Współorganizator klubów dziennikarskich (Wits, IPM, SCNU).
- Członek Irańskiego Towarzystwa Fizycznego.

### Doświadczenie dydaktyczne

- Oddziaływanie elektroslabe i fizyka poza modelem standardowym, Uniwersytet Jagielloński, Polska, 2021 oraz 2023
- Kwantowa Teoria Pola (ćwiczenia) , Uniwersytet Jagielloński, Polska, 2021.
- Ogólna Teoria Względności, SCNU, China, 2019.
- Kurs z holografii numerycznej, IPM, Iran, 2019.
- Kurs z metod numerycznych w AdS/CFT, Mimar Sinan University, Turkey, 2018.
- Fizyka II, Shahr-e-Kord University, Iran, Spring 2008.
- Laboratoria fizyczne (I, II, III), IUT, Iran, 2002–2010.
- Podstawy Fizyki I, II, IUT, Iran 2006–2009.
- Elektrodynamika, IUT, Iran 2007–2008.
- Promotor magistranta, Krzysztofa Musiala, na Uniwersytecie Jagiellońskim, Polska 2022.
- Promowanie pracy magisterskiej studenta Mustafa Mullahasanoglu z Uniwersytetu Bogazici, Turcja w ramach programu Erasmus na Uniwersytecie Jagiellońskim, Polska 2022–2023

## 7. Poza informacjami określonymi w pkt 1-6 powyżej, kandydat może zamieścić inne informacje dotyczące jego kariery zawodowej, które uzna za istotne.

**Udział w międzynarodowych konferencjach i warsztatach po doktoracie bez wykładu**

- Stringtheory.pl/2018, Warsaw, Poland, 2018.
- Spring School on Superstring Theory and Related Topics, ICTP, Trieste, Italy, 2018.
- A Panorama of Holography, Zakopane, Poland, 2016.
- Workshop on Topics in 3D Gravity, ICTP, Trieste, Italy, 2016.
- Integrable Approaches to 3pt functions in AdS<sub>5</sub>/CFT<sub>4</sub>, Budapest, Hungary, 2015.
- Holographic Methods for Strongly Coupled Systems, GGI, Florence, Italy, 2015.
- CERN-CKC TH Institute on Numerical Holography, CERN, Zurich, Switzerland, 2014.
- Conference on non-equilibrium Phenomena in Condensed Matter and String Theory, ICTP, Trieste, Italy, 2014.
- Stringtheory.pl/2014, Warsaw, Poland, 2014.
- Simons Summer Workshop in Mathematics and Physics, Stony Brook, New York, USA, 2013.
- Spring School on Superstring Theory and Related Topics, ICTP, Trieste, Italy, 2013.
- IPM international school and workshop on Particle Physics (IPP12): Neutrino Physics and Astrophysics, IPM, Tehran, Iran, 2012.
- ISFP12 Summer School on Strings and Fundamental Physics, DESY, Hamburg, Germany, 2012.
- Workshop on Foundations of Quantum Theory: measurements, the quantum to classical transition and the flow of time, Stellenbosch, South Africa, 2011.
- Constructive and Perturbative Aspects of Quantum Field Theory, UKZN, Durban, South Africa, 2011.
- 3rd Joburg Workshop on String Theory: String Theory and Higher Spins, Wits Rural Facility, Limpopo, South Africa, 2011.
- ISS2010, IPM String Theory School & Workshop, Tehran, Iran, 2010.



(Podpis Wnioskodawcy)